Анормальные траектории в субримановой $(2, 3, 5, 8)$-задаче*

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский
e-mail: yusachkov@gmail.com, efsachkova@mail.ru

28 июля 2022 г.

Ключевые слова:
Субриманова геометрия, анормальные траектории, анормальное множество, локальная и глобальная оптимальность.

Аннотация:
Анормальные траектории представляют особый интерес для субримановой геометрии, так как вблизи них субриманова метрика имеет наиболее сложные особенности. Важные открытые вопросы в субримановой геометрии — гладкость анормальных кратчайших и описание множества, заполненного анормальными траекториями, выходящими из фиксированной точки. Так, гипотеза Сарда в субримановой геометрии утверждает, что это множество имеет меру нуль.

В данной работе рассматриваются это и другие родственные свойства указанного множества для левоинвариантной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Исследуется также глобальная и локальная оптимальность анормальных траекторий, получена их явная параметризация.

Содержание

*Е.Ф.Сачковой написаны разделы 1–3, Ю.Л.Сачковым написаны разделы 4–6.
Исследование Е.Ф.Сачковой выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00877, https://rscf.ru/project/22-21-00877/.
Исследование Ю.Л.Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/.

1 Введение

1.1 Субримановы структуры

Субриманова структура на связном гладком многообразии M есть пара (D, g), состоящая из гладкого векторного распределения $D \subset TM$ и скалярного произведения g в D [1–5]. *Горизонтальная кривая* распределения D есть липшицева кривая в M, почти всюду касающаяся этого распределения. По теореме Рашевского-Чжоу, любые две точки в M соединимы горизонтальной кривой тогда и только тогда, когда распределение D имеет полный ранг (в аналитическом случае); то есть флаг из последовательных скобок Ли распределения стабилизируется на касательном расслоении:

$$D \subset D^2 = D + [D, D] \subset D^3 = D^2 + [D^2, D] \subset \cdots \subset D^s = TM.$$

Наименьшее такое s называется *глубиной распределения*, а вектор

$$(\dim D_x, \dim D_x^2, \dots, \dim D_x^s), \qquad x \in M,$$

называется *вектором роста распределения.*

Глубина и вектор роста распределения являются его важнейшими инвариантами. Субримановы структуры стратифицированы по глубине их распределений, и сложность субримановых структур быстро возрастает с увеличением их глубины. Субримановы структуры глубины один — это римановы структуры. Для субримановых структур глубины два в минимальной размерности 3 (то есть для вектора роста $(2, 3)$) имеется детальная теория [3]. Для субримановых структур глубины три имеются подробные исследования лишь в простейшем левоинвариантном случае для размерностей 4, 5 (вектора роста $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$) [20, 24]. Цель данной работы — продолжение исследования простейшего левоинвариантного случая ранга 2 глубины 4 (вектор роста $(2, 3, 5, 8)$), начатое в работах [6–9].

Нарастание сложности субримановых структур с увеличением их глубины можно наблюдать по двум критически важным характеристикам:

- класс функций, в которых интегрируется гамильтонова система принципа максимума Понтрягина для нормальных геодезических,
- структура анормальных траекторий.

Для левоинвариантных субримановых структур на свободных нильпотентных группах Ли ранга 2 ситуация с этими параметрами отражена в таблице 1.

Горизонтальные кривые распределения D, имеющие наименьшую длину в смысле метрики g, называются *кратчайшими* субримановой структуры (D, g). Стандартным подходом к поиску субримановых кратчайших является применение принципа максимума Понтрягина (ПМП) [2,3,10]. Согласно этому принципу, любая субриманова кратчайшая $x(t) \in M$ имеет гамильтонов лифт $\lambda_t \in T^*M$, проецирующийся в $x(t)$, этот лифт λ_t называется *экстремалью.* Как обычно при применении ПМП, экстремали делятся на *нормальные* (зависящие от D и g) и *анормальные* (зависящие только от распределения D). Анормальные экстремали образуют гораздо меньшее

Таблица 1: Свободные нильпотентные субримановы структуры ранга 2

глубина	вектор роста	интегрируемость нормальной гамильтоновой системы ПМП	анормальные траектории
1	(2)	линейные функции	нет
2	$(2,3)$	тригонометрические функции	постоянны
3	$(2,3,5)$	функции Якоби [20]	1-мерное семейство; однопараметрические подгруппы, касающиеся D; все нестрого анормальны [20]
4	$(2,3,5,8)$	неинтегрируема по Лиувиллю [9]	4-мерное семейство; интегрируемы в элем. функциях; п.в. строго анормальные [6–8]

множество чем нормальные, однако большинство сложных вопросов субримановой геометрии связано именно с анормальными экстремалями. Повторим — анормальные экстремали не зависят от метрики g, поэтому правильнее говорить об анормальных экстремалях распределения D; однако проблематика этих экстремалей приобрела особую остроту именно в рамках субримановой геометрии, поэтому мы будем говорить об анормальных экстремалях субримановой структуры (D, g) и применять принцип максимума Понтрягина для их параметризации. Первым, кто отметил особую роль анормальных экстремалей в субримановой геометрии, был Р. Монтгомери [11, 12].

В данной статье исследуются анормальные экстремали для левоинвариантной субримановой структуры с вектором роста $(2,3,5,8)$ — простейшей субримановой структуры глубины 4 ранга 2 (соответствующая 8-мерная группа Ли есть свободная нильпотентная группа Карно глубины 4 с двумя образующими). Она задает нильпотентную аппроксимацию [3, 13] субримановой структуры общего положения в восьмимерном пространстве с двумерным управлением.

1.2 Постановка задачи

Пусть G есть связная односвязная свободная нильпотентная группа Ли ранга 2 глубины 4. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет базис $X_1, \dots, X_8$ с таблицей умножения

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6, \\ &[X_2, X_4] = [X_1, X_5] = X_7, \quad [X_2, X_5] = X_8. \end{aligned}$$

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру [1, 3] на G, заданную ортонормированным репером (X_1, X_2). В этой работе исследуются следующие вопросы для этой субримановой структуры:

1. явная параметризация анормальных траекторий распределения $D = \operatorname{span}(X_1, X_2)$,

2. структура множества в G, заполненного анормальными траекториями, выходящими из единицы группы G,

3. локальная и глобальная оптимальность анормальных траекторий.

Указанная субриманова структура единственна с точностью до автоморфизма группы G. Она имеет вектор роста $(2,3,5,8)$, будем называть ее *субримановой* $(2,3,5,8)$*-структурой*. Кратчайшие этой структуры суть решения задачи оптимального управления

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \qquad x \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$x(0) = x^0 = \mathrm{Id}, \quad x(t_1) = x^1, \tag{2}$$

$$l = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min, \tag{3}$$

будем называть ее *субримановой* $(2,3,5,8)$*-задачей*.

1.3 Модель

Будем использовать следующую модель субримановой $(2,3,5,8)$-структуры:

$$G \simeq \mathbb{R}^8_{x_1,\dots,x_8}, \tag{4}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{5}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{6}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + x_1 x_2\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{7}$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1\frac{\partial}{\partial x_6} + x_2\frac{\partial}{\partial x_7}, \qquad X_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} + x_1\frac{\partial}{\partial x_7} + x_2\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{8}$$

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial x_6}, \qquad X_7 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \qquad X_8 = \frac{\partial}{\partial x_8}. \tag{9}$$

1.4 Геометрический смысл задачи

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_8(t))$, $t \in [0, t_1]$, есть траектория системы (1) с граничными условиями (2), в модели (4)–(6). Пусть $x^1 = (x_1^1, \dots, x_8^1)$. Рассмотрим область $E \subset \mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$, ограниченную кривой $(x_1, x_2)(t)$, $t \in [0, t_1]$, и радиус-вектором точки (x_1^1, x_2^1). Определим для этой области величины:

$$\text{площадь } S = \int_E dx_1\, dx_2,$$

статические моменты относительно осей x_1 и x_2

$$M_1 = \int_E x_2\ dx_1\, dx_2, \qquad M_2 = \int_E x_1\ dx_1\, dx_2,$$

моменты инерции второго порядка относительно осей x_1 и x_2

$$J_1 = \int_E x_2^2 \, dx_1 \, dx_2, \qquad J_2 = \int_E x_1^2 \, dx_1 \, dx_2,$$

центробежный момент

$$K_{12} = \int_E x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2.$$

Теорема 1. *Координаты конечной точки $x^1 = (x_1^1, \dots, x_8^1)$ имеют следующий геометрический смысл для области E:*

$$S = x_3^1, \qquad M_1 = x_5^1 + \frac{1}{6} x_1^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2), \qquad M_2 = x_4^1 - \frac{1}{6} x_2^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2),$$

$$J_1 = 2x_8^1 + \frac{1}{12} x_1^1 (x_2^1)^3, \qquad J_2 = 2x_6^1 - \frac{1}{12} (x_1^1)^3 x_2^1, \qquad K_{12} = x_7^1.$$

Доказательство. Формула Стокса. □

Если $S \neq 0$, то область E имеет центр масс (c_1, c_2), где $c_1 = \frac{M_2}{S}$, $c_2 = \frac{M_1}{S}$.

1.5 Структура работы

В разделе 2 описаны полученные в работах [6–9] результаты по субримановой $(2, 3, 5, 8)$-задаче: неинтегриуремость нормального геодезического потока, симметрии, описание различных классов анормальных экстремалей. В частности, указывается, что все анормальные экстремали делятся на два класса:

- хорошие (nice), параметризуемые некоторым (анормальным) гамильтоновым полем на аннуляторе квадрата распределения — потому аналитические,

- асимптотические, включающие в себя негладкие с особенностями типа угловой точки.

В разделе 3 приведена явная параметризация хороших анормальных экстремалей полиномиальными, тригонометрическими и гиперболическими функциями. Для этого интегрируется анормальное гамильтоново поле.

Раздел 4 посвящен исследованию анормального множества Abn — множества точек в группе G, принадлежащих анормальным траекториям, проходящим через единичный элемент. Доказано, что множество Abn незамкнуто, неполуалгебраично, негладко, но является 5-мерным субаналитическим множеством. Аналогичные свойства исследованы для множеств, заполненных асимптотическими анормальными траекториями и некоторыми естественными подклассами хороших анормальных траекторий. Используется параметризация хороших и асимптотических траекторий, а также геометрический смысл задачи.

Наконец, в разделе 5 исследуется глобальная и локальная оптимальность анормальных траекторий. Негладкие анормальные траектории (в частности, асимптотические) неоптимальны после особенности. Гладкие анормальные экстремальные траектории суть геодезические. Описаны анормальные метрические прямые (геодезические, оптимальные на любом конечном отрезке) — это в точности однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения. Для части хороших анормальных траекторий доказана конечность времени разреза (времени потери оптимальности). Для анормальных траекторий, проецирующихся на плоскость распределения в окружности, доказано отсутствие сопряженных точек, поэтому локальная оптимальность на любом конечном отрезке. Применяются результаты Э. Ле Донне и Э. Хакавуори [16, 17] о сжатиях (blow-down) метрических промежутков, а также теория сопряженных точек на хороших анормальных экстремалях [3].

В заключительном разделе 6 подводятся итоги работы.

2 Полученные ранее результаты

Опишем полученные в работах [6–9] результаты по субримановой $(2, 3, 5, 8)$-задаче.

Нормальный геодезический поток для этой задачи неинтегрируем по Лиувиллю [9].

2.1 Симметрии

В работе [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Векторные поля X_0, Y являются инфинитезимальными симметриями распределения D, где*

$$X_0 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_5 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_5} + P \frac{\partial}{\partial x_6} + Q \frac{\partial}{\partial x_7} + R \frac{\partial}{\partial x_8}, \qquad (10)$$

$$P = \frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^2 x_2^2}{8} - x_7,$$

$$Q = -\frac{x_1 x_2^3}{12} - \frac{x_1^3 x_2}{12} + 2x_6 - 2x_8,$$

$$R = -\frac{x_1^2 x_2^2}{8} + \frac{x_2^4}{24} + x_7,$$

$$Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + 3x_5 \frac{\partial}{\partial x_5} + 4x_6 \frac{\partial}{\partial x_6} + {}$$
$$+ 4x_7 \frac{\partial}{\partial x_7} + 4x_8 \frac{\partial}{\partial x_8}. \qquad (11)$$

2.2 Характеризация анормальных экстремалей

Обозначим $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1. \dots, 8$, $\lambda \in T^*G$. В работе [8] следующее утверждение получено из принципа максимума Понтрягина [2, 10].

Теорема 3. *Липшицева кривая $\lambda \in \mathrm{Lip}([0, t_1], T^*G)$ является анормальной экстремалью тогда и только тогда, когда существует управление $u \in$*

$L^\infty([0,t_1],\mathbb{R}^2)$, *такое, что:*

$$\begin{aligned}
&\lambda_t \neq 0,\\
&h_1 = h_2 = h_3 = 0,\\
&u_1 h_4 + u_2 h_5 = 0,\\
&\begin{pmatrix} \dot h_4 \\ \dot h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0,
\end{aligned}$$

соответствующая анормальная траектория $x(t) = \pi(\lambda_t)$, $\pi : T^*G \to G$, *удовлетворяет уравнению* (1).

2.3 Хорошие анормальные траектории

В случае $(h_4^2 + h_5^2)(\lambda_t) \neq 0$ анормальная экстремаль λ_t называется *хорошей* (nice) [2, 3]. В этом случае, с точностью до перепараметризации времени, $u_1 = -h_5$, $u_2 = h_4$, соответствующие экстремали являются траекториями *анормального векторного поля* $\vec{A} = -h_5\vec{h}_1 + h_4\vec{h}_2$, а траектории задаются *анормальным экспоненциальным отображением* $\mathrm{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{A}}(\lambda)$. Проекции хороших экстремалей на плоскость (x_1, x_2) суть линии первого или второго порядка (прямые, эллипсы, гиперболы, параболы).

2.4 Асимптотические анормальные траектории

В случае, когда $(h_4^2+h_5^2)(\lambda_t)$ обращается в нуль при некоторых t, для описания анормального множества достаточно рассмотреть кусочно-постоянные управления с не более чем одним переключением. Соответствующие траектории имеют вид

$$x(t) = \begin{cases} e^{t(u_1X_1+u_2X_2)}, & t \in [0,\bar t], \quad \bar t \geqslant 0,\\ e^{(t-\bar t)(v_1X_1+v_2X_2)} \circ e^{\bar t(u_1X_1+u_2X_2)}, & t \geqslant \bar t. \end{cases}$$

При $\bar t > 0$ такие траектории имеют угловую точку и ветвятся при $t = \bar t$, каждая такая траектория проецируется на плоскость (x_1, x_2) в пересечение двух непараллельных прямых. При $\bar t = 0$ такие траектории называются *вырожденными*, они проецируются на плоскость (x_1, x_2) в прямые [6].

3 Параметризация анормальных экстремалей

3.1 Задача Коши для хороших анормальных экстремалей

В этом разделе приведена параметризация траекторий λ_t анормального векторного поля:

$$\dot\lambda_t = \vec{A}(\lambda_t) = (-h_5\vec{h}_1 + h_4\vec{h}_2)(\lambda_t), \qquad \lambda_t \in (\Delta^2)^\perp, \tag{12}$$

$$\lambda_0 \in \mathfrak{g}^* \cap (\Delta^2)^\perp. \tag{13}$$

В случае
$$\lambda_0 \in (D^2)^\perp \setminus (D^3)^\perp \iff (h_4^2 + h_5^2)(\lambda_0) \neq 0$$
кривая $\lambda_t = e^{t\vec{A}}(\lambda_0)$ есть хорошая анормальная экстремаль, а в случае $\lambda_0 \in (D^3)^\perp$ такая траектория постоянна. В координатах задача Коши (12), (13) записывается следующим образом:

$$\dot h_4 = h_7 h_4 - h_6 h_5, \qquad \dot h_5 = h_8 h_4 - h_7 h_5, \qquad \dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0, \tag{14}$$
$$\dot x_1 = -h_5, \qquad \dot x_2 = h_4, \qquad \dot x_3 = \frac{x_2}{2} h_5 + \frac{x_1}{2} h_4, \tag{15}$$
$$\dot x_4 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} h_4, \qquad \dot x_5 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} h_5, \tag{16}$$
$$\dot x_6 = \frac{x_1^3}{6} h_4, \qquad \dot x_7 = \frac{x_1 x_2^2}{4} h_5 + \frac{x_1^2 x_2}{4} h_4, \qquad \dot x_8 = \frac{x_2^3}{6} h_5, \tag{17}$$
$$h_4(0) = h_4^0, \qquad h_5(0) = h_5^0, \qquad x(0) = 0. \tag{18}$$

Первые два дифференциальных уравнения в (14) представляют собой линейную систему ОДУ относительно h_4, h_5 с постоянными коэффициентами h_6, h_7, h_8, поэтому их решения выражаются через линейные, тригонометрические и гиперболические функции времени. Следовательно, ОДУ (15)–(17) интегрируются в полиномах, тригонометрических и гиперболических функциях. Их явный вид приведен далее в пп. 3.2–3.5.

Введем обозначения:
$$\Delta = h_6 h_8 - h_7^2, \qquad \delta = \sqrt{|\Delta|}, \qquad \mathbf{h} = (h_4,\, h_5)^T,$$
$$I = h_8 h_4^2 - 2 h_7 h_4 h_5 + h_6 h_5^2,$$
$$C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} h_4^0 & \dot h_4^0/\delta \\ h_5^0 & \dot h_5^0/\delta \end{pmatrix} \text{ при } \Delta \neq 0.$$

Функция I, наряду с Казимирами h_6, h_7, h_8, есть интеграл рассматриваемой системы [8].

3.2 Эллиптический случай $\Delta > 0$

3.2.1 Общий эллиптический случай $I \neq 0$

Условие $I \neq 0$ равносильно неравенству $(h_4^0, h_5^0) \neq (0,0)$.

В этом случае кривая $\mathbf{h}(t)$ есть эллипс с центром в начале координат:
$$\begin{pmatrix} h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \cos\delta t \\ \sin\delta t \end{pmatrix}.$$

$$x_1(t) = -\frac{C_0^1 + C_1^1 \cos(\delta t) + S_1^1 \sin(\delta t)}{\Delta},$$
$$C_0^1 = h_8 h_4^0 - h_7 h_5^0, \quad C_1^1 = -h_8 h_4^0 + h_7 h_5^0, \quad S_1^1 = \delta h_5^0.$$

$$x_2(t) = \frac{C_0^2 + C_1^2 \cos(\delta t) + S_1^2 \sin(\delta t)}{\Delta},$$
$$C_0^2 = -h_6 h_5^0 + h_7 h_4^0, \quad C_1^2 = h_6 h_5^0 - h_7 h_4^0, \quad S_1^2 = \delta h_4^0.$$

$$x_3(t) = \frac{I}{2\delta^3}(\delta t - \sin(\delta t)).$$

$$\begin{aligned}
x_4(t) &= \frac{1}{24\Delta^3}\left(C_0^4 + L^4 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^4\cos(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^4\sin(j\delta t)\right),\\
C_0^4 &= 2I\left(5h_7(h_6+h_8)h_4^0 - (5h_6(h_6+h_8)+\Delta)h_5^0\right)\\
&\quad - 4\Delta\left(h_7(h_4^0)^3 + h_7h_4^0(h_5^0)^2 - h_6(h_4^0)^2h_5^0 - h_6(h_5^0)^3\right),\\
L^4 &= -12\Delta I\left(h_8h_4^0 - h_7h_5^0\right),\\
C_1^4 &= -3I\left(5h_7(h_6+h_8)h_4^0 - (5h_6(h_6+h_8)+2\Delta)h_5^0\right) + 12\Delta\left(h_7(h_4^0)^3 + h_7h_4^0(h_5^0)^2\right.\\
&\quad \left.-h_6(h_4^0)^2h_5^0 - h_6(h_5^0)^3\right),\\
C_2^4 &= 6I(h_6+h_8)\left(h_7h_4^0 - h_6h_5^0\right) - 6\Delta\left(2h_7(h_4^0)^3 + (h_8-2h_6)(h_4^0)^2h_5^0 - h_6(h_5^0)^3\right),\\
C_3^4 &= I(h_6+h_8)\left(h_6h_5^0 - h_7h_4^0\right) + 2\Delta\left(2h_7(h_4^0)^3 + (h_8-2h_6)(h_4^0)^2h_5^0 - h_6(h_5^0)^3\right),\\
S_1^4 &= 3\delta\left(I\left((5h_6+7h_8)h_4^0 - 2h_7h_5^0\right) - 4\Delta\left((h_4^0)^3 + h_4^0(h_5^0)^2\right)\right),\\
S_2^4 &= -6\delta\left(I(h_6+h_8)h_4^0 + (2h_7^2 - h_6h_8)(h_4^0)^3 - h_6(2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2\right.\\
&\quad \left.+h_7(h_8-2h_6)(h_4^0)^2h_5^0 + h_6h_7(h_5^0)^3\right),\\
S_3^4 &= \delta\left(I(h_6+h_8)h_4^0 - 2\left((h_6h_8 - 2h_7^2)(h_4^0)^3 + h_6(2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+h_7(2h_6-h_8)(h_4^0)^2h_5^0 - h_6h_7(h_5^0)^3\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5(t) &= \frac{1}{24\Delta^3}\left(C_0^5 + L^5 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^5\cos(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^5\sin(j\delta t)\right),\\
C_0^5 &= 2I\left((5h_8(h_6+h_8)+\Delta)h_4^0 - 5h_7(h_6+h_8)h_5^0\right)\\
&\quad - 4\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 + h_8h_4^0(h_5^0)^2 - h_7(h_4^0)^2h_5^0 - h_7(h_5^0)^3\right),\\
L^5 &= 12\Delta I\left(h_7h_4^0 - h_6h_5^0\right),\\
C_1^5 &= -3I\left((5h_8(h_6+h_8)+2\Delta)h_4^0 - 5h_7(h_6+h_8)h_5^0\right)\\
&\quad + 12\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 + h_8h_4^0(h_5^0)^2 - h_7(h_4^0)^2h_5^0 - h_7(h_5^0)^3\right),\\
C_2^5 &= 6I(h_6+h_8)\left(h_8h_4^0 - h_7h_5^0\right) - 6\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 + (2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right),\\
C_3^5 &= I(h_6+h_8)\left(h_7h_5^0 - h_8h_4^0\right) + 2\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 + (2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right),\\
S_1^5 &= 3\delta\left(I\left((7h_6+5h_8)h_5^0 - 2h_7h_4^0\right) - 4\Delta h_5^0\left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2\right)\right),\\
S_2^5 &= -6\delta\left(I(h_6+h_8)h_5^0 + h_7h_8(h_4^0)^3 - h_7(2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2\right.\\
&\quad \left.+h_8(h_8-2h_6)(h_4^0)^2h_5^0 + (2h_7^2 - h_6h_8)(h_5^0)^3\right),\\
S_3^5 &= \delta\left(I(h_6+h_8)h_5^0 + 2(h_7h_8(h_4^0)^3 - h_7(2h_8-h_6)h_4^0(h_5^0)^2\right.\\
&\quad \left.+h_8(h_8-2h_6)(h_4^0)^2h_5^0 + (2h_7^2 - h_6h_8)(h_5^0)^3)\right).
\end{aligned}$$

$$x_6(t) = -\frac{1}{192\Delta^4}\left(C_0^6 + L^6 t + \sum_{j=1}^{4} C_j^6 \cos(j\delta t) + \sum_{j=1}^{4} S_j^6 \sin(j\delta t)\right),$$

$$C_0^6 = 35h_7h_8I^2 + 20\Delta h_7 I(h_5^0)^2 - 60\Delta h_8 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2 h_4^0 (h_5^0)^3,$$

$$L^6 = -12\Delta I\left(5h_8 I - 4\Delta(h_5^0)^2\right),$$

$$C_1^6 = -8\left(7h_7h_8I^2 + 2\Delta h_7 I(h_5^0)^2 - 13\Delta h_8 I h_4^0 h_5^0 + 4\Delta^2 h_4^0 (h_5^0)^3\right),$$

$$C_2^6 = 4\left(7h_7h_8I^2 - 4\Delta h_7 I(h_5^0)^2 - 16\Delta h_8 I h_4^0 h_5^0 + 12\Delta^2 h_4^0 (h_5^0)^3\right),$$

$$C_3^6 = -8\left(h_7h_8I^2 - 2\Delta h_7 I(h_5^0)^2 - 3\Delta h_8 I h_4^0 h_5^0 + 4\Delta^2 h_4^0 (h_5^0)^3\right),$$

$$C_4^6 = h_7h_8I^2 - 4\Delta h_7 I(h_5^0)^2 - 4\Delta h_8 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2 h_4^0 (h_5^0)^3,$$

$$S_1^6 = 8\delta\left(13h_8^2 I(h_4^0)^2 - 19h_7h_8 I h_4^0 h_5^0 + 6h_7^2 I(h_5^0)^2 - 4\Delta h_8 (h_4^0)^2 (h_5^0)^2 + 4\Delta h_7 h_4^0 (h_5^0)^3\right),$$

$$S_2^6 = -8\delta\left(4h_8^2 I(h_4^0)^2 - h_7h_8 I h_4^0 h_5^0 - 3h_6h_8 I(h_5^0)^2 + 2\Delta h_7 h_4^0 (h_5^0)^3 - 4\Delta h_8 (h_4^0)^2 (h_5^0)^2 + 2\Delta h_6 (h_5^0)^4\right),$$

$$S_3^6 = 8\delta\left(h_8^2 I(h_4^0)^2 + h_7h_8 I h_4^0 h_5^0 - 2h_7^2 I(h_5^0)^2 - 4\Delta h_8 (h_4^0)^2 (h_5^0)^2 + 4\Delta h_7 h_4^0 (h_5^0)^3\right),$$

$$S_4^6 = \delta\left(-h_8^2 I(h_4^0)^2 - 2h_7h_8 I h_4^0 h_5^0 + 3h_6h_8 I(h_5^0)^2 + 4\Delta h_8 (h_4^0)^2 (h_5^0)^2 - 4\Delta h_6 (h_5^0)^4\right).$$

$$x_7(t) = -\frac{I}{48\delta^7}\left(C_0^7 + L^7 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^7 \cos(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^7 \sin(j\delta t)\right),$$

$$C_0^7 = 10\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2)\right), \qquad L^7 = 6\delta\left(5h_7 I - 4\Delta h_4^0 h_5^0\right),$$

$$C_1^7 = -15\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2)\right), \qquad C_2^7 = 6\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right),$$

$$C_3^7 = -\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right), \qquad S_1^7 = -3\left(15h_7 I - 14\Delta h_4^0 h_5^0\right),$$

$$S_2^7 = 3\left(3h_7 I - 4\Delta h_4^0 h_5^0\right), \qquad S_3^7 = -h_7 I + 2\Delta h_4^0 h_5^0.$$

$$x_8(t) = \frac{1}{192\Delta^4}\left(C_0^8 + L^8 t + \sum_{j=1}^{4} C_j^8 \cos(j\delta t) + \sum_{j=1}^{4} S_j^8 \sin(j\delta t)\right),$$

$$C_0^8 = 35h_6h_7I^2 + 20\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 60\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2 (h_4^0)^3 h_5^0,$$

$$L^8 = 12\Delta I\left(5h_6 I - 4\Delta(h_4^0)^2\right),$$

$$C_1^8 = -8\left(7h_6h_7I^2 + 2\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 13\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 4\Delta^2 (h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_2^8 = 4\left(7h_6h_7I^2 - 4\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 16\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 12\Delta^2 (h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_3^8 = 8\left(-h_6h_7I^2 + 2\Delta h_7 I(h_4^0)^2 + 3\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 - 4\Delta^2 (h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_4^8 = h_6h_7I^2 - 4\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 4\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2 (h_4^0)^3 h_5^0,$$

$$S_1^8 = 8\delta\left(I\left(-6(h_7)^2(h_4^0)^2 + 19h_6h_7h_4^0h_5^0 - 13(h_6)^2(h_5^0)^2\right) - 4\Delta\left(h_7(h_4^0)^3h_5^0 - h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_2^8 = -8\delta\left(h_6 I\left(3h_8(h_4^0)^2 + h_7h_4^0h_5^0 - 4h_6(h_5^0)^2\right) - 2\Delta\left(h_8(h_4^0)^4 + h_7(h_4^0)^3h_5^0 - 2h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_3^8 = 8\delta\left(I\left(2h_7^2(h_4^0)^2 - h_6h_7h_4^0h_5^0 - (h_6)^2(h_5^0)^2\right) - 4\Delta\left(h_7(h_4^0)^3h_5^0 - h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_4^8 = \delta\left(h_6 I\left(-3h_8(h_4^0)^2 + 2h_7h_4^0h_5^0 + h_6(h_5^0)^2\right) + 4\Delta\left(-h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2 + h_8(h_4^0)^4\right)\right).$$

Кривая $(x_1(t), x_2(t))$ есть эллипс.

3.2.2 Специальный эллиптический случай $I = 0$

Условие $I = 0$ равносильно равенству $(h_4^0, h_5^0) = (0, 0)$. В этом случае $\mathbf{h}(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv 0$.

3.3 Гиперболический случай $\Delta < 0$

3.3.1 Общий гиперболический случай $I \neq 0$

В этом случае $\mathbf{h}(t)$ есть ветвь гиперболы с центром в начале координат:

$$\begin{pmatrix} h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \delta t \\ \operatorname{sh} \delta t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\Delta} \left(C_0^1 + C_1^1 \operatorname{ch}(\delta t) + S_1^1 \operatorname{sh}(\delta t) \right), \\ C_0^1 &= -h_8 h_4^0 + h_7 h_5^0, \quad C_1^1 = h_8 h_4^0 - h_7 h_5^0, \quad S_1^1 = \delta h_5^0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{\Delta} \left(C_0^2 + C_1^2 \operatorname{ch}(\delta t) + S_1^2 \operatorname{sh}(\delta t) \right), \\ C_0^2 &= h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0, \quad C_1^2 = -h_7 h_4^0 + h_6 h_5^0, \quad S_1^2 = -\delta h_4^0. \end{aligned}$$

$$x_3(t) = \frac{I}{2\Delta^2} (\Delta t + \delta \operatorname{sh}(\delta t)).$$

$$\begin{aligned} x_4(t) &= \frac{1}{24\Delta^3} \left(C_0^4 + L^4 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^4 \operatorname{ch}(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^4 \operatorname{sh}(j\delta t) \right), \\ C_0^4 &= -2 \left(5I(h_6 + h_8)(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0) - \Delta \left(2h_7 (h_4^0)^3 + (h_8 - 2h_6)(h_4^0)^2 h_5^0 - h_6 (h_5^0)^3 \right) \right), \\ L^4 &= 12\Delta I (h_8 h_4^0 - h_7 h_5^0), \\ C_1^4 &= 3 \left(5I(h_6 + h_8) \left(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0 \right) - 2\Delta \left(2h_7 (h_4^0)^3 + (h_8 - 2h_6)(h_4^0)^2 h_5^0 - h_6 (h_5^0)^3 \right) \right), \\ C_2^4 &= -6 \left(I(h_6 + h_8) \left(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0 \right) - \Delta \left(2h_7 (h_4^0)^3 + (h_8 - 2h_6)(h_4^0)^2 h_5^0 - h_6 (h_5^0)^3 \right) \right), \\ C_3^4 &= I(h_6 + h_8) \left(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0 \right) - 2\Delta \left(2h_7 (h_4^0)^3 + (h_8 - 2h_6)(h_4^0)^2 h_5^0 - h_6 (h_5^0)^3 \right), \\ S_1^4 &= 3\delta \left(I \left((5h_6 + 7h_8) h_4^0 - 2h_7 h_5^0 \right) - 4\Delta h_4^0 \left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \right) \right), \\ S_2^4 &= -6\delta \left(I \left((2h_6 + h_8) h_4^0 + h_7 h_5^0 \right) - 2\Delta h_4^0 \left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \right) \right), \\ S_3^4 &= \delta \left(I \left((3h_6 + h_8) h_4^0 + 2h_7 h_5^0 \right) - 4\Delta h_4^0 \left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

$$x_5(t) = \frac{1}{24\Delta^3}\left(C_0^5 + L^5 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^5 \operatorname{ch}(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^5 \operatorname{sh}(j\delta t)\right),$$
$$C_0^5 = 2\left(5I(h_6+h_8)\left(-h_8h_4^0 + h_7h_5^0\right) + \Delta\left(h_8(h_4^0)^3 - (h_6-2h_8)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right)\right),$$
$$L^5 = 12\Delta I\left(-h_7h_4^0 + h_6h_5^0\right),$$
$$C_1^5 = -3\left(5I(h_6+h_8)(-h_8h_4^0 + h_7h_5^0) + 2\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 - (h_6-2h_8)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right)\right),$$
$$C_2^5 = 6\left(I(h_6+h_8)\left(-h_8h_4^0 + h_7h_5^0\right) + \Delta\left(h_8(h_4^0)^3 - (h_6-2h_8)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right)\right),$$
$$C_3^5 = -I(h_6+h_8)\left(-h_8h_4^0 + h_7h_5^0\right) - 2\Delta\left(h_8(h_4^0)^3 - (h_6-2h_8)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3\right),$$
$$S_1^5 = -3\delta\left(I\left(2h_7h_4^0 - (7h_6+5h_8)h_5^0\right) + 4\Delta h_5^0\left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2\right)\right),$$
$$S_2^5 = 6\delta\left(-I\left(h_7h_4^0 + (h_6+2h_8)h_5^0\right) + 2\Delta h_5^0\left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2\right)\right),$$
$$S_3^5 = \delta\left(I\left(2h_7h_4^0 + (h_6+3h_8)h_5^0\right) - 4\Delta h_5^0\left((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2\right)\right).$$

$$x_6(t) = -\frac{1}{192\Delta^4}\left(C_0^6 + L^6 t + \sum_{j=1}^{4} C_j^6 \operatorname{ch}(j\delta t) + \sum_{j=1}^{4} S_j^6 \operatorname{sh}(j\delta t)\right),$$
$$C_0^6 = 35h_7h_8I^2 + 20\Delta I(h_7(h_5^0)^2 - 3h_8h_4^0h_5^0) + 8\Delta^2 h_4^0(h_5^0)^3,$$
$$L^6 = 12\Delta I\left(-5Ih_8 + 4\Delta(h_5^0)^2\right),$$
$$C_1^6 = -8\left(7h_7h_8I^2 + \Delta I(2h_7(h_5^0)^2 - 13h_8h_4^0h_5^0) + 4\Delta^2 h_4^0(h_5^0)^3\right),$$
$$C_2^6 = 4\left(7h_7h_8I^2 - 4\Delta I(h_7(h_5^0)^2 + 4h_8h_4^0h_5^0) + 12\Delta^2 h_4^0(h_5^0)^3\right),$$
$$C_3^6 = -8\left(h_7h_8I^2 - \Delta I(2h_7(h_5^0)^2 + 3h_8h_4^0h_5^0) + 4\Delta^2 h_4^0(h_5^0)^3\right),$$
$$C_4^6 = h_7h_8I^2 - 4\Delta I\left(h_7(h_5^0)^2 + h_8h_4^0h_5^0\right) + 8\Delta^2 h_4^0(h_5^0)^3,$$
$$S_1^6 = 8\delta\left(h_8h_4^0 - h_7h_5^0\right)\left(I(6h_7h_5^0 - 13h_8h_4^0) + 4\Delta h_4^0(h_5^0)^2\right),$$
$$S_2^6 = -8\delta\left(I\left(-4h_8^2(h_4^0)^2 + h_7h_8h_4^0h_5^0 + 3h_6h_8(h_5^0)^2\right) - 2\Delta\left(h_7h_4^0(h_5^0)^3 - 2h_8(h_4^0)^2(h_5^0)^2 + h_6(h_5^0)^4\right)\right),$$
$$S_3^6 = -8\delta\left(h_8h_4^0 - h_7h_5^0\right)\left(I(2h_7h_5^0 + h_8h_4^0) - 4\Delta h_4^0(h_5^0)^2\right),$$
$$S_4^6 = \delta\left(I\left(h_8^2(h_4^0)^2 + 2h_7h_8h_4^0h_5^0 - 3h_7^2(h_5^0)^2\right) + \Delta\left(6h_7h_4^0(h_5^0)^3 - 7h_8(h_4^0)^2(h_5^0)^2 + h_6(h_5^0)^4\right)\right).$$

$$x_7(t) = -\frac{I}{48\delta^7}\left(C_0^7 + L^7 t + \sum_{j=1}^{3} C_j^7 \operatorname{ch}(j\delta t) + \sum_{j=1}^{3} S_j^7 \operatorname{sh}(j\delta t)\right),$$
$$C_0^7 = 10\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right), \quad L^7 = 6\delta\left(5h_7I - 4\Delta h_4^0h_5^0\right),$$
$$C_1^7 = -15\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right), \quad C_2^7 = 6\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right),$$
$$C_3^7 = -\delta\left(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2\right), \quad S_1^7 = -3\left(15h_7I - 14\Delta h_4^0h_5^0\right),$$
$$S_2^7 = 3\left(3h_7I - 4\Delta h_4^0h_5^0\right), \quad S_3^7 = -h_7I + 2\Delta h_4^0h_5^0.$$

$$x_8(t) = \frac{1}{192\Delta^4}\left(C_0^8 + L^8 t + \sum_{j=1}^4 C_j^8 \operatorname{ch}(j\delta t) + \sum_{j=1}^4 S_j^8 \operatorname{sh}(j\delta t)\right),$$

$$C_0^8 = 35h_6h_7I^2 + 20\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 60\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2(h_4^0)^3 h_5^0,$$

$$L^8 = 12\Delta I\left(5h_6 I - 4\Delta(h_4^0)^2\right),$$

$$C_1^8 = -8\left(7h_6h_7I^2 + 2\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 13\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 4\Delta^2(h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_2^8 = 4\left(7h_6h_7I^2 - 4\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 16\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 12\Delta^2(h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_3^8 = 8\left(-h_6h_7I^2 + 2\Delta h_7 I(h_4^0)^2 + 3\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 - 4\Delta^2(h_4^0)^3 h_5^0\right),$$

$$C_4^8 = h_6h_7I^2 - 4\Delta h_7 I(h_4^0)^2 - 4\Delta h_6 I h_4^0 h_5^0 + 8\Delta^2(h_4^0)^3 h_5^0,$$

$$S_1^8 = 8\delta\left(I\left(-6(h_7)^2(h_4^0)^2 + 19h_6h_7h_4^0h_5^0 - 13(h_6)^2(h_5^0)^2\right) - 4\Delta\left(h_7(h_4^0)^3h_5^0 - h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_2^8 = -8\delta\left(h_6 I\left(3h_8(h_4^0)^2 + h_7h_4^0h_5^0 - 4h_6(h_5^0)^2\right) - 2\Delta\left(h_8(h_4^0)^4 + h_7(h_4^0)^3h_5^0 - 2h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_3^8 = 8\delta\left(I\left(2h_7^2(h_4^0)^2 - h_6h_7h_4^0h_5^0 - (h_6)^2(h_5^0)^2\right) - 4\Delta\left(h_7(h_4^0)^3h_5^0 - h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2\right)\right),$$

$$S_4^8 = \delta\left(h_6 I\left(-3h_8(h_4^0)^2 + 2h_7h_4^0h_5^0 + h_6(h_5^0)^2\right) + 4\Delta\left(-h_6(h_4^0)^2(h_5^0)^2 + h_8(h_4^0)^4\right)\right).$$

Кривая $(x_1(t), x_2(t))$ есть ветвь гиперболы.

3.3.2 Асимптотический гиперболический случай $I = 0$, $(h_4^0, h_5^0) \neq (0,0)$

В этом случае выполнены равенства

$$\begin{pmatrix} h_4^0 \\ h_5^0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} h_7 \pm \delta \\ h_8 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} h_6 \\ h_7 \mp \delta \end{pmatrix}, \qquad kl \neq 0.$$

Обозначим соответственно $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha = \pm\delta$.

Линия $\mathbf{h}(t)$ есть луч, стремящийся к бесконечности в случае $\varepsilon = 1$ (к началу координат в случае $\varepsilon = -1$) при $t \to +\infty$:

$$h_4(t) = h_4^0 e^{\alpha t}, \qquad h_5(t) = h_5^0 e^{\alpha t}.$$

$$x_1(t) = \frac{\alpha h_5^0}{\Delta}\left(e^{\alpha t} - 1\right),$$

$$x_2(t) = \frac{\alpha h_4^0}{\Delta}\left(1 - e^{\alpha t}\right),$$

$$x_3(t) \equiv 0,$$

$$x_4(t) = \frac{\alpha h_4^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2)}{6\Delta^2}\left(e^{\alpha t} - 1\right)^3,$$

$$x_5(t) = \frac{\alpha h_5^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2)}{6\Delta^2}\left(e^{\alpha t} - 1\right)^3,$$

$$x_6(t) = -\frac{h_4^0(h_5^0)^3}{24\Delta^2}\left(e^{\alpha t} - 1\right)^4,$$

$$x_7(t) \equiv 0,$$

$$x_8(t) = \frac{(h_4^0)^3 h_5^0}{24\Delta^2}\left(e^{\alpha t} - 1\right)^4.$$

Кривая $(x_1(t), x_2(t))$ есть луч.

3.3.3 Специальный гиперболический случай $(h_4^0, h_5^0) = (0,0)$

В этом случае $\mathbf{h}(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv 0$.

3.4 Параболический случай $\Delta = 0$, $C \neq 0$

3.4.1 Общий параболический случай $I \neq 0$

В этом случае $\mathbf{h}(t)$ есть прямая:

$$\mathbf{h}(t) = (Ct + \mathrm{Id})\mathbf{h}^0.$$

$$\begin{aligned}
&x_1(t) = L_1^1 t + L_2^1 t^2, \\
&L_1^1 = -h_5^0, \quad L_2^1 = -\frac{1}{2}(h_8 h_4^0 - h_7 h_5^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_2(t) = L_1^2 t + L_2^2 t^2, \\
&L_1^2 = h_4^0, \qquad L_2^2 = \frac{1}{2}(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_3(t) = L_3^3 t^3, \\
&L_3^3 = \frac{I}{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_4(t) = \sum_{n=3}^{6} L_n^4 t^n, \\
&L_3^4 = \frac{1}{6} h_4^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2), \quad L_4^4 = \frac{1}{8}(2h_7(h_4^0)^3 - (2h_6 - h_8)(h_4^0)^2 h_5^0 - h_6(h_5^0)^3), \\
&L_5^4 = \frac{1}{40}(h_8(5h_6 + h_8)(h_4^0)^3 - 2h_7(5h_6 - h_8)(h_4^0)^2 h_5^0 + h_6(5h_6 - 7h_8)h_4^0(h_5^0)^2 + 4h_6 h_7 (h_5^0)^3), \\
&L_6^4 = \frac{1}{48}(h_7 h_4^0 - h_6 h_5^0)(h_6 + h_8) I,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_5(t) = \sum_{n=3}^{6} L_n^5 t^n, \\
&L_3^5 = \frac{1}{6} h_5^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2), \quad L_4^5 = \frac{1}{8}(h_8(h_4^0)^3 - (h_6 - 2h_8)h_4^0(h_5^0)^2 - 2h_7(h_5^0)^3), \\
&L_5^5 = \frac{1}{40}(4h_7 h_8 (h_4^0)^3 - h_8(7h_6 - 5h_8)(h_4^0)^2 h_5^0 + 2h_7(h_6 - 5h_8)h_4^0(h_5^0)^2 + h_6(h_6 + 5h_8)(h_5^0)^3), \\
&L_6^5 = \frac{1}{48}(h_8 h_4^0 - h_7 h_5^0)(h_6 + h_8) I,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&x_6(t) = \sum_{n=4}^{8} L_n^6 t^n,\\
&L_4^6 = -\frac{1}{24}h_4^0(h_5^0)^3, \quad L_5^6 = -\frac{1}{60}(h_5^0)^2(3h_8(h_4^0)^2 - h_7h_4^0h_5^0 - 2h_6(h_5^0)^2),\\
&L_6^6 = -\frac{1}{48}h_5^0(h_8h_4^0 - h_7h_5^0)(h_8(h_4^0)^2 + h_7h_4^0h_5^0 - 2h_6(h_5^0)^2),\\
&L_7^6 = -\frac{I}{336}h_8(h_8(h_4^0)^2 + 5h_7h_4^0h_5^0 - 6h_6(h_5^0)^2), \quad L_8^6 = -\frac{I^2}{384}h_7h_8,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_7(t) = \sum_{n=5}^{7} L_n^7 t^n,\\
&L_5^7 = -\frac{I}{40}h_4^0h_5^0, \quad L_6^7 = -\frac{I}{96}(h_8(h_4^0)^2 - h_6(h_5^0)^2), \quad L_7^7 = -\frac{I^2}{224}h_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_8(t) = \sum_{n=4}^{8} L_n^8 t^n,\\
&L_4^8 = \frac{1}{24}(h_4^0)^3h_5^0, \quad L_5^8 = \frac{1}{60}(h_4^0)^2(2h_8(h_4^0)^2 + h_7h_4^0h_5^0 - 3h_6(h_5^0)^2),\\
&L_6^8 = \frac{1}{48}h_4^0(h_7h_4^0 - h_6h_5^0)(2h_8(h_4^0)^2 - h_7h_4^0h_5^0 - h_6(h_5^0)^2),\\
&L_7^8 = \frac{I}{336}h_6(6h_8(h_4^0)^2 - 5h_7h_4^0h_5^0 - h_6(h_5^0)^2), \quad L_8^8 = \frac{I^2}{384}h_6h_7.
\end{aligned}
$$

Кривая $(x_1(t), x_2(t))$ есть парабола.

3.4.2 Специальный параболический случай $I = 0$

В этом случае $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{h}^0$.

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = -h_5^0 t,\\
&x_2(t) = h_4^0 t,\\
&x_3(t) = 0,\\
&x_4(t) = \frac{1}{6}h_4^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2)t^3,\\
&x_5(t) = \frac{1}{6}h_5^0((h_4^0)^2 + (h_5^0)^2)t^3,\\
&x_6(t) = -\frac{1}{24}h_4^0(h_5^0)^3t^4,\\
&x_7(t) = 0,\\
&x_8(t) = \frac{1}{24}(h_4^0)^3h_5^0t^4.
\end{aligned}
$$

Кривая $(x_1(t), x_2(t))$ есть прямая при $(h_4^0, h_5^0) \neq (0,0)$, в противном случае это начало координат.

3.5 Особый случай $C = 0$

В этом случае параметризации $\mathbf{h}(t)$ и $x(t)$ совпадают с приведенными в п. 3.4.2.

4 Анормальное множество

4.1 Определение и простейшие свойства анормального множества

Анормальное множество распределения $D \subset TG$, соответствующее единичному элементу $\mathrm{Id} \in G$, определяется как

$$\mathrm{Abn} = \{x(t) \mid x(\cdot) \text{ — анормальная траектория распределения } D,\ x(0) = \mathrm{Id},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Анормальное множество линейно связно т.к. любая его точка соединена с Id непрерывной анормальной траекторией.

Замечание 1. Для левоинвариантных распределений ранга 2 на группах Карно глубины не больше 3 анормальное множество имеет простую структуру.

На группе Гейзенберга $G \simeq \mathbb{R}^3_{x_1,x_2,x_3}$ такое распределение порождено векторными полями $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}$, и анормальное множество есть точка: $\mathrm{Abn} = \{\mathrm{Id} = (0,0,0)\}$.

На группе Энгеля $G \simeq \mathbb{R}^4_{x_1,\dots,x_4}$ такое распределение порождено векторными полями $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}$, и анормальное множество есть алгебраическое многообразие, диффеоморфное прямой [31]:

$$\mathrm{Abn} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3 = 0,\ x_4 = x_2^3/6\} = \{e^{tX_2} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

На группе Картана $G \simeq \mathbb{R}^5_{x_1,\dots,x_5}$ такое распределение порождено векторными полями $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}$, и анормальное множество есть алгебраическое многообразие, диффеоморфное двумерной плоскости [20]:

$$\begin{aligned}\mathrm{Abn} &= \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_3 = 0,\ x_4 = x_2(x_1^2+x_2^2)/6,\ x_5 = -x_1(x_1^2+x_2^2)/6\} \\ &= \{e^{u_1X_1+u_2X_2} \mid u_i \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Таким образом, во всех этих случаях анормальное множество есть гладкое алгебраическое подмногообразие соответствующей группы Ли коразмерности 3.

Вернемся к субримановой $(2,3,5,8)$-задаче.

Обозначим множества точек в G, заполненные хорошими, асимптотическими и вырожденными траекториями, выходящими из Id, через $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$, $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ и $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ соответственно, см. [8]. Тогда

$$\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}} = \mathrm{Exp}(\Pi \times \mathbb{R}), \qquad \Pi = (D^2)^\perp \cap \mathfrak{g}^*, \tag{19}$$

$$\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} = \{e^{v_1X_1+v_2X_2} \circ e^{u_1X_1+u_2X_2} \mid (u_1,u_2),(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2\}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = \{e^{u_1X_1+u_2X_2} \mid (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{21}$$

Теорема 4. *Векторные поля* X_0, Y *(см.* (10), (11)*) сохраняют каждое из множеств* Abn, $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$, $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ *и* $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$.

Доказательство. Следует из теоремы 2. □

Предложение 1. *Выполняются следующие соотношения:*

(1) $\mathrm{Abn} = \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \cup \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$,

(2) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} \subset \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$.

Доказательство. Равенство (1) следует из теоремы 2 [8], см. также выше пп. 2.3, 2.4. Равенство (2) следует из определений (19)–(21). □

4.2 Алгебраические, полуалгебраические, и субаналитические множества

Напомним необходимые для дальнейшего базовые определения и факты.

Алгебраическим многообразием называется совместная поверхность уровня конечного набора многочленов в $\mathbb{R}^n$. Любое алгебраическое многообразие замкнуто.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *полуалгебраическим*, если оно имеет вид

$$S = \cup_{i=1}^{N} \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_{i1}(x) = \dots = P_{ik_i}(x) = 0,\ Q_{i1}(x) > 0,\ \dots, Q_{il_i}(x) > 0\} \tag{22}$$

для некоторых $N, k_i, l_i \in \mathbb{N}$ и полиномов P_{ij}, Q_{ij}.

Напомним теперь некоторые определения и свойства, относящиеся к субаналитическим множествам [28, 29].

Подмножество S вещественно-аналитического многообразия M называется *полуаналитическим*, если оно допускает такое покрытие открытыми множествами $U \subset M$, что каждое пересечение $U \cap S$ является объединением компонент связности множеств вида $g^{-1}(0) \setminus h^{-1}(0)$, где функции g и h принадлежат некоторой конечной совокупности вещественнозначных аналитических функций на U.

Непрерывное отображение $f : N \to M$ между топологическими пространствами называется *собственным*, если для любого компакта $K \subset M$ его прообраз $f^{-1}(K) \subset N$ компактен.

Субаналитическое подмножество S вещественно-аналитического многообразия M — это подмножество, допускающее такое покрытие открытыми подмножествами $U \subset M$, что каждое пересечение $U \cap S$ представляет собой объединение компонент связности множеств вида $f(L_1) \setminus f(L_2)$, где L_i принадлежат некоторому конечному семейству $\mathcal{F}$ полуаналитических подмножеств аналитического многообразия M', а $f : M' \to M$ есть аналитическое отображение, сужение которого на замыкание множества $\cup\mathcal{F}$ является собственным.

В частности, если множество $P \subset M'$ полуаналитично, а $f : M' \to M$ есть аналитическое отображение, для которого сужение $f|_{\mathrm{cl}(P)}$ собственное, то множество $S = f(P) \subset M$ субаналитично.

Пересечение и объединение конечного набора субаналитических множеств субаналитично. Замыкание, внутренность и дополнение субаналитического множества субаналитично.

Пусть $S \subset M$ есть субаналитическое подмножество. Точка $x \in S$ называется *гладкой точкой множества S размерности k*, если в некоторой окрестности точки x в M множество S есть аналитическое подмногообразие размерности k. *Размерность* субаналитического множества определяется как максимальная размерность его гладких точек.

По теореме Хиронака [30], субаналитическое множество допускает *стратификацию*, т.е. локально конечное разбиение $\mathcal{P}$ на связные аналитические подмногообразия, такие, что

$$P \neq Q \in \mathcal{P}, \ Q \cap \mathrm{cl}(P) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad Q \subset \mathrm{cl}(P), \ \dim Q < \dim P. \qquad (23)$$

Множества $P \in \mathcal{P}$ называются *стратами*. Помимо условия примыкания стратов (23), они удовлетворяют также условиям Уитни (a) и (b), см. [28].

4.3 Естественные подмножества анормального множества

4.3.1 Вырожденное анормальное множество

В работе [6] было исследовано множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} \subset \mathrm{Abn}$, заполненное вырожденными анормальными траекториями, напомним его основные свойства:

(1) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ заполнено однопараметрическими подгруппами группы Ли G, касающимися распределения D,

(2) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ есть двумерное гладкое алгебраическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2$ и регулярно проецирующееся на плоскость (x_1, x_2):

$$\begin{aligned}\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = \big\{ & x \in \mathbb{R}^8 \mid x_3 = x_7 = 0, \ x_4 = (x_1^2 + x_2^2)x_2/6, \\ & x_5 = -(x_1^2+x_2^2)x_1/6, \ x_6 = x_1^3 x_2/24, \ x_8 = -x_1 x_2^3/24 \big\}, \end{aligned} \qquad (24)$$

(3) любая анормальная траектория, принадлежащая $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$, проецируется на плоскость (x_1, x_2) в прямую. Если эта траектория гладкая и натурально параметризована, то она нестрого анормальна и оптимальна.

Предложение 2. *Имеет место равенство* $\mathrm{Abn} \cap \{x_3 = 0\} = \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$.

Доказательство. Включение $\mathrm{Abn} \cap \{x_3 = 0\} \supset \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ очевидно из (24).

Для доказательства обратного включения возьмем любую точку x из множества $\mathrm{Abn} \cap \{x_3 = 0\}$. Пусть Γ есть анормальная траектория, соединяющая Id и x, а γ — ее проекция на плоскость (x_1, x_2). Равенство $x_3 = 0$ означает, что кривая γ вместе с ее хордой $I \subset \mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$ ограничивает область нулевой алгебраической площади (см. п. 1.4). Но тогда вырожденная анормальная траектория, проецирующаяся на плоскость (x_1, x_2) в отрезок I, соединяет Id и x. Поэтому $x \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$. $\square$

Предложение 3. *Пусть* $x = e^{u_1 X_1 + u_2 X_2} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$.

(1) *Если* $x = \mathrm{Id}$, *то* $T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = \mathrm{span}(X_1, X_2)|_x$.

(2) *Если* $x \neq \mathrm{Id}$, *то* $T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = \mathrm{span}(X_0, u_1 X_1 + u_2 X_2)|_x = \mathrm{span}(X_0, Y)|_x$.

Доказательство. В силу двумерности гладкого многообразия $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$, достаточно найти два линейно независимых вектора в касательном пространстве $T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$.

Если $x = \mathrm{Id}$, то кривые $\varphi_i(t) = e^{tX_i} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ имеют касательные векторы $\dot\varphi_i(0) = X_i(x) \in T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$.

Если $x \neq \mathrm{Id}$, то кривая $\varphi(t) = e^{(1+t)(u_1X_1+u_2X_2)} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ имеет касательный вектор $\dot\varphi(0) = (u_1X_1 + u_2X_2)(x) \in T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$. С другой стороны, вращения X_0 и дилатации Y суть симметрии множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ (см. теорему 4), поэтому $X_0(x), Y(x) \in T_x \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$. Для завершения доказательства остается заметить, что векторы $X_0(x)$ и $(u_1X_1+u_2X_2)(x)$, а также векторы $X_0(x)$ и $Y(x)$ линейно независимы. □

4.3.2 Круговое анормальное множество

Анормальная траектория называется *круговой*, если она проецируется на плоскость (x_1, x_2) в окружность (такие траектории одновременно анормальны и нормальны, см. [8,9]). Как показано в работе [8], круговые траектории, стартующие из единичного элемента группы, заполняют множество

$$\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}} = \{\mathrm{Exp}(\lambda, t) \mid h_6 = h_8 \neq 0,\ h_7 = 0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

В силу симметрии $(t, \lambda) \mapsto (t/k, k\lambda)$, $k \neq 0$, сохраняющей это множество, можно уменьшить число параметров в его параметризации:

$$\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}} = \{\mathrm{Exp}(\lambda, t) \mid h_6 = h_8 = 1,\ h_7 = 0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Естественно выделяется подмножество в $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}}$, соответствующее окружностям $(x_1(t), x_2(t))$ до первого самопересечения:

$$\mathrm{Abn}^1_{\mathrm{circ}} = \{\mathrm{Exp}(\lambda, t) \mid h_6 = h_8 = 1,\ h_7 = 0,\ (h_4^0, h_5^0) \neq (0,0),\ t \in (0, 2\pi)\}.$$

Теорема 5. *Множество $\mathrm{Abn}^1_{\mathrm{circ}}$ есть гладкое 3-мерное многообразие, график гладкого неалгебраического отображения*

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_4, \dots, x_8), \qquad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \qquad x_3 > 0.$$

Доказательство. Используя параметризацию круговых геодезических (см. п. 3), получаем при $h_6 = h_8 = 1$, $h_7 = 0$:

$$x_1 = -h_4^0(1 - \cos t) - h_5^0 \sin t, \tag{25}$$
$$x_2 = -h_5^0(1 - \cos t) + h_4^0 \sin t, \tag{26}$$
$$x_3 = \frac{(h_4^0)^2 + (h_5^0)^2}{2}(t - \sin t), \tag{27}$$

это субримановы геодезические на группе Гейзенберга $H \simeq \mathbb{R}^3_{x_1,x_2,x_3}$, см. [3], а также далее п. 5.4.2. При $t \in (0, 2\pi)$ получаем

$$h_4^0 = -\frac{x_1}{2} + \frac{\sin t}{2(1-\cos t)}x_2, \qquad h_5^0 = -\frac{\sin t}{2(1-\cos t)}x_1 - \frac{x_2}{2}, \tag{28}$$

откуда $(h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{2(1-\cos t)}$. Поэтому

$$\frac{2x_3}{x_1^2+x_2^2} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t} =: \varphi(t), \qquad t \in (0, 2\pi).$$

Функция $\varphi : (0, 2\pi) \to (0, +\infty)$ есть диффеоморфизм и имеет гладкую обратную функцию $\psi = \varphi^{-1} : (0, +\infty) \to (0, 2\pi)$.

Отображение (25)–(27) задает диффеоморфизм

$$
\begin{aligned}
\{(h_4^0, h_5^0) \in \mathbb{R}^2 \mid (h_4^0, h_5^0) \neq (0,0)\} \times \{t \in (0, 2\pi)\} \to \\
\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 0,\ x_3 > 0\},
\end{aligned}
$$

при этом обратное отображение задается формулой

$$
t = \psi\left(\frac{2x_3}{x_1^2 + x_2^2}\right), \tag{29}
$$

а также формулами (28).

Поэтому множество $\mathrm{Abn}^1_{\mathrm{circ}}$ есть график гладкого неалгебраического отображения $x_i = x_i(h_4^0, h_5^0, t)$, $i = 4, \dots, 8$, где h_4^0, h_5^0, t выражены через x_1, x_2, x_3 с помощью формул (29), (28), а $x_i(h_4^0, h_5^0, t)$, $i = 4, \dots, 8$, суть соответствующие компоненты экспоненциального отображения (см. п. 3). $\square$

Теорема 6. (1) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}}$ *есть* 3*-мерное субаналитическое множество.*

(2) *Множество* $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}}$ *неполуалгебраично.*

Доказательство. (1) Положим

$$
\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid h_1 = h_2 = h_3 = h_7 = 0,\ h_6 = h_8 = 1\} \simeq \mathbb{R}^2_{h_4, h_5},
$$

тогда $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}} = \mathrm{Exp}(\Sigma \times \mathbb{R})$. Прообраз есть аналитическое многообразие $\Sigma \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$, а отображение Exp аналитическое и собственное (см. доказательство собственности в доказательстве теоремы 9). Поэтому образ $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}}$ есть субаналитическое множество размерности не больше 3. Но согласно теореме 5, множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}}$ имеет гладкий 3-мерный страт $\mathrm{Abn}^1_{\mathrm{circ}}$, поэтому $\dim \mathrm{Abn}_{\mathrm{circ}} = 3$.

(2) доказывается аналогично теореме 8. $\square$

4.3.3 Равнобочно-гиперболическое анормальное множество

Рассмотрим подмножество анормального множества, соответствующее равнобочным гиперболам $(x_1(t), x_2(t))$ с асимптотами, параллельными осям координат:

$$
\mathrm{Abn}_{\mathrm{hyp}} = \{\mathrm{Exp}(\lambda, t) \mid h_6 = h_8 = 0,\ h_7 = 1,\ t > 0\}.
$$

Предложение 4. *Множество* $\mathrm{Abn}_{\mathrm{hyp}}$ *есть гладкое* 3*-мерное многообразие, график гладкого неалгебраического отображения*

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_4, \dots, x_8), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in E, \\
&E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 > 0,\ 2x_3 < x_1 x_2\}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Используя параметризацию анормальных траекторий (см. раздел 3), получаем при $h_6 = h_8 = 0$, $h_7 = 1$:

$$
x_1 = h_5^0(e^{-t} - 1), \qquad x_2 = h_4^0(e^t - 1), \qquad x_3 = h_4^0 h_5^0(t - \operatorname{sh} t), \tag{30}
$$

откуда
$$\frac{2x_3}{x_1x_2} = \frac{t - \operatorname{sh} t}{1 - \operatorname{ch} t} =: \varphi(t).$$
Функция $\varphi : (0, +\infty) \to (0, 1)$ есть диффеоморфизм, и существует гладкая обратная функция $\psi = \varphi^{-1} : (0, 1) \to (0, +\infty)$. Поэтому отображение (30) задает диффеоморфизм $\{(h_4^0, h_5^0) \in \mathbb{R}^2 \mid h_4^0 > 0,\ h_5^0 < 0\} \times (0, +\infty)_t \to E$, обратное отображение к которому задается формулами
$$t = \psi\left(\frac{2x_3}{x_1x_2}\right), \qquad h_4^0 = \frac{x_2}{e^t - 1}, \qquad h_5^0 = \frac{x_1}{e^{-t} - 1}. \tag{31}$$
Поэтому $\mathrm{Abn}_{\mathrm{hyp}}$ есть график гладкого отображения $x_i = x_i(h_4^0, h_5^0, t)$, $i = 4, \dots, 8$, где h_4^0, h_5^0, t выражены через x_1, x_2, x_3 с помощью формул (31), а $x_i(h_4^0, h_5^0, t)$, $i = 4, \dots, 8$, суть соответствующие компоненты экспоненциального отображения (см. п. 3). $\square$

4.3.4 Асимптотическое анормальное множество

В этом пункте рассмотрим множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \subset \mathrm{Abn}$, заполненное анормальными траекториями, выходящими из Id и проецирующимися на плоскость (x_1, x_2) в отрезки или двузвенные ломаные. Назовем его *асимптотическим анормальным множеством*, т.к. звенья двузвенных ломаных суть асимптоты гипербол, в которые проецируются анормальные траектории гиперболического случая. Пусть $x = (x_1, \dots, x_8) = e^{v_1X_1 + v_2X_2} \circ e^{u_1X_1 + u_2X_2} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$, см. (20), тогда
$$x_1 = u_1 + v_1, \qquad x_2 = u_2 + v_2, \qquad x_3 = \frac{1}{2}(v_2u_1 - v_1u_2), \tag{32}$$
$$x_4 = \frac{(u_1^2 + u_2^2)u_2}{6} + \frac{v_2}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_1v_1 + u_2v_2 + \frac{v_1^2 + v_2^2}{3}\right), \tag{33}$$
$$x_5 = -\frac{(u_1^2 + u_2^2)u_1}{6} - \frac{v_1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_1v_1 + u_2v_2 + \frac{v_1^2 + v_2^2}{3}\right), \tag{34}$$
$$x_6 = \frac{u_1^3u_2}{24} + \frac{v_2}{6}\left(u_1^3 + \frac{3}{2}u_1^2v_1 + u_1v_1^2 + \frac{v_1^3}{4}\right), \tag{35}$$
$$x_7 = \frac{1}{4}\left(u_1^2u_2v_2 - u_1u_2^2v_1 + \frac{u_1^2v_2^2 - u_2^2v_1^2}{2} + \frac{u_1v_1v_2^2 - u_2v_1^2v_2}{3}\right), \tag{36}$$
$$x_8 = -\frac{u_1u_2^3}{24} - \frac{v_1}{6}\left(u_2^3 + \frac{3}{2}u_2^2v_2 + u_2v_2^2 + \frac{v_2^3}{4}\right). \tag{37}$$
Формулы (32)–(37) задают явную параметризацию множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$.

Для описания структуры множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ нам понадобится следующее полуалгебраическое множество B, см. п. (1) теоремы 7 и (46):

$$B = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid x_3^3 x_i = P_i(x_1, \dots, x_5),\ i = 6, 7, 8,\ x_3 \neq 0,\ F(x_1, \dots, x_5) = 0\}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
P_6 = {} & (-x_1^8 x_2^2 - 2x_1^7 x_2 x_3 - x_2(x_2^3 - 6x_4)^3 - 4x_1^6(x_2^4 + x_3^2 - 3x_2 x_4) \\
& - 2x_1(x_2^3 - 6x_4)^2(x_2 x_3 + 3x_5) - 6x_1^5(x_2^3 x_3 - 2x_3 x_4 + x_2^2 x_5) \\
& - 4x_1^2(x_2^3 - 6x_4)(x_2(x_2^4 + x_3^2 - 6x_2 x_4) + 3x_3 x_5) \\
& - 2x_1^4(3x_2^6 + 4x_2^2 x_3^2 - 21x_2^3 x_4 + 18x_4^2 + 6x_2 x_3 x_5) \\
& + x_1^3(2x_2 x_3(-3x_2^4 + 4x_3^2 + 18x_2 x_4) - 12(x_2^4 + 2x_3^2 - 6x_2 x_4)x_5))/192,
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
P_7 = {} & ((x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - 6x_2 x_4 + 6x_1 x_5)(x_1^5 x_2 + x_1^4 x_3 + 2x_1^3(x_2^3 - 3x_4) \\
& - (x_2^3 - 6x_4)(x_2 x_3 - 6x_5) + 6x_1^2 x_2 x_5 \\
& + x_1(x_2^5 - 4x_2 x_3^2 - 6x_2^2 x_4 + 6x_3 x_5)))/96,
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
P_8 = {} & (-x_1^{10} - 4x_1^8 x_2^2 + 6x_1^6 x_2(-x_2^3 + x_4) + 2x_1^7(x_2 x_3 - 9x_5) \\
& + 6x_1^5 x_2^2(x_2 x_3 - 8x_5) + 6x_1^3 x_2(x_2^4 x_3 - 2x_2 x_3 x_4 - 7x_2^3 x_5 + 12x_4 x_5) \\
& - 4x_2(x_2^3 - 6x_4)(x_2^2 x_3^2 - 3x_2 x_3 x_5 + 9x_5^2) - 4x_1^4(x_2^2(x_2^4 + x_3^2 - 3x_2 x_4) \\
& - 6x_2 x_3 x_5 + 27x_5^2) - x_1^2 x_2^2(x_2^6 + 8x_2^2 x_3^2 - 6x_2^3 x_4 - 36x_2 x_3 x_5 + 144x_5^2) \\
& + 2x_1(x_2^3 x_3(x_2^4 - 4x_3^2 - 6x_2 x_4) - 6x_2^2(x_2^4 + 2x_3^2 - 6x_2 x_4)x_5 \\
& + 36x_2 x_3 x_5^2 - 108x_5^3))/192,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$F = 4x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2 - 6x_2 x_4 + 6x_1 x_5.$$

Возникающее из определения (38) множества B множество

$$X = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_3 \neq 0,\ F(x_1, \dots, x_5) = 0\}$$

задается условиями

$$x_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{f(x_1, x_2, x_4, x_5)}, \tag{42}$$

$$f(x_1, x_2, x_4, x_5) = 6x_2 x_4 - 6x_1 x_5 - (x_1^2 + x_2^2)^2 > 0.$$

Множество $O = \{(x_1, x_2, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x_1, x_2, x_4, x_5) > 0\}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^3 \times S^1$, это легко видеть в полярных координатах в плоскостях (x_1, x_2) и (x_4, x_5). Поэтому X есть гладкое 4-мерное многообразие, состоящее из двух компонент связности, диффеоморфных $\mathbb{R}^3 \times S^1$, — графиков функций (42) на множестве O. Следовательно, множество B есть объединение графиков двух гладких отображений

$$O \ni (x_1, x_2, x_4, x_5) \mapsto (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \tag{43}$$

$$x_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{f(x_1, x_2, x_4, x_5)}, \tag{44}$$

$$x_i = \frac{P_i(x_1, \dots, x_5)}{x_3^3}, \qquad i = 6, 7, 8. \tag{45}$$

Обозначим эти компоненты:

$$B^{\pm} = B \cap \{\operatorname{sgn} x_3 = \pm 1\}. \tag{46}$$

Доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Множество B полуалгебраично и является гладким 4-мерным многообразием, состоящим из двух компонент связности $B^{\pm} \simeq \mathbb{R}^3 \times S^1$, соответствующих выбору знака в (44).*

Рассмотрим разложение

$$\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}} = \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{-} \sqcup \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{0} \sqcup \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{+},$$
$$\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{\varepsilon} = \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \{\operatorname{sgn} x_3 = \varepsilon\}, \qquad \varepsilon \in \{\pm 1, 0\}.$$

В этом разложении компоненты $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{-}$ и $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{+}$ соответствуют треугольникам на плоскости (x_1, x_2) с отрицательной и положительной алгебраической площадью соответственно, а компонента $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{0}$ — вырожденным треугольникам с коллинеарными сторонами (отрезкам). В соответствующие двузвенные ломаные на плоскости (x_1, x_2) проецируются асимптотические анормальные траектории.

Теорема 7. *Множество $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}$ имеет следующие свойства:*

(1) $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{\pm} = B^{\pm}$ *полуалгебраично и является гладким 4-мерным многообразием, диффеоморфным $\mathbb{R}^3 \times S^1$,*

(2) $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{0} = \operatorname{Abn}_{\mathrm{deg}}$ *есть гладкое 2-мерное алгебраическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2$,*

(3) $\operatorname{cl}(\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}) \cap \{x_3 = 0\} \supsetneq \operatorname{Abn}_{\mathrm{deg}}$,

(4) $\operatorname{cl}(\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}) \neq \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}$,

(5) $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}$ *есть полуалгебраическое множество и не является алгебраическим многообразием,*

(6) *множество B незамкнуто, поэтому не является алгебраическим многообразием,*

(7) *множество $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}$ есть стратифицированное пространство, состоящее из двух 4-мерных стратов $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{\pm} = B^{\pm} \simeq \mathbb{R}^3 \times S^1$ и примыкающих друг к другу по 2-мерному страту $\operatorname{Abn}_{\mathrm{as}}^{0} = \operatorname{Abn}_{\mathrm{deg}} \simeq \mathbb{R}^2$.*

Доказательство. (1) Пусть

$$x = e^{v_1 X_1 + v_2 X_2} \circ e^{u_1 X_1 + u_2 X_2} \in \operatorname{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \{x_3 \neq 0\}, \tag{47}$$

см. (20). Обозначим через (c_1, c_2) центр масс треугольника с вершинами $(0, 0)$, (u_1, u_2), $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан, поэтому

$$c_i = \frac{2}{3}\left(u_i + \frac{v_i}{2}\right), \qquad i = 1, 2. \tag{48}$$

Отсюда, с учетом (32), получаем

$$u_i = -x_i + 3c_i, \quad v_i = 2x_i - 3c_i, \qquad i = 1, 2. \tag{49}$$

Учитывая геометрический смысл переменных x_4, x_5 (см. п. 1.4), имеем

$$x_3 c_1 = x_4 - \frac{x_2}{6}(x_1^2 + x_2^2), \qquad x_3 c_2 = x_5 + \frac{x_1}{6}(x_1^2 + x_2^2). \tag{50}$$

Далее, из равенств (32), (49) получаем $2x_3 = 3x_2c_1 - 3x_1c_2$, откуда с учетом (50) следует, что

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\dots,x_5) &= 2x_3(2x_3 - 3x_2c_1 + 3x_1c_2) = 4x_3^2 + (x_1^2+x_2^2)^2 - 6x_2x_4 + 6x_1x_5 \\
&= 4x_3^2 - 6x_2(x_4 - \frac{x_2}{6}(x_1^2+x_2^2)) + 6x_1(x_5 + \frac{x_1}{6}(x_1^2+x_2^2)) = 0.
\end{aligned}
$$

Итак, координаты $(x_1,\dots,x_5)$ точки x связаны равенством $F(x_1,\dots,x_5) = 0$.

Выразим теперь x_6, x_7, x_8 через $x_1,\dots,x_5$. Для этого:

- выразим x_6, x_7, x_8 через u_1, u_2, v_1, v_2 с помощью формул (35)–(37),
- выразим u_1, u_2, v_1, v_2 через x_1, x_2, c_1, c_2 с помощью формул (49),
- и, наконец, выразим c_1, c_2 через $x_1,\dots,x_5$ с помощью формул (50).

Упрощая полученные таким образом выражения, приходим к равенствам (45), где полиномы P_i имеют вид (39)–(41).

Итак, доказано включение $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \{x_3 \neq 0\} \subset B$. Обратное включение следует из того, что отображение

$$\{(u_1,u_2,v_1,v_2) \in \mathbb{R}^4 \mid u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0\} \to X,$$

задаваемое формулами (32)–(37), есть диффеоморфизм в силу равенств (48)–(50).

Равенство $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \{x_3 \neq 0\} = B$ доказано. Структура множества B описана в лемме 1. Отсюда следует утверждение п. (1).

(2) Пусть $x \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$. Условие $x_3 = 0$ означает, что векторы (u_1,u_2) и (v_1,v_2) линейно зависимы, поэтому при этом условии

$$e^{v_1X_1+v_2X_2} \circ e^{u_1X_1+u_2X_2} = e^{(u_1+v_1)X_1+(u_2+v_2)X_2} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}.$$

Структура множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ описана в п. 4.3.1.

(3) Рассмотрим последовательности

$$
\begin{aligned}
&(u_1^n,u_2^n,v_1^n,v_2^n) = \left(n, \frac{1}{n^2}, 1-n, -\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \\
&x^n = e^{v_1^nX_1+v_2^nX_2} \circ e^{u_1^nX_1+u_2^nX_2} \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}.
\end{aligned}
$$

Тогда из формул (32)–(37) получаем

$$
\begin{aligned}
&x_1^n = 1, \quad x_2^n = 0, \quad x_3^n = -\frac{1}{2n^2}, \quad x_4^n = -\frac{1+n}{6n^2}, \quad x_5^n = -\frac{1+n^4}{6n^4}, \\
&x_6^n = -\frac{1+n+n^2}{24n^2}, \quad x_7^n = -\frac{1+2n}{24n^4}, \quad x_8^n = -\frac{1}{24n^6},
\end{aligned}
$$

откуда $x^n \to \bar{x} = (1,0,0,0,-\frac{1}{6},-\frac{1}{24},0,0)$ при $n \to \infty$. Из неравенства $\bar{x}_6 \neq \bar{x}_1^3\bar{x}_2/24$ получаем $\bar{x} \notin \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$, см. (21). Однако $\bar{x} \in \mathrm{cl}(\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}) \cap \{x_3 = 0\} \supset \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$, что доказывает п. (3).

(4) следует непосредственно из (2), (3).

(5) Полуалгебраичность $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ следует из разложения $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} = B \cup \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ и полуалгебраичности множеств B, $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ (см. пп. (1), (2) и лемму 1). Множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ не является алгебраическим многообразием т.к. оно незамкнуто, см. п. (4).

(6) Множество B незамкнуто т.к. построенная в п. (3) последовательность $x^n \in B$, а $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x^n \notin B$.

(7) следует из пп. (1), (2). □

Замечание 2. Геометрический смысл п. (1) теоремы 7 — в том, что множество треугольников ненулевой площади с закрепленной одной вершиной регулярно параметризуется 4-мя параметрами: координатами (x_1, x_2) одной из свободных вершин и координатами (c_1, c_2) центра масс. Отсюда получаем регулярную параметризацию (43)–(45) неособой части $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \cap \{x_3 \neq 0\}$ асимптотического анормального множества.

4.4 Свойства анормального множества

4.4.1 Незамкнутость анормального множества

Предложение 5. *Анормальное множество* Abn *незамкнуто, потому не является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Из п. (3) теоремы 7 и предложения 2 получаем

$$\mathrm{cl}(\mathrm{Abn}) \cap \{x_3 = 0\} \supsetneq \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = \mathrm{Abn} \cap \{x_3 = 0\},$$

откуда $\mathrm{cl}(\mathrm{Abn}) \neq \mathrm{Abn}$. □

4.4.2 Неаполуалгебраичность анормального множества

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 2. *Рассмотрим прямую*

$$\begin{aligned}
&L = \{z(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^8, \qquad\qquad (51)\\
&z(t) = (z_1(t), \dots, z_8(t)), \qquad z_1(t) = z_2(t) = z_5(t) = z_7(t) = 0,\\
&z_3(t) = \frac{t}{2}, \quad z_4(t) = -\frac{t}{2}, \quad z_6(t) = \frac{5t}{16}, \quad z_8(t) = \frac{t}{16}.
\end{aligned}$$

Тогда $\mathrm{Abn} \cap L = \{z(2\pi n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Докажем сначала включение $\mathrm{Abn} \cap L \supset \{z(2\pi n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Возьмем такое $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, что $h_1 = h_2 = h_3 = h_5 = h_7 = 0$, $h_4 = h_6 = h_8 = 1$. Из параметризации экспоненциального отображения (п. 3) при $n \in \mathbb{Z}$ получаем $\mathrm{Exp}(\lambda, 2\pi n) = z(2\pi n)$, и требуемое включение доказано.

Теперь докажем обратное включение

$$\mathrm{Abn} \cap L \subset \{z(2\pi n) \mid n \in \mathbb{Z}\}. \qquad (52)$$

Для этого возьмем любое $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и докажем, что включение $z(\bar{t}) \in \mathrm{Abn} \cap L$ влечет равенство $\bar{t} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. От противного, пусть $z(\bar{t}) \in \mathrm{Abn} \cap L$,

$\bar t \neq 2\pi n$. Тогда существует анормальная траектория $y(t) = (y_1, \dots, y_8)(t)$, $t \in [0,T]$, такая, что $y(0) = 0$, $y(T) = z(\bar t)$. Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $t \in [0,T]$. Так как $(y_1, y_2)(T) = (z_1, z_2)(\bar t) = 0$, то кривая γ замкнута. Далее, $y_3(T) = z_3(\bar t) = \frac{\bar t}{2}$, поэтому кривая γ охватывает на плоскости область E ненулевой площади, поэтому можно считать, что γ есть эллипс, пройденный с учетом ориентации k раз, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Учитывая геометрический смысл $(2,3,5,8)$-задачи (см. п. 1.4), область E имеет центр масс $c = (c_1, c_2)$ и моменты второго порядка J_1, J_2, K_{12} следующего вида:

$$c_1 = \frac{y_4(T)}{y_3(T)} = \frac{z_4(\bar t)}{z_3(\bar t)} = -1, \qquad c_2 = \frac{y_5(T)}{y_3(T)} = \frac{z_5(\bar t)}{z_3(\bar t)} = 0,$$

$$J_1 = 2y_8(T) = 2z_8(\bar t) = \frac{\bar t}{8}, \qquad J_2 = 2y_6(T) = 2z_6(\bar t) = \frac{5\bar t}{8}, \tag{53}$$

$$K_{12} = y_7(T) = z_7(\bar t) = 0. \tag{54}$$

Рассмотрим сначала случай, когда эллипс γ имеет вертикальную касательную в начале координат, тогда $y_1(t) = \cos t - 1$, $y_2(t) = b \sin t$, $t \in [0,T]$, $T = 2\pi k$. Для этого эллипса $J_1 = \frac{1}{4}\pi b k$, $J_2 = \frac{5}{4}\pi b^3 k$, откуда с учетом (53) получаем $b^2 = \frac{J_2}{5J_1} = 1$. Тогда $J_1 = \frac{\pi}{4}k = \frac{\bar t}{8}$, то есть $\frac{\bar t}{2\pi} = k \in \mathbb{Z}$, что противоречит предположению $\bar t \neq 2\pi n$.

Пусть теперь эллипс γ имеет в начале координат наклонную касательную, тогда

$$y_1(t) = ac\cos t - bs \sin t - 1, \qquad y_2(t) = as\cos t + bc \sin t,$$

$$s = \sqrt{\frac{(a^2-1)b^2}{a^2-b^2}}, \qquad c = \sqrt{\frac{a^2(1-b^2)}{a^2-b^2}}, \tag{55}$$

$$a, b > 0, \qquad a \neq b. \tag{56}$$

Для этого эллипса

$$K_{12} = \frac{ab(a^2-b^2)}{4}\sqrt{\frac{a^2b^2(a^2-1)(1-b^2)}{(a^2-b^2)^2}},$$

откуда $a = 1$ или $b = 1$ в силу (54). Если $a = 1$, то $J_1 = \frac{\pi}{4}bk$, $J_2 = \frac{5\pi}{4}b^3k$, откуда с учетом (53) получаем $b^2 = \frac{J_2}{5J_1} = 1$, что противоречит (56). Так же получаем противоречие в случае $b = 1$.

Итак, во всех случаях получено противоречие, доказывающее включение (52). □

Теорема 8. *Анормальное множество* Abn *неполуалгебраично.*

Доказательство. От противного, пусть множество Abn полуалгебраично, т.е. имеет вид (22). Прямая L (51) пересекается с полуалгебраическим множеством Abn по счетному множеству, см. лемму 2. Но это невозможно: во-первых, каждый из полиномов P_{ij} обращается в ноль на L, а во-вторых, каждый из полиномов Q_{ij} положителен в окрестности каждой точки этого счетного множества. □

4.4.3 Субаналитичность и размерность анормального множества

Теорема 9. (1) *Множество* Abn *субаналитично.*

(2) $\dim \mathrm{Abn} = 5$.

(3) *Если* $x^0 \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} \setminus \{\mathrm{Id}\}$, *то* x^0 *не содержится ни в каком* 5*-мерном страте стратифицированного пространства* Abn. *Поэтому* Abn *не является гладким многообразием.*

Доказательство. Докажем утверждение (1).

Ввиду п. (1) предложения 1, достаточно доказать субаналитичность множеств $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$ и $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$.

В силу п. (5) теоремы 7, множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ полуалгебраично. Поэтому оно полуаналитично, а, значит, и субаналитично.

Докажем, что множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$ (19) есть образ полуаналитического множества при собственном аналитическом отображении, отсюда будет следовать субаналитичность множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$.

Множество $\Pi \times \mathbb{R}$ полуаналитично, а отображение Exp аналитическое, поэтому осталось доказать только собственность отображения $\mathrm{Exp} : \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^8$. Для этого нужно доказать, что если последовательность $(\lambda^n, t^n) \in \Pi \times \mathbb{R}$ не содержится ни в каком компакте, то ее образ $x^n = \mathrm{Exp}(\lambda^n, t^n)$ не содержится ни в каком компакте в $\mathbb{R}^8$.

Пусть $\Pi \times \mathbb{R}_+ \ni (\lambda^n, t^n) \to \infty$. Воспользуемся тем, что дилатация Y задает обобщенную симметрию экспоненциального отображения, см. п. 2.1 и [7]:

$$e^{t\vec{A}} \circ e^{r\vec{h}_Y} = e^{r\vec{h}_Y} \circ e^{t'\vec{A}}, \qquad t' = te^{4r},$$

откуда

$$\mathrm{Exp}(\lambda, t) = e^{rY} \circ \mathrm{Exp}(e^{-r\vec{h}_Y}(\lambda), t'), \qquad (\lambda, t) \in \Pi \times \mathbb{R}_+.$$

Фактор пространства $(\Pi \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ по дилатации $\vec{h}_Y$ есть топологическая сфера

$$S = \{(\lambda, t) \in \Pi \times \mathbb{R}_+ \mid h_4^4 + h_5^4 + |h_6|^3 + |h_7|^3 + |h_8|^3 + t^3 = 1\}.$$

Обозначим $k = (h_4^4 + h_5^4 + |h_6|^3 + |h_7|^3 + |h_8|^3 + t^3)^{1/12}$. На последовательности $(\lambda^n, t^n) \to \infty$ имеем $k^n \to +\infty$. Для $r^n = \ln k^n \to +\infty$ выполнено

$$\Big(\exp(-r_n \vec{h}_Y(\lambda^n)), t^n \exp(4r^n)\Big) = (\widetilde{\lambda^n}, \widetilde{t^n}) \in S.$$

Существует сходящаяся подпоследовательность $(\widetilde{\lambda^{n_i}}, \widetilde{t^{n_i}}) \to (\bar{\lambda}, \bar{t}) \in S$. Поэтому $x^{n_i} = e^{r^{n_i}Y} \circ \mathrm{Exp}(\widetilde{\lambda^{n_i}}, \widetilde{t^{n_i}}) \to \infty$ т.к. $\mathrm{Exp}(\widetilde{\lambda^{n_i}}, \widetilde{t^{n_i}}) \to \mathrm{Exp}(\bar{\lambda}, \widetilde{t}) \in \mathbb{R}^8 \setminus \{0\}$ и $\lim_{r \to +\infty} e^{rY}(x) = \infty$. Итак, x^{n_i} не содержится ни в каком компакте в $\mathbb{R}^8$.

Отображение $\mathrm{Exp} : \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^8$ собственное. Поэтому множество $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$ субаналитично, как и множество Abn.

Докажем утверждение (2). Оценим размерности компонент разложения п. (1) предложения 1:

$$\dim \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}} \leqslant \dim(\Pi \times \mathbb{R}_+) = 5, \qquad \dim \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} = 4,$$

поэтому $\dim \mathrm{Abn} \leqslant 5$. Для доказательства того, что это неравенство есть в действительности равенство, вычислим минор экспоненциального отображения, используя явную параметризацию анормальных траекторий (см. п. 3).

При $h_4^0 = 1$, $h_5^0 = 0$, $h_6 = h_8 = 1$, $h_7 = 0$ получаем из параметризации экспоненциального отображения п. 3:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial\,(x_1, \dots, x_5)}{\partial\,(h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8)} \\ &= -t(-737 - 36t^2 + (1016 - 96t^2)\cos t + 8\cos 3t + 5\cos 4t \\ &\quad + 2t(296 + 36t^2 - 321)\cos t + \cos 3t)\sin t \\ &\quad + 4\cos 2t(33t^2 - 73 + 12t\sin t))/1152 \\ &= \frac{t^{17}}{2^{12}3^3 5^3 7} + o(t^{17}), \qquad t \to 0. \end{aligned}$$

Поэтому при малых $t > 0$ имеем $J \neq 0$. Это означает, что соответствующие точки множества $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$ содержатся в 5-мерном страте. Следовательно, $\dim \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}} = \dim \mathrm{Abn} = 5$.

Другое вычисление, с другим порядком вырождения якобиана при $t \to 0$, так же приводящее к 5-мерному страту: если $h_4^0 = h_5^0 = h_7 = 1$, $h_6 = h_8 = 0$, то

$$J = -\frac{t^{11}}{2^7 3^2 5} + o(t^{11}) \neq 0, \qquad t \to 0.$$

Докажем утверждение (3). От противного, пусть некоторая точка $x^0 \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ содержится в некотором 5-мерном страте P стратифицированного пространства Abn. Обозначим $L = \{x \in G \simeq \mathbb{R}^8 \mid x_3 = 0\}$ и докажем, что $T_{x^0}P \not\subset T_{x^0}L$. Для этого рассмотрим кривые $\varphi_i(t) = e^{tX_i}(x^0) \in \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \subset \mathrm{Abn}$. При малых t имеем $\varphi_i(t) \in P$, поэтому $T_{x^0}P \ni \dot\varphi_i(0) = X_i(x^0)$. Далее, $\langle dx_3, X_i(x^0)\rangle = -x_2/2$ при $i = 1$ и $x_1/2$ при $i = 2$. Так как $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, получаем, что $\dot\varphi_1(0) \notin T_{x^0}L$ или $\dot\varphi_2(0) \notin T_{x^0}L$. Итак, $T_{x^0}P \not\subset T_{x^0}L$, поэтому $T_{x^0}P + T_{x^0}L = T_{x^0}G$, то есть многообразия P и L пересекаются трансверсально в точке x^0. Поэтому их пересечение $Q = P \cap L$ есть гладкое многообразие в окрестности точки x^0, оценим его размерность. С одной стороны, $\dim Q = \dim(T_{x^0}P \cap T_{x^0}L) = 4$. А с другой стороны, $Q \subset \mathrm{Abn} \cap L = \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ (см. предложение 2), откуда $\dim Q \leqslant \dim \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}} = 2$, противоречие. $\square$

Замечание 3. В работе [14] доказано, что Abn есть субаналитическое множество размерности не больше 5. Утверждение п. (1) теоремы 4 уточняет это утверждение.

В работе [15] доказано, что множество Abn содержится в алгебраическом многообразии коразмерности 1, откуда следует, что это множество имеет меру нуль (свойство Сарда в субримановой геометрии). Это также следует из п. (1) теоремы 4.

Учитывая результаты последующего п. 5, можно придать компонентам соотношений

$$\mathrm{Abn} = \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}} \cup \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}, \qquad \mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}} \cap \mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \supset \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$$

инвариантный смысл.

Следствие 1. (1) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$ *есть множество, заполненное всеми анормальными геодезическими, выходящими из* Id,

(2) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ *есть множество, заполненное всеми анормальными метрическими прямыми, выходящими из* Id,

(3) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}} \setminus \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ *есть множество, заполненное анормальными траекториями, выходящими из* Id *и не являющимися геодезическими.*

5 Оптимальность анормальных траекторий

В этом разделе исследуется глобальная и локальная (в сильном смысле, т.е. в C^0-топологии для траекторий) оптимальность [2] анормальных траекторий в субримановой $(2,3,5,8)$-задаче.

5.1 Метрические промежутки

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ есть промежуток, то есть связное подмножество $\mathbb{R}$. Пусть M есть субриманово многообразие.

Субриманову геодезическую $\Gamma : I \to M$ будем называть *геодезическим промежутком*. Важными случаями для нас будут геодезические отрезки $(I = [a,b])$, геодезические лучи $(I = [a,+\infty)$ или $I = (-\infty,a])$, и геодезические прямые $(I = \mathbb{R})$.

Геодезический промежуток $\Gamma : I \to M$ называется *метрическим промежутком*, если Γ есть изометрия, что эквивалентно любому из следующих свойств:

- для любых $a, b \in I$ сужение $\Gamma|_{[a,b]}$ является субримановой кратчайшей,
- для любых $a, b \in I$ субриманово расстояние $d(\Gamma(a),\Gamma(b)) = |a-b|$.

Например, метрический отрезок есть в точности субриманова кратчайшая. А геодезическая $\Gamma : [a,+\infty) \to M$ есть метрический луч тогда и только тогда, когда время разреза $t_{\mathrm{cut}}(\Gamma) = +\infty$.

В теории метрических групп важным вопросом является описание метрических прямых в субримановых группах Карно [17]. Так, в работе [18] показано, что в таких группах глубины не больше двух метрические прямые суть в точности прямые (см. определение прямой в группе Карно в п. 5.2). В работе [24] приведен пример метрической прямой в группе Энгеля (имеющей глубину 3), не являющейся прямой в этой группе.

Очевидно, что геодезическая прямая $\Gamma : \mathbb{R} \to M$ есть метрическая прямая тогда и только тогда, когда любой геодезический отрезок $\Gamma : [a,b] \to M$ содержится в некотором метрическом промежутке $\Gamma : I \to M$, т.е. $[a,b] \subset I$. Например, так будет в случае, если все геодезические лучи $\Gamma : [a,+\infty) \to M$ являются метрическими лучами, т.е.

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad t_{\mathrm{cut}}(\Gamma_a) = +\infty, \qquad \Gamma_a = \Gamma|_{[a,+\infty)}.$$

Было бы интересно понять, существует ли геодезическая прямая $\Gamma : \mathbb{R} \to M$ левоинвариантной субримановой структуры на группе Карно G такая, что:

- для некоторого $a \in \mathbb{R}$ геодезические лучи $\Gamma|_{[a,+\infty)}$ и $\Gamma|_{(-\infty,-a]}$ суть метрические лучи,
- Γ не является метрической прямой.

Подобный пример для нелевоинвариантной метрики легко построить, см. пример 1.

Пример 1. Рассмотрим эллипс, отличный от окружности, и возьмем его половину E, содержащую вытянутую часть, примыкающую к вершине с максимальной кривизной. Продолжим гладким образом кривую E двумя евклидовыми лучами L_1, L_2, обозначим $\Gamma = E \cup L_1 \cup L_2$. Рассмотрим двумерную поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$, полученную вращением кривой Γ вокруг ее оси симметрии. Определим риманово расстояние между точками $q_0, q_1 \in S$ как нижнюю грань длин липшицевых кривых в M, соединяющих q_0 и q_1. Тогда M становится двумерным римановым многообразием. По теореме Клеро меридиан Γ есть геодезическая прямая. При этом евклидовы лучи L_1, L_2 суть метрические лучи. Однако геодезический отрезок E не является кратчайшей т.к. полуокружность, соединяющая ее концы на M, короче чем половина эллипса E; поэтому Γ не является метрической прямой.

5.2 Прямые в группе Карно

Прямой в группе Карно G называется левая трансляция однопараметрической подгруппы в G, порожденной ненулевым элементом в первом слое алгебры Ли:

$$q(t) = ge^{tX}, \qquad g \in G, \quad X \in \mathfrak{g}^{(1)} \setminus \{0\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Вдоль такой траектории управление постоянно и отлично от нуля, поэтому любая прямая в группе Карно есть метрическая прямая для левоинвариантной субримановой структуры на G, порожденной скалярным произведением в $\mathfrak{g}^{(1)}$.

Для модели (4)–(9) субримановой $(2,3,5,8)$-задачи прямые суть кривые в $\mathbb{R}^8$, проецирующиеся на плоскость (x_1, x_2) в евклидовы прямые, см. (29)–(31) [6]. Эти линии являются метрическими прямыми.

5.3 Негладкие анормальные траектории

Как показано в работе [16], субриманова кратчайшая $q(t)$, $t \in [a,b]$, не может иметь угловой особенности, то есть такой точки $q(\tau)$, $\tau \in (a,b)$, что левая и правая производные $\dot{q}_-(\tau)$, $\dot{q}_+(\tau)$ существуют и линейно независимы.

В субримановой $(2,3,5,8)$-задаче анормальные траектории с угловой точкой появляются в асимптотическом случае [8], см. п. 2.4, когда проекции таких траекторий на плоскость (x_1, x_2) принадлежат паре пересекающихся прямых и содержат отрезки разных прямых. Все такие траектории неоптимальны в силу вышеуказанного результата работы [16].

5.4 Гладкие анормальные траектории

5.4.1 Оптимальность малых дуг

Теорема 10. *Малые дуги гладких анормальных траекторий оптимальны, то есть при натуральной параметризации такие траектории суть гео-*

дезические. Более того, концы малых дуг этих траекторий соединяются единственной оптимальной траекторией.

Доказательство. Пусть $\Gamma : \mathbb{R} \to G \simeq \mathbb{R}^8$ есть гладкая анормальная траектория, а $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ есть ее проекция на плоскость (x_1, x_2). Если γ есть евклидова прямая, то Γ есть метрическая прямая в силу п. 5.2 и удовлетворяет утверждениям теоремы.

В противном случае γ есть коническое сечение (парабола, эллипс или одна ветвь гиперболы) [8], см. п. 2.3. Тогда вдоль соответствующей анормальной экстремали λ_t, $t \in \mathbb{R}$, выполнены условия

$$h_1 = h_2 = h_3 \equiv 0, \qquad h_4^2 + h_5^2 \neq 0,$$

т.е.

$$\lambda_t \in (D^2)^\perp \setminus (D^3)^\perp,$$

такая экстремаль называется хорошей (nice) [2,3], а в работе [19] такая экстремаль называется регулярной. Согласно теореме 5 [19], см. также теорему 12.33 и замечание 12.34 [3], соответствующая экстремальная траектория Γ удовлетворяет утверждениям данной теоремы. $\square$

5.4.2 Оптимальность круговых траекторий

Пусть геодезический луч $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to G$ проецируется на плоскость (x_1, x_2) в окружность, назовем такую траекторию *круговой*. Такая траектория одновременно анормальна и нормальна [8]. Она проецируется естественным образом в группы Гейзенберга и Картана, и благодаря этому можно получить нижние оценки времени разреза вдоль Γ

$$t_{\text{cut}}(\Gamma) = \sup \left\{ \tau > 0 \mid \Gamma|_{[0,\tau]} \text{ оптимальна} \right\}.$$

Проекция на группу Гейзенберга *Алгебра Гейзенберга* есть 3-мерная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(X_1, X_2, X_3)$ с единственной ненулевой скобкой $[X_1, X_2] = X_3$. Соответствующая связная односвязная группа Ли H называется *группой Гейзенберга.* Стандартная левоинвариантная субриманова задача на группе H задается ортонормированным репером X_1, X_2 [3].

Фактор-группа $\widetilde{G} = G/\exp(\mathfrak{g}^{(3)} + \mathfrak{g}^{(4)})$ изоморфна группе Гейзенберга. Естественная проекция $p : G \to \widetilde{G}$ задает на $\widetilde{G}$ левоинвариантную субриманову структуру, изометричную стандартной. При этом p есть субметрия, то есть субмерсия, сохраняющая скалярное произведение субримановых метрик. Поэтому, если горизонтальная кривая $\Gamma : [a, b] \to G$ такова, что ее проекция $p \circ \Gamma(t)$ оптимальна для субримановой метрики на группе Гейзенберга $\widetilde{G}$, то $\Gamma(t)$ оптимальна для $(2, 3, 5, 8)$-субримановой метрики на G. Для рассматриваемой модели (4)–(9) субримановой $(2, 3, 5, 8)$-структуры проекция p имеет вид $(x_1, \ldots, x_8) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$. Для левоинвариантной субримановой задачи на группе Гейзенберга траектория, проецирующаяся на плоскость (x_1, x_2) в окружность, теряет оптимальность при первом замыкании окружности [3]. Поэтому получаем следующее утверждение.

Теорема 11. *Если геодезическая $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to G$ проецируется на плоскость (x_1, x_2) в окружность γ периода T, то она оптимальна до момента T, т.е. $t_{\text{cut}}(\Gamma) \geqslant T$.*

Проекция на группу Картана *Алгебра Картана* есть 5-мерная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{c} = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_5)$ с ненулевыми скобками $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$. Соответствующая связная односвязная группа Ли C называется *группой Картана*. Стандартная левоинвариантная субриманова задача на группе C задается ортонормированным репером X_1, X_2, эта задача была исследована в работах [20–23, 25, 26]. Для этой субримановой задачи траектория, проецирующаяся на плоскость (x_1, x_2) в окружность, теряет оптимальность в момент времени μT, где T есть период окружности, а число $\mu \approx 1{,}46$ задается условиями:

$$\mu = 2r/\pi, \tag{57}$$

$$(32r^2 - 1)\cos(2r) - 8r\sin(2r) + \cos(6r) = 0, \qquad r \in (\pi/2, \pi). \tag{58}$$

Рассматривая проекцию траектории Γ на группу Картана аналогично доказательству теоремы 11, получаем следующее усиление этой теоремы.

Теорема 12. *Если геодезическая $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to G$ проецируется на плоскость (x_1, x_2) в окружность γ периода T, то она оптимальна до момента μT, т.е. $t_{\mathrm{cut}}(\Gamma) \geqslant \mu T$.*

5.4.3 Метрические прямые

Предварительные сведения В этом пункте будут использоваться описанные далее в теоремах 13, 14 необходимые условия того, что субриманова геодезическая на группе Карно есть метрическая прямая.

Пусть G есть группа Карно, $V_1 = G/[G, G]$ есть ее первый слой, и $\pi : G \to V_1$ есть проекция. Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на G, заданную некоторым скалярным произведением в первом слое $\mathfrak{g}^{(1)}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть Γ есть геодезическая прямая или геодезический луч.

Теорема 13 (Э. Хакавуори, Э. Ле Донне [17])**.** *Если Γ есть метрическая прямая или метрический луч, то существуют $R > 0$ и гиперплоскость $W \subset V_1$ такие, что $\mathrm{Im}(\pi \circ \Gamma)$ содержится в R-окрестности гиперплоскости W в V_1.*

Далее, пусть I есть прямая $\mathbb{R}$ или замкнутый луч в $\mathbb{R}$ вида $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$. Пусть $\Gamma : I \to G$ есть 1-липшицева кривая (в частности, геодезическая). Пусть $\delta_h : G \to G$, $h > 0$, есть семейство дилатаций в группе Карно G. Зафиксируем $\bar{t} \in I$ и определим для каждого $h > 0$ кривую

$$\Gamma_h(t) = \delta_{\frac{1}{h}}(\Gamma(\bar{t})^{-1}\Gamma(\bar{t} + ht)), \qquad t \in \frac{1}{h}(I - \bar{t}). \tag{59}$$

При $h \to +\infty$ промежуток $\frac{1}{h}(I - \bar{t})$ стремится к промежутку $\bar{I}$, где $\bar{I} = \mathbb{R}$, $\bar{I} = [0, +\infty)$ или $\bar{I} = (-\infty, 0]$. По теореме Арцела-Асколи, для любой последовательности $h_j \to +\infty$ существует подпоследовательность h_{j_k} и кривая $\sigma : \bar{I} \to G$ такая, что $\Gamma_{h_{j_k}} \to \sigma$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$. Следуя работе [17], определим множество асимптотических конусов (сжатий, blow-down [17]) кривой Γ как непустое множество

$$\mathrm{Asymp}(\Gamma) := \{\sigma \mid \ \exists\, h_j \to \infty \ : \ \Gamma_{h_j} \to \sigma\}. \tag{60}$$

Это множество не зависит от $\bar{t}$.

Теорема 14 (Э. Хакавуори, Э. Ле Донне [17]). *Если* Γ *есть метрическая прямая или метрический луч, то любой элемент множества* $\operatorname{Asymp}(\Gamma)$ *есть также метрическая прямая (соотв. метрический луч).*

Анормальные метрические прямые в субримановой $(2,3,5,8)$**-задаче**

Теорема 15. *В субримановой* $(2,3,5,8)$*-задаче из анормальных геодезических метрическими прямыми являются только прямые в группе Ли* G*, то есть геодезические, проецирующиеся на плоскость* (x_1, x_2) *в евклидовы прямые.*

Доказательство. Если анормальная траектория Γ в субримановой $(2,3,5,8)$-задаче негладкая, то она содержит угловую точку или точку возврата ($\dot{\Gamma}_-(\tau)$ и $\dot{\Gamma}_+(\tau)$ противоположно направлены). В обоих случаях Γ неоптимальна на участке, содержащем такую точку внутри себя. Учитывая пункт 5.2, нужно доказать, что гладкие анормальные траектории, проецирующиеся на плоскость (x_1, x_2) в конические сечения, не являются метрическими прямыми.

Пусть $\Gamma : \mathbb{R} \to G \simeq \mathbb{R}^8$ есть гладкая анормальная траектория, проекция которой $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ на плоскость (x_1, x_2) есть коническое сечение. Исследуем асимптотические конусы кривой Γ согласно определениям (59), (60). При этом будем в определении (59) будем полагать $\bar{t} = 0$, откуда $\Gamma(\bar{t}) = \mathrm{Id}$, и

$$\Gamma_{\frac{1}{h}}(t) = \delta_{\frac{1}{h}} \circ \Gamma(ht), \qquad h > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дилатации в группе Карно $G \simeq \mathbb{R}^8$ действуют следующим образом:

$$\delta_\alpha(x_1, \dots, x_8) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha^2 x_3, \alpha^3 x_4, \alpha^3 x_5, \alpha^4 x_6, \alpha^4 x_7, \alpha^4 x_8),$$
$$\alpha > 0, \quad (x_1, \dots, x_8) \in G \simeq \mathbb{R}^8.$$

Обозначая $\Gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_8(t))$, $\Gamma_h(t) = (x_1^h(t), \dots, x_8^h(t))$, получаем

$$x_i^h(t) = \frac{1}{h} x_i(ht), \qquad i = 1, 2, \quad h > 0.$$

1. Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ есть эллипс. Тогда функции $x_i(t)$, $i = 1, 2$, ограничены, и

$$\lim_{h \to \infty} x_i^h(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{61}$$

Пусть $h_k \to \infty$ есть последовательность, на которой существует предел $\lim_{h_k \to \infty} \Gamma(t) = \sigma(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_8(t))$. Тогда из (61) получаем $\bar{x}_1(t) = \bar{x}_2(t) \equiv 0$, откуда сжатие $\sigma(t) \equiv \mathrm{Id}$ есть постоянная кривая. Поэтому σ не является метрической прямой, и по теореме 14 это же верно и для кривой Γ, ч.т.д.

2. Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ есть парабола или одна ветвь гиперболы. Докажем, что тогда Γ не может быть метрической прямой.

2.1. Первое доказательство. Парабола и ветвь гиперболы не содержатся ни в какой полосе между двумя параллельными евклидовыми прямыми в плоскости (x_1, x_2). По теореме 13, траектория Γ не является метрической прямой.

2.2. Второе доказательство. Несложное вычисление по определению (59) показывает, что:

- сжатие параболы — это замкнутый луч с вершиной в начале координат и сонаправленный оси параболы, а
- сжатие ветви гиперболы — это угол с вершиной в начале координат, стороны которого сонаправлены асимптотам гиперболы.

В обоих случаях предельная кривая σ имеет точку возврата или угловую точку, потому не является метрической прямой. Поэтому и Γ не является метрической прямой. $\square$

Теорема 16. *В субримановой* $(2,3,5,8)$*-задаче геодезические лучи, проецирующиеся в эллипсы или параболы, не являются метрическими лучами.*

Доказательство. Аналогично пп. 1, 2 доказательства теоремы 15. $\square$

К сожалению, мы не можем сделать вывода, аналогичного утверждению теоремы 16, об анормальных геодезических лучах, проецирующихся в гиперболы, т.к. в этом случае необходимые условия теорем 13, 14 неприменимы (проекция такого луча на плоскость (x_1, x_2) содержится в полосе, а сжатие такого луча есть метрический луч).

5.4.4 Сопряженные точки

Предварительные сведения Напомним необходимые нам сведения по теории сопряженных точек вдоль анормальных траекторий из раздела 12.6 книги [3].

Пусть λ_t, $t \in [0, t_1]$, есть хорошая экстремаль для распределения D ранга 2 на субримановом многообразии M, и пусть $\Gamma(t) = \pi(\lambda_t)$, $t \in [0, t_1]$, есть соответствующая анормальная траектория с начальной точкой $q_0 = \Gamma(0)$, где $\pi : T^*M \to M$ есть каноническая проекция. Пусть носитель этой кривой $\{\Gamma(t) \mid t \in [0, t_1]\}$ есть одномерное C^∞-гладкое подмногообразие в M, с границей или без нее. Выберем базис f_1, f_2 распределения D так, чтобы

$$\dot{\Gamma}(t) = f_1(\Gamma(t)), \qquad t \in [0, t_1]. \tag{62}$$

Далее, введем семейство векторных полей

$$g_t = e_*^{-tf_1} f_2, \qquad t \in [0, t_1].$$

Положим для любых $t, s \in (0, t_1]$

$$l(t) = \langle \lambda_0, [\dot{g}_t, g_t](q_0) \rangle,$$
$$X_t = v_1 g_s + \int_s^t v(\tau) \dot{g}_\tau d\tau, \qquad v \in L^2[0, t_1], \quad v_1 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим семейство квадратичных форм Q_s, $s \in (0, t_1]$, следующего вида:

$$Q_s(v, v_1) = \int_0^s l(t) v(t)^2 dt + \int_0^s \langle \lambda_0, [X_t, \dot{X}_t](q_0) \rangle dt,$$

заданных на пространстве

$$D(Q_s) = \left\{ (v, v_1) \in L^2[0,s] \times \mathbb{R} \mid \int_0^s v(t)\dot{g}_t(q_0)dt + v_1 g_s(q_0) \in \operatorname{span}(f_1(q_0)) \right\}.$$

Момент времени $s \in (0, t_1]$ называется *сопряженным* к начальному моменту 0 для анормальной траектории Γ, если $\ker Q_s \neq 0$.

Замечание 4. Здесь и далее излагается теория сопряженных точек для экстремалей, заданных на отрезке $t \in [0, t_1]$. Для экстремалей, заданных на общем отрезке $t \in [t_0, t_1]$ эта теория очевидно переносится сдвигом времени.

Теорема 17 (Теоремы 12.37, 12.56 [3]). *Если промежуток $(0, t_1]$ не содержит сопряженных времен, то траектория Γ локально оптимальна в сильном смысле (т.е. в смысле C^0-топологии).*

Опишем способ вычисления сопряженных времен с помощью «уравнения Якоби» (63).

Рассмотрим линейные на слоях T^*M гамильтонианы

$$h_{f_1}(\lambda) = \langle \lambda, f_1(\pi(\lambda)) \rangle, \quad h_{g_t}(\lambda) = \langle \lambda, g_t(\pi(\lambda)) \rangle, \qquad \lambda \in T^*M, \quad t \in [0, t_1],$$

и соответствующие гамильтоновы векторные поля $\vec{h}_{f_1}, \vec{h}_{g_t} \in \operatorname{Vec}(T^*M)$. Обозначим векторы

$$\xi_1 = \vec{h}_{f_1}(\lambda_0), \ \zeta_t = \vec{h}_{g_t}(\lambda_0) \in T_{\lambda_0}(T^*M).$$

Определим пространство

$$E = \operatorname{span}(\xi_1, \ \zeta_t \mid t \in [0, t_1]) \subset T_{\lambda_0}(T^*M),$$

а также пространство

$$\Sigma = E / \left(\ker \sigma|_E \right),$$

где $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ есть каноническая симплектическая 2-форма на симплектическом многообразии T^*M. Обозначим через $\underline{\zeta}_t \in \Sigma$ проекцию вектора $\zeta_t \in E$, а через $\Pi \subset \Sigma$ — проекцию пространства $E \cap \ker \pi_*$ при отображении $E \to \Sigma$. Для элемента $\underline{\zeta} \in \Sigma$ обозначим его косоортогональное дополнение $\underline{\zeta}^{\angle} = \{\alpha \in \Sigma \mid \sigma(\underline{\zeta}, \alpha) = 0\}$, аналогично определяется косоортогональное дополнение $\Pi^{\angle} = \{\alpha \in \Sigma \mid \sigma(v, \alpha) = 0 \ \ \forall \, v \in \Pi\}$ подпространства $\Pi \subset \Sigma$.

Теорема 18 (Теорема 12.42 [3]). *Момент времени $s \in (0, t_1]$ сопряжен начальному моменту 0 тогда и только тогда, когда существует непостоянное решение $y(t)$, $t \in [0, s]$, уравнения*

$$l(t)\dot{y} = \sigma(\dot{\underline{\zeta}}_t, y)\dot{\underline{\zeta}}_t, \qquad y(t) \in \Sigma, \tag{63}$$

с граничными условиями

$$\exists \, \nu \in \Pi^{\angle} \cap \underline{\zeta}_s^{\angle} \quad \text{такое, что} \quad (y(0) + \nu) \in \Pi, \quad (y(s) + \nu) \wedge \underline{\zeta}_s = 0. \tag{64}$$

Теперь предположим, что существует такое $k \geqslant 2$, что векторные поля

$$f_1, \ f_2, \ (\operatorname{ad} f_1) f_2, \ \dots, \ (\operatorname{ad} f_1)^{k-1} f_2$$

линейно независимы в каждой точке некоторой окрестности хорошей анормальной траектории Γ. Более того, пусть существуют гладкие функции a_i, α, для которых в каждой точке этой окрестности

$$(\operatorname{ad} f_1)^k f_2 = \sum_{i=0}^{k-1} a_i (\operatorname{ad} f_1)^i f_2 + \alpha f_1. \tag{65}$$

Тогда

$$\zeta_t^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\Gamma(t))\, \zeta_t^{(i)} + \alpha(\Gamma(t))\, \xi_1, \qquad t \in [0, t_1], \tag{66}$$

откуда $\dim E = k$ и $\Pi = \{0\}$. Граничные условия (64) принимают форму

$$y(0) \in \underline{\zeta}_s^{\angle}, \qquad (y(s) - y(0)) \wedge \underline{\zeta}_s = 0. \tag{67}$$

Сопряженные точки вдоль анормальных круговых траекторий На основе представленных в предыдущем пункте результатов докажем локальную оптимальность круговых траекторий в субримановой $(2,3,5,8)$-задаче.

Теорема 19. *Пусть анормальная геодезическая* $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to G$ *проецируется на плоскость* (x_1, x_2) *в окружность. Тогда любой промежуток* $(0, t_1]$, $t_1 > 0$*, свободен от сопряженных времен. Поэтому любая траектория* $\Gamma|_{[0,t_1]}$, $t_1 > 0$*, локально оптимальна в сильном смысле.*

Доказательство. Утверждение теоремы инвариантно относительно поворотов и растяжений плоскости (x_1, x_2), поэтому будем считать, что проекция траектории Γ на плоскость (x_1, x_2) есть окружность

$$\gamma(t) = (\sin t, 1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

От противного, пусть $s > 0$ есть сопряженное время к начальному моменту 0 для анормальной траектории Γ.

Окружность $\gamma(t)$ есть траектория векторного поля $(1 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, потому анормальная траектория $\Gamma(t)$ есть траектория векторного поля

$$f_1 = (1 - x_2) X_1 + x_1 X_2,$$

то есть выполнено условие (62). Дополним это поле до базиса распределения D полем

$$f_2 = -x_1 X_1 + (1 - x_2) X_2$$

в области $\Omega = \{x \in G \mid x_1^2 + (1 - x_2)^2 \neq 0\}$, содержащей кривую Γ. Вычислим последовательно коммутаторы:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} f_1)f_2 &= (x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_4} + \\
&\quad + (x_1^2+(1-x_2)^2)x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{1}{2}x_1^2(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_6} + \\
&\quad + x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)x_2\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{1}{2}(x_1^2+(1-x_2)^2)x_2^2\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
(\operatorname{ad} f_1)^2 f_2 &= (x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_4} + x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_5} + \\
&\quad + x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_6} + \\
&\quad + \left(x_1^4+x_1^2(1-x_2)+(1-x_2)^3x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_7} + x_1x_2(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
(\operatorname{ad} f_1)^3 f_2 &= -x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_4} + (x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_5} + \\
&\quad + \left(-x_1^4+(1-x_2)^4\right)\frac{\partial}{\partial x_6} + x_1(x_1^2+(-1+x_2)^2)(3-4x_2)\frac{\partial}{\partial x_7} + \\
&\quad + \left(x_1^4-x_1^2(-1+x_2)+(1-x_2)^3x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
(\operatorname{ad} f_1)^4 f_2 &= -(x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_4} - x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_5} - \\
&\quad - 4x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_6} - \\
&\quad - \left(4x_1^4+x_1^2(1-x_2)+(1-x_2)^3(3-4x_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_7} - \\
&\quad - x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(3-4x_2)\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
(\operatorname{ad} f_1)^5 f_2 &= x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_4} - (x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_5} + \\
&\quad + 4(x_1^4-(1-x_2)^4)\frac{\partial}{\partial x_6} - x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(15-16x_2)\frac{\partial}{\partial x_7} - \\
&\quad - \left(4x_1^4+x_1^2(1-x_2)-(1-x_2)^3(3-4x_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
(\operatorname{ad} f_1)^6 f_2 &= (x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_4} + x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_5} + \\
&\quad + 16x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_6} + \\
&\quad + \left(16x_1^4+x_1^2(1-x_2)-(1-x_2)^3(15-16x_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_7} - \\
&\quad - \left(x_1(x_1^2+(1-x_2)^2)(15-16x_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_8}.
\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что в области Ω поля

$$f_1,\ f_2,\ (\operatorname{ad} f_1)f_2,\ \ldots,\ (\operatorname{ad} f_1)^5 f_2$$

линейно независимы, а

$$(\operatorname{ad} f_1)^6 f_2 = -4(\operatorname{ad} f_1)^2 f_2 - 5(\operatorname{ad} f_1)^4 f_2.$$

То есть равенство (65) выполняется для

$$k = 6, \tag{68}$$
$$\alpha = a_1 = a_3 = a_5 = 0, \qquad a_2 = -4, \qquad a_4 = -5. \tag{69}$$

Поэтому уравнение (66) и граничные условия (67) принимают вид

$$\zeta_t^{(6)} = -4\zeta_t^{(2)} - 5\zeta_t^{(4)},$$
$$y(0) \in \underline{\zeta}_s^{\angle}, \qquad (y(s) - y(0)) \wedge \underline{\zeta}_s = 0.$$

Далее, имеем

$$E = \operatorname{span}(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4, \vec{h}_5 + \vec{h}_6, \vec{h}_7, \vec{h}_6 - \vec{h}_8)\Big|_{\lambda_0},$$
$$\ker \sigma|_E = \operatorname{span}(\vec{h}_3 - \vec{h}_5 - \vec{h}_6, \vec{h}_7, \vec{h}_6 - \vec{h}_8)\Big|_{\lambda_0},$$
$$\Sigma \simeq \operatorname{span}(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4)\Big|_{\lambda_0},$$
$$\underline{\zeta}_t = \sum_{i=1}^{4} w_i(t)\vec{h}_i(\lambda_0), \qquad w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 2t - \sin t, \quad w_4 = 1 - \cos t,$$
$$l(t) = \cos t - 2.$$

Разложим

$$y(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i(t)\vec{h}_i(\lambda_0) \in \Sigma,$$

тогда уравнение (63) принимает форму

$$(\cos t - 2)\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \dot{c}_4 \end{pmatrix} = (c_2(\cos t - 2) - c_1 \sin t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\dot{c}_1 = 0, \tag{70}$$
$$\dot{c}_2 = 0, \tag{71}$$
$$\dot{c}_3 = c_2(2 - \cos t) + c_1 \sin t, \tag{72}$$
$$\dot{c}_4 = c_2 \sin t + c_1 \frac{\sin^2 t}{2 - \cos t}. \tag{73}$$

Граничные условия (67) принимают форму

$$c_1(0)(1 - \cos s) + c_2(0)(2s - \sin s) - c_3(0) = 0,$$
$$c_1(s) = c_1(0),$$
$$c_3(s) - c_3(0) = (c_2(s) - c_2(0))(2s - \sin s), \tag{74}$$
$$c_4(s) - c_4(0) = (c_2(s) - c_2(0))(1 - \cos s). \tag{75}$$

Покажем, что из равенств (70)–(75) следует, что $c_i(t) \equiv \text{const}$, т.е. $y(t) \equiv \text{const}$, что и завершит доказательство этой теоремы с учетом теорем 17, 18.

Уравнения (70), (71) означают, что $c_1(t), c_2(t) \equiv \text{const}$. Тогда из уравнений (72), (73) получаем

$$c_3(t) = c_3(0) + c_2(2t - \sin t) + c_1(1 - \cos t), \tag{76}$$

$$c_4(t) = c_4(0) + c_2(1 - \cos t) + c_1 F(t), \qquad F(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 \tau}{2 - \cos \tau}\, d\tau. \tag{77}$$

После этого из краевых условий (74), (75) следует, что

$$c_2(2s - \sin s) + c_1(1 - \cos s) = 0, \tag{78}$$

$$c_2(1 - \cos s) + c_1 F(s) = 0, \tag{79}$$

где $s > 0$ есть сопряженное время. Если $c_1 = 0$, то $c_2 = 0$, и из равенств (76), (77) получаем $c_3(t), c_4(t) \equiv \text{const}$. Поэтому рассмотрим случай $c_1 \neq 0$. Тогда равенства (78), (79) дают

$$c_2 = -c_1 \frac{1 - \cos s}{2s - \sin s} = -c_1 \frac{F(s)}{1 - \cos s},$$

откуда

$$G(s) = F(s), \tag{80}$$

$$G(t) = \frac{(1 - \cos t)^2}{2t - \sin t}.$$

Далее, $F(0) - G(0) = 0$, а при $t > 0$

$$F'(t) - G'(t) = \frac{(3 - 3\cos t - 2t \sin t)^2}{(2 - \cos t)(2t - \sin t)^2} \geqslant 0,$$

причем равенство здесь принимается лишь в изолированных точках t. Поэтому $F(t) - G(t) > 0$ при $t > 0$, что противоречит (80). □

Отметим, что если анормальная траектория Γ проецируется на плоскость (x_1, x_2) в коническое сечение, отличное от окружности, то равенство (68) сохраняется, однако коэффициенты α, a_i в уравнении (65) становятся непостоянными функциями, и уравнение (66) не представляется возможным исследовать. Впрочем, если для эллиптических проекций доказать, что времена полного 1-го, 2-го, 3-го, ... обходов эллипса не являются сопряженными, то из гомотопической инвариантности индекса Маслова [27] будет следовать полное отсутствие сопряженных точек на таких траекториях.

5.5 Итоговый результат об оптимальности

Суммируем результаты этого раздела. Пусть $\Gamma : \mathbb{R} \to G$ есть анормальная траектория. Для любого $a \in \mathbb{R}$ обозначим сужение $\Gamma_a = \Gamma|_{[a,+\infty)}$. Обозначим *первое сопряженное время* вдоль Γ_a через

$$t^1_{\text{conj}}(\Gamma_a) = \inf \{\tau > a \mid \tau \text{ — сопряженное время к моменту } a\}.$$

Теорема 20. *Пусть* $\Gamma : \mathbb{R} \to G$ *есть гладкая натурально параметризованная анормальная траектория в субримановой* $(2,3,5,8)$*-задаче, а* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *есть ее проекция на плоскость* (x_1, x_2).

(1) *Если* γ *есть прямая, то* $t_{\text{cut}}(\Gamma_a) = +\infty$ *для любого* $a \in \mathbb{R}$. *Только в этом случае* Γ *есть метрическая прямая.*

(2) *Если* γ *есть коническое сечение, то* Γ *есть геодезическая, и* $t_{\text{cut}}(\Gamma_a) > a$ *для любого* $a \in \mathbb{R}$. *Если при этом* γ *есть эллипс или парабола, то* $t_{\text{cut}}(\Gamma_a) < +\infty$ *для любого* $a \in \mathbb{R}$.

(3) *Если* γ *есть окружность, то* $t^1_{\text{conj}}(\Gamma_a) = +\infty$ *и* $t_{\text{cut}}(\Gamma_a) \geqslant a + \mu T$ *для любого* $a \in \mathbb{R}$, *где* T *есть период окружности, а число* $\mu \approx 1{,}46$ *задается условиями* (57), (58).

6 Заключение

Результаты п. 4 показывают, что даже для левоинвариантных распределений анормальное множество может иметь довольно сложную структуру — быть незамкнутым и неполуаналитическим множеством, не быть гладким многообразием. С другой стороны, известные результаты субримановой геометрии позволяют предположить, что анормальное множество субаналитично и имеет коразмерность не менее 1. Возможно, для левоинвариантных распределений ранга 2 нижнюю оценку коразмерности можно повысить до 3.

Результаты п. 5 об оптимальности анормальных траекторий субримановой $(2,3,5,8)$-структуры весьма неполны. Несмотря на явную параметризацию анормального геодезического потока элементарными функциями (п. 3), даже исследование локальной (не говоря о глобальной) оптимальности встречает существенные аналитические препятствия.

Авторы выражают благодарность А.А.Аграчеву и Э. Ле Донне за полезные обсуждения оптимальности субримановых геодезических.

Список литературы

[1] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications* (Mathematical Surveys and Monographs, Volume 91), (2002) American Mathematical Society.

[2] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2005.

[3] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry* (Lecture Notes: Cambridge Studies in Advanced Mathematics) (2019)

[4] Сачков Ю.Л. *Введение в геометрическую теорию управления.* – М.: URSS, 2021.

[5] Ю. Л. Сачков, Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях, *УМН*, 77:1(463) (2022), 109–176

[6] *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$//Дифференциальные уравнения, 2017, том 53, № 3, с. 362–374.

[7] Yu. L Sachkov, E. F. Sachkova, Symmetries and Parameterization of Abnormal Extremals in the Sub-Riemannian Problem with the Growth Vector $(2, 3, 5, 8)$, Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 15, no. 4, pp. 579–587

[8] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$, Математический сборник, 211 (2020), No. 10, 112–138

[9] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше, *Матем. сб.*, 2018, 5, 74–119

[10] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М: Физматгиз, 1961.

[11] R. Montgomery, Abnormal minimizers, *SIAM J. Control Optim.* 1994, 32(6), 1605–1620

[12] R. Montgomery, Survey of singular geodesics, *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 1996, 144.

[13] А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем. *Докл. АН СССР*, 1987, 295, 4, 777–781

[14] F. Boarotto, D. Vittone, A dynamical approach to the Sard problem in Carnot groups, Journal of Differential Equations, 269, 65, 2020, 4998–5033

[15] E. Le Donne, G. P. Leonardi, R. Monti, D. Vittone, Extremal polynomials in stratified groups, Communications in Analysis and Geometry, 26, 4, 2018, 723–757

[16] E. Hakavuori, E. Le Donne, Non-minimality of corners in subriemannian geometry. *Inventiones mathematicae*, 2016, 206 (3), 693–704

[17] E. Hakavuori, E. Le Donne, Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups. arXiv:1806.09375, *Journal of Differential Geometry*, to appear

[18] E. Hakavuori, Infinite geodesics and isometric embeddings in Carnot groups of step 2. arXiv:1905.03214 , *SIAM Journal on Control and Optimization*, to appear

[19] W. Liu, H. Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-2 distributions. *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 564, Vol. 118, November 1995

[20] Сачков Ю.Л., Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Математический сборник*, 2003, 194 (9), 63–90.

[21] Сачков Ю.Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 2, S. 95–116.

[22] Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, № 4, С. 123–150.

[23] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.

[24] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 958–988.

[25] Yu. Sachkov, Conjugate Time in the Sub-Riemannian Problem on the Cartan Group. *J Dyn Control Syst* 27, 709–751 (2021).

[26] A. Ardentov, E. Hakavuori Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group. *ESAIM:COCV*, 28 (2022) 12.

[27] Agrachev A.A., Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems. In: Nonlinear and Optimal Control Theory, Lecture Notes in Mathematics. CIME, 1932, Springer Verlag, 2008, 1–59.

[28] Горески М., Макферсон Р. *Стратифицированная теория Морса.* — М.: Мир, 1991.

[29] E. Bierstone, P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 67 (1988), 5–42.

[30] H. Hironaka, Subanalytic sets. *Number theory, algebraic geometry, and commutative algebra, in honor of Y. Akizuki*, pp. 453–493. Tokyo: Kinokuniya Publications, 1973.

[31] Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, *Мат. сборник* (2011), Т. 49, No. 5, С. 31–54.