Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского

Ю. Л. Сачков

Ключевые слова: Лоренцева геометрия, геометрическая теория управления, плоскость Лобачевского.

Лоренцева геометрия есть математическое основание теории относительности [1, 2, 3]. Она отличается от римановой тем, что здесь информация может распространяться вдоль кривых с векторами скорости из некоторого острого конуса. Здесь естественной является задача отыскания лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал типа длины вдоль допустимых кривых. Поэтому важной задачей является описание лоренцевых длиннейших для всех пар точек, где вторая достижима из первой вдоль допустимой кривой. Насколько нам известно, эта задача полностью исследована лишь в простейшем случае левоинвариантной лоренцевой структуры в $\mathbb{R}^{n+1}$, для пространства Минковского $\mathbb{R}^{n+1}_1$ [4].

В этой заметке представлено описание лоренцевых длиннейших, расстояния и сфер для следующего естественного случая — для левоинвариантных лоренцевых структур на единственной связной односвязной неабелевой двумерной группе Ли. Эти результаты получены методами геометрической теории управления [5, 6]. Любопытно, что в этих задачах длиннейшие существуют не для всех достижимых пар точек, а лоренцево расстояние может быть бесконечным в конечных точках. При этом все экстремальные траектории (удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина) оптимальны, то есть сопряженные точки и точки разреза отсутствуют. Оптимальные траектории параметризуются элементарными функциями, как и сферы и расстояния.

Пусть $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ есть группа собственных аффинных функций на прямой, плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости [7, 8]. Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на группе Ли G. Рассмотрим левоинвариантный репер $X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{g}$.

Левоинвариантная лоренцева структура на группе Ли G есть невырожденная квадратичная форма g индекса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Элемент $X \in \mathfrak{g}$ называется времениподобным (соотв. пространственноподобным, светоподобным), если $g(X) < 0$ (соотв. $g(X) > 0$, $g(X) = 0$). Ориентацией времени называется любой времениподобный элемент $X_0 \in \mathfrak{g}$. Обозначим линейную форму $g_0(X) = g(X, X_0)$, $X \in \mathfrak{g}$. Левоинвариантная лоренцева задача оптимального управления на группе G имеет вид

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y) \in G, \tag{1}$$

$$u = (u_1, u_2) \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid g(u) \leqslant 0,\ g_0(u) \leqslant 0\}, \tag{2}$$

$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0, 1), \quad q(t_1) = q_1, \qquad l = \int_0^{t_1} \sqrt{|g(u)|}\, dt \to \max. \tag{3}$$

Решение $q(t)$ задачи (1)–(3) называется лоренцевой длиннейшей. Оптимальное значение этой задачи $\sup l = d(q_1) \in [0, +\infty]$ называется лоренцевым расстоянием от точки q_0 до точки q_1, если q_1 достижима из q_0 для системы (1), (2) за неотрицательное время. Множество $S(R) = \{q \in G \mid d(q) = R\}$ есть лоренцева сфера радиуса $R \in [0, +\infty]$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/

Множество задач (1)–(3) параметризуется матрицами $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| > 0$, такими, что $g(u) = -(au_1 + bu_2)^2 + (cu_1 + du_2)^2$, $g_0(u) = au_1 + bu_2$. Рассмотрим функции на G: $\lambda_1(q) = (c-a)x + (d-b)(y-1)$, $\lambda_2(q) = (c+a)x + (d+b)(y-1)$, $\lambda_3(q) = \lambda_1(q) + 2|A|/(a+c)$.

Теорема 1. *Множество достижимости системы* (1), (2) *(каузальное будущее) из* q_0 *за произвольное неотрицательное время есть* $J^+ = \{q \in G \mid \lambda_2(q) \leqslant 0 \leqslant \lambda_1(q)\}$.

Введем в случае $g(X_1) < 0$ разбиение $J^+ = D \sqcup F \sqcup E$, где $D = \{q \in G \mid \lambda_2(q) \leqslant 0 \leqslant \lambda_1(q),\ \lambda_3(q) < 0\}$, $F = \{q \in G \mid \lambda_3(q) = 0\}$, $E = \{q \in G \mid \lambda_3(q) > 0\}$.

Теорема 2. (1) *Каждая задача* (1)–(3) *сильно каузальна и геодезически неполна* [2].

(2) *Задача* (1)–(3) *глобально гиперболическая* [2] *тогда и только тогда, когда* $g(X_1) \geqslant 0$.

(3) *Если* $g(X_1) < 0$, *то лоренцева длиннейшая, соединяющая точки* q_0 *и* $q_1 \in J^+ \setminus \{q_0\}$, *существует тогда и только тогда, когда* $q_1 \in D$.

(4) *Если* $g(X_1) \geqslant 0$, *то точка* q_0 *соединима с любой точкой* $q_1 \in J^+ \setminus \{q_0\}$ *некоторой лоренцевой длиннейшей.*

Теорема 3. *Времениподобные экстремальные траектории вещественно аналитические. Светоподобные экстремальные траектории суть произвольные липшицевы перепараметризации светоподобных однопараметрических подгрупп.*

Любая времениподобная геодезическая есть дуга гиперболы с асимптотой, параллельной светоподобной однопараметрической подгруппе, или прямолинейный отрезок.

Теорема 4. *Любая экстремальная траектория есть лоренцева длиннейшая.*

Теорема 5. *Если* $q_1 \in \operatorname{int} D$ *при* $g(X_1) < 0$, *и* $q_1 \in \operatorname{int} J^+$ *при* $g(X_1) \geqslant 0$, *то существует единственная лоренцева длиннейшая* $q(t)$, $g(\dot q(t)) \equiv -1$, *соединяющая* q_0 *и* q_1.

Теорема 6. (1) *Если* $g(X_1) < 0$, *то* $d \in C^\omega(\operatorname{int} D)$, $d \in C(\operatorname{cl} D)$. *Кроме того,* $0 \leqslant d|_D < \pi$, $d|_F = \pi$, $d|_E = +\infty$.

(2) *Если* $g(X_1) \geqslant 0$, *то* $d \in C^\omega(\operatorname{int} J^+)$, $d \in C(J^+)$. *Кроме того,* $0 \leqslant d|_{J^+} < +\infty$.

(3) *Вблизи точек гладкости* ∂D *в случае* $g(X_1) < 0$ *и точек гладкости* ∂J^+ *в случае* $g(X_1) \geqslant 0$ *лоренцево расстояние* d *есть гёльдерова функция с показателем* $\frac{1}{2}$ *от евклидова расстояния до соответствующей границы.*

(4) *Расстояние* d *выражается в элементарных функциях: обратных гиперболических функциях при* $g(X_1) < 0$, *обратных тригонометрических функциях при* $g(X_1) > 0$, *квадратных корнях и рациональных функциях при* $g(X_1) = 0$.

Теорема 7. *Лоренцевы сферы* $S(R)$ *суть некомпактные в обоих направлениях дуги гипербол при* $g(X_1) < 0$ *и* $R \in (0, \pi)$, *и при* $g(X_1) \geqslant 0$ *и* $R \in (0, +\infty)$. *При* $g(X_1) < 0$ *также* $S(\pi) = F$, $S(+\infty) = E$.

В любой задаче (1)–(3) *лоренцева сфера* $S(0) = \partial J^+$ *есть ломаная из двух прямолинейных лучей — светоподобных однопараметрических подгрупп в* G.

В качестве характерных примеров лоренцевых задач (1)–(3) рассмотрим следующие задачи P_i, $i = 1, 2, 3$:

P_1: $U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2^2 - u_1^2 \leqslant 0,\ u_1 \geqslant 0\}$, $g = u_2^2 - u_1^2$, $g_0 = -u_1$,

P_2: $U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 \leqslant 0,\ u_2 \geqslant 0\}$, $g = u_1^2 - u_2^2$, $g_0 = -u_2$,

P_3: $U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0\}$, $g = -u_1 u_2$, $g_0 = -u_1$.

В теоремах 8–10 для этих задач приводится явный вид длиннейших $q(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, t_1]$, соединяющих точки q_0 и $q_1 \in J^+ \setminus \{q_0\}$ (когда длиннейшие существуют), а также расстояние $d(q_1)$. Если $q_1 \in \operatorname{int} D$ в задаче P_1 и $q_1 \in \operatorname{int} J^+$ в задачах P_2, P_3, то $g(\dot{q}(t)) \equiv -1$, т.е. длиннейшая $q(t)$ времениподобна и натурально параметризована. В остальных случаях $g(\dot{q}(t)) \equiv 0$, т.е. длиннейшая $q(t)$ светоподобна; кроме того, она является однопараметрической подгруппой в G с естественной параметризацией.

В случае $g(X_1) < 0$ (соотв. $g(X_1) > 0$, $g(X_1) = 0$) решение подобно решению задачи P_1 (соотв. P_2, P_3).

Теорема 8. *Пусть для задачи P_1 точка $q_1 = (x_1, y_1) \in D \setminus \{q_0\}$.*

(1) *Если $x_1 = |y_1 - 1|$, то $x(t) = \pm(e^{\pm t} - 1)$, $y(t) = e^{\pm t}$, $\pm = \operatorname{sgn}(y_1 - 1)$, $t_1 = \pm \ln y_1$, $d(q_1) = 0$.*

(2) *Если $x_1 > |y_1 - 1|$, то*

$$x(t) = \cos c \operatorname{tg} \tau - \sin c, \quad y(t) = \frac{\cos c}{\cos \tau}, \qquad \tau = c + t, \qquad t_1 = \arcsin \alpha - c = d(q_1),$$
$$c = \arcsin \frac{y_1^2 - x_1^2 - 1}{2x_1}, \qquad \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{2x_1 y_1},$$

это дуга гиперболы $y^2 - (x - \sin c)^2 = \cos^2 c$.

Теорема 9. *Пусть для задачи P_2 точка $q_1 = (x_1, y_1) \in J^+ \setminus \{q_0\}$.*

(1) *Если $y_1 - 1 = |x_1|$, то $x(t) = \pm(e^t - 1)$, $y(t) = e^t$, $\pm = \operatorname{sgn} x_1$, $t_1 = \ln y_1$, $d(q_1) = 0$.*

(2) *Если $x_1 = 0$, то $x(t) \equiv 0$, $y(t) = e^t$, $t_1 = \ln y_1 = d(q_1)$.*

(3) *Если $0 < |x_1| < y_1 - 1$, то*

$$x(t) = \pm(\operatorname{sh} c \operatorname{cth} \tau - \operatorname{ch} c), \quad y(t) = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sh} \tau}, \qquad \pm = \operatorname{sgn} x_1, \qquad \tau = c - t,$$
$$c = \operatorname{arsh}\left(y_1 \sqrt{\alpha^2 - 1}\right), \qquad t_1 = c - \operatorname{arch} \alpha = d(q_1), \qquad \alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{2|x_1| y_1},$$

это дуга гиперболы $(\pm x + \operatorname{ch} c)^2 - y^2 = \operatorname{sh}^2 c$.

Теорема 10. *Пусть для задачи P_3 точка $q_1 = (x_1, y_1) \in J^+ \setminus \{q_0\}$.*

(1) *Если $x_1 = 0$, то $x(t) \equiv 0$, $y(t) = e^t$, $t_1 = \ln y_1$, $d(q_1) = 0$.*

(2) *Если $y_1 = 1$, то $x(t) = t$, $y(t) \equiv 1$, $t_1 = x_1$, $d(q_1) = 0$.*

(3) *Если $x_1 > 0$ и $y_1 > 1$, то $x(t) = c(c - \tau)$, $y(t) = \frac{c}{\tau}$,*

$$\tau = c - t, \qquad c = \sqrt{\frac{x_1 y_1}{y_1 - 1}}, \qquad t_1 = c - \sqrt{\frac{x_1}{y_1(y_1 - 1)}} = d(q_1),$$

это дуга гиперболы $x = c^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right)$.

Автор благодарит А.А. Аграчева, Л.В. Локуциевского и И.А. Тайманова за обсуждение данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R.M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press, 1984. **[2]** J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202*, Marcel Dekker Inc., 1996. **[3]** O. Müller, M. Sànchez, “An Invitation to Lorentzian Geometry”, *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, **115** (2014), 153–183. **[4]** А.О. Иванов, А.А. Тужилин, *Лекции по классической дифференциальной геометрии*, Логос, М., 2009. **[5]** А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005. **[6]** Ю.Л. Сачков, *Введение в геометрическую теорию управления*, URSS, М., 2021. **[7]** И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов, *Линейная алгебра и геометрия*, Физматлит, М., 2009. **[8]** В.Е. Подран, *Модели геометрии Лобачевского*, URSS, М., 2021.

Ю. Л. Сачков
Институт программных систем им.
А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
E-mail: yusachkov@gmail.com

Поступило