Процессы управления

УДК 517.977

СУБРИМАНОВА СФЕРА КАРТАНА[1]

© Ю. Л. Сачков[2,*]

[2]Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский

[*]E-mail: yusachkov@gmail.com

Поступило 14.06.2022 г.

Аннотация. Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Картана с 3-мерным инвариантным многообразием основных симметрий.

Ключевые слова: группа Картана, субриманова геометрия, субриманова сфера.

1 Группа Картана

Алгебра Картана — это свободная нильпотентная алгебра $\mathfrak{g}$ с 2-мя образующими глубины 3. В ней существует базис $X_1, \dots, X_5$, в котором ненулевые скобки имеют вид

$$[X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = X_4, \qquad [X_2, X_3] = X_5.$$

Алгебра Картана имеет градуировку

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)},\\
&\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{span}(X_1, X_2), \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3, \qquad \mathfrak{g}^{(3)} = \operatorname{span}(X_4, X_5),\\
&[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}, \qquad \mathfrak{g}^{(4)} = \{0\},
\end{aligned}$$

поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$ можно ввести закон умножения, превращающий это пространство в группу Картана: $G \cong \mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$, см. [14] и статьи, цитированные в этой работе. В этой модели левоинвариантные поля, порождающие алгебру Картана, имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial w}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

2 Постановка субримановой задачи на группе Картана

2.1 Геометрическая постановка

Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S, с центром масс c.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/

2.2 Задача оптимального управления

Эту геометрическую задачу можно переформулировать [13] как задачу оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, z, v, w) \in G = \mathbb{R}^5, \tag{1}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{3}$$

Это субриманова задача для субримановой структуры на $\mathbb{R}^5$, заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером. Эта субриманова структура — единственная, с точностью до автоморфизма группы Картана, левоинвариантная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Следовательно, можно считать, что $q_0 = \mathrm{Id} = (0, \dots, 0)$.

3 Особенности задачи

Субриманова задача на группе Картана есть простейшая левоинвариантная задача со следующими свойствами:

- она имеет анормальные кратчайшие, касающиеся каждого вектора распределения,
- это следующая по сложности после задачи Дидоны задача на свободной группе Карно максимального роста (ее вектор роста равен $(2, 3, 5)$).

Эта задача — единственная свободная нильпотентная субриманова задача глубины 3 с интегрируемым по Лиувиллю нормальным гамильтоновым полем принципа максимума Понтрягина (неинтегрируемыми по Лиувиллю являются свободные нильпотентные задачи глубины 3, ранга более 2 [4], а также глубины более 3, ранга не менее 2 [1]).

Распределение $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2)$ имеет 14-мерную алгебру инфинитезимальных симметрий — особую алгебру $\mathfrak{g}_2$, этот факт восходит к знаменитой «пятимерной» работе Эли Картана [5].

Наконец, субриманова задача на группе Картана доставляет нильпотентную аппроксимацию любой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$, в частности:

- задачи о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [9, 10],
- машины с двумя прицепами [11],
- задачи о движении электрического заряда в плоскости под действием магнитного поля [12].

Любой из этих причин достаточно для детального исследования субримановой задачи на группе Картана.

4 Ранее полученные результаты

Напомним некоторые из результатов, полученных в предыдущих работах [13–16].

- Анормальные траектории (соответствующие анормальному случаю $\nu = 0$ принципа максимума Понтрягина [2, 3]):
  - однопараметрические подгруппы $e^{\pm t(u_1 X_1 + u_2 X_2)}$, $u_i \equiv \mathrm{const}$,
  - проецируются на плоскость (x, y) в прямые,
  - поэтому оптимальны,
  - нестрого анормальны, то есть одновременно являются нормальными.

- Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle\lambda, X_1\rangle^2 + \langle\lambda, X_2\rangle^2)/2$:

$$\begin{aligned}&\dot\theta = c, \qquad \dot c = -\alpha\sin(\theta+\beta), \qquad \dot\alpha = \dot\beta = 0,\\ &\dot q = \cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2.\end{aligned} \tag{4}$$

- В фазовом цилиндре уравнения маятника (4) введены координаты (φ, k), в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot\varphi = \sqrt{\alpha}, \qquad \dot k = 0.$$

- Получена параметризация геодезических экспоненциальным отображением:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \operatorname{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec H}(\lambda) = q(t),\\ &C = \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2).\end{aligned}$$

- Описана группа симметрий экспоненциального отображения

$$\begin{aligned}&\operatorname{Sym} = \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\\ &\mathrm{SO}(2) = \{e^{tX_0} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad X_0 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial w},\\ &\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i \mid i = 1, \dots, 4\},\end{aligned}$$

  дискретная подгруппа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ порождена отражениями ε^1, ε^2 маятника в осях θ, c:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^1 : (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz),\\ &\varepsilon^2 : (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz).\end{aligned}$$

- Явно описано время разреза $t_{\mathrm{cut}} : C \to (0, +\infty]$.

5 Субримановы расстояние и сферы

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (*метрика Карно-Каратеодори*) определяется следующим образом:

$$d(q_0, q_1) = \inf\left\{\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \mid \text{ управление } (u_1, u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1\right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Картана $L_q : q' \mapsto qq'$,

$$\begin{aligned}&d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),\\ &L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).\end{aligned}$$

В силу того, что группа Картана есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с *дилатациями*:

$$\begin{aligned}&\delta_\beta : (x, y, z, v, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 v, \beta^3 w), \qquad \beta > 0,\\ &d(\mathrm{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\mathrm{Id}, q),\\ &\delta_\beta(S_R(\mathrm{Id})) = S_{\beta R}(\mathrm{Id}).\end{aligned}$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\mathrm{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \mathrm{Id}) = 1\}.$$

Единичная сфера S параметризуется экспоненциальным отображением:

$$S = \{\operatorname{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C,\ t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \geq 1\}.$$

Субриманова структура и сфера инвариантны относительно группы симметрий $\operatorname{Sym} = \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$g(S) = S, \qquad g \in \operatorname{Sym}.$$

Основной объект этой работы — сечение сферы трехмерным инвариантным многообразием основных симметрий ε^1, ε^2:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{z = V = 0\},\\
&V(q) = xv + yw - z(x^2 + y^2)/2,
\end{aligned}$$

а также его фактор по группе вращений

$$\widehat{S} = \widetilde{S} / \mathrm{SO}(2).$$

Мы ограничиваемся описанием лишь сечения $\widetilde{S}$, так как полная сфера S не допускает столь подробного исследования ввиду сложности ее параметризации: функция $t_{\mathrm{cut}}(\lambda)$, задающая время разреза на группе Картана, в общем случае есть корень уравнения в эллиптических функциях, см. [14, 16].

6 Структура фактора $\widehat{S}$

На Рис. 1 изображен фактор сечения сферы $\widehat{S}$ на группе Картана в координатах

$$\begin{aligned}
&a = \frac{r^2 - \sigma^2}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}}, \qquad b = \frac{2r\sigma}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}},\\
&r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \sigma = \rho - \frac{r^3}{6}, \qquad \rho = \sqrt{v^2 + w^2}.
\end{aligned}$$

Кривая $\widehat{S}$ параметризуется параметром $k \in [0, 1]$. Имеется стратификация

$$\widehat{S} = \left(\sqcup_{i=1}^3 \gamma_i\right) \sqcup \{A, C_0, C_1\}, \tag{5}$$

$A = e^{\cos\theta X_1 + \sin\theta X_2}$ есть точка на анормальной траектории, $k = 0$,

C_0 есть точка на периодической эйлеровой эластике-восьмерке (см. Рис. 8 [13]), (6)

$x = y = 0,\ k = k_0 \approx 0.9,$

$$\begin{aligned}
&C_1 :\ p_z(k) = p_V(k),\ k = k_1 \approx 0.8,\\
&\gamma_1 :\ k \in (0, k_1),\\
&\gamma_2 :\ k \in (k_1, k_0),\\
&\gamma_3 :\ k \in (k_0, 1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Определение чисел $k_0, k_1 \in (0, 1)$, а также функций $p_z, p_V : (0, 1) \to \mathbb{R}$ приведено в работе [14].

На Рис. 1:

- надпись e^{tX_i} над горизонтальным отрезком, соединяющим точки q_0 и A, обозначает анормальные траектории, соединяющие начальную точку $q_0 = \mathrm{Id}$ с точками сферы, проецирующимися в точку A,
- надпись $x = y = 0$ справа от точки C_0 обозначает точки периодических эластик-восьмерок,
- точка C_0 имеет координаты $(a, b) = (0, b_0)$, где $b_0 \approx -0{,}004$.

В последующих теоремах для краткости допускается некоторая вольность обозначений: точки множества $\widehat{S}$ рассматриваются иногда как окружности в G, а иногда как точки в G.

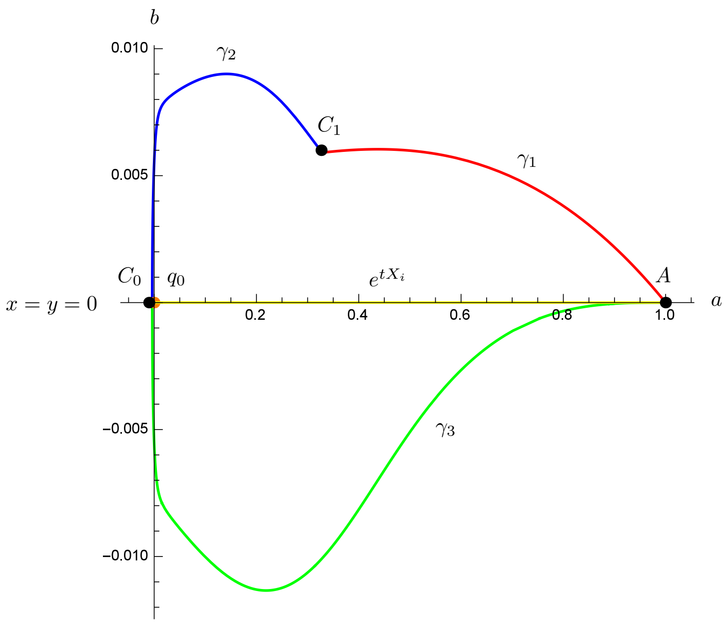

Рис. 1: Фактор сечения сферы $\widehat{S}$ на группе Картана

7 Характеризация точек фактора $\widehat{S}$

Напомним вкратце некоторые необходимые понятия субримановой геометрии, подробнее см. [2,3].

В рассматриваемой задаче анормальные траектории, выходящие из точки $q_0 = \mathrm{Id}$, суть однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения; при этом они являются субримановыми кратчайшими, т.е. реализуют минимум функционала длины (3) между любыми своими точками.

Первая сопряженная точка к q_0 на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою локальную оптимальность.

Точка Максвелла на геодезической есть точка, в которую приходят более одной геодезической одинаковой длины, начинающихся в q_0.

Точка разреза на геодезической есть точка, в которой геодезическая теряет свою (глобальную) оптимальность.

Теорема 1. (1) *A есть точка на анормальной кратчайшей,*

(2) *C_i суть сопряженные точки к q_0, точки Максвелла, точки разреза,*

(3) *$q \in \gamma_i$ суть точки Максвелла, точки разреза, не сопряженные точки к q_0.*

8 Кратность точек фактора $\widehat{S}$

Кратностью точки $q \in G$ называется мощность

$$\mu(q) = \mathrm{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}.$$

Теорема 2. (1) $\mu(A) = 1$,

(2) $\mu(C_i) = \mathfrak{c}$ *(континуум $\cong S^1$),*

(3) $q \in \gamma_i \quad \Rightarrow \quad \mu(q) = 2.$

9 Регулярность $\widehat{S}$ и $\widetilde{S}$

Теорема 3. (1) *кривые γ_i аналитичны и регулярны,*

(2) *A, C_i суть особые точки, в них $\widehat{S}$ негладкая, но липшицева,*

(3) *замыкания*

(3.1) $\overline{\gamma}_1 = \gamma_1 \cup \{A, C_0\}$,
(3.2) $\overline{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_0, C_1\}$,
(3.3) $\overline{\gamma}_3 = \gamma_1 \cup \{C_0, A\}$,

суть гладкие кривые класса C^∞.

Теорема 4. *$\widetilde{S}$ есть липшицево многообразие, аналитически диффеоморфное $\widehat{S} \times S^1$ и билипшицево эквивалентное (потому гомеоморфное) тору $\mathbb{T}^2$.*

10 Аналитические свойства фактора $\widehat{S}$

Множество называется *аналитическим*, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется *полуаналитическим* [6], если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется *субаналитическим* [7], если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Теорема 5. (1) *Множество $\widehat{S} \setminus \{A\}$ полуаналитично, потому субаналитично.*

(2) *В окрестности точки A кривая γ_3 есть график гладкой неаналитической функции.*

(3) *Поэтому множество $\widehat{S}$ несубаналитично.*

(4) *Следовательно, сфера S несубаналитична.*

11 Exp-log категория

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит exp-log *категории* [18], если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадлежит exp-log категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого — функции из exp-log категории.

Теорема 6. *В окрестности точки A кривая γ_3 есть график функции из* exp-log *категории. Поэтому множество $\widehat{S}$ принадлежит* exp-log *категории.*

12 Стратификация Уитни

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к *стратификации Уитни* [17]:

- если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни [7],
- если множество принадлежит exp-log категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни [8].

Теорема 7. *Разбиение (5) есть стратификация Уитни.*

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания по изложению.

Список литературы

[1] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше, *Матем. сб.*, 209:5 (2018), 74–119

[2] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, Berlin. 2004.

[3] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019

[4] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups, Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 759-774

[5] E. Cartan, Lès systemes de Pfaff a cinque variables et lès equations aux derivees partielles du second ordre, *Ann. Sci. Ècole Normale* **27** (1910), 3: 109–192.

[6] S. Łojasiewicz, *Ansembles semi-analitiques*, Inst. Hautes Ètudes Sci., Bures-sur-Yvette, 1964.

[7] H. Hironaka, Subanalytic sets, *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Tokyo, Kinokuniya, 1973, p. 453–493.

[8] Ta Lê Loi, Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures, Illinois J. Math. Volume 42, Issue 2 (1998), 347-356.

[9] Li Z., Canny J., Motion of two rigid bodies with rolling constraint// IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1(6), pp. 62–72, 1990

[10] Marigo A., Bicchi A., Rolling bodies with regular surface: the holonomic case, in book: “Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control”, publ. Univ. Colorado, Boulder, G. Ferreyra et al. Eds, pp. 241–256, 1999

[11] Laumond J.P. Nonholonomic motion planning for mobile robots// Preprint No. 98211. Toulouse, France: LAAS-CNRS, 1998.

[12] Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F. Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics// Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications. Singapore: World Scientific, 2002. P. 183–202.

[13] Сачков Ю.Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2003, 194 (9), 63–90

[14] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.

[15] Yu. L. Sachkov, Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27, 709–751 (2021).

[16] A. Ardentov, E. Hakavuori, Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, *ESAIM:COCV*, 28 (2022) 12.

[17] Горески М., Макферсон Р. *Стратифицированная теория Морса*, М.: Мир, 1991.

[18] L. Van Den Dries, A. Macintyre, D. Marker, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, *Ann. of Math.* (2) 140 (1994), 183–205.