Сублоренцева задача на группе Гейзенберга[1]

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова

Ключевые слова: Сублоренцева геометрия, группа Гейзенберга, оптимальное управление, геометрическая теория управления.

Рассматривается левоинвариантная сублоренцева задача на группе Гейзенберга. Построен оптимальный синтез, описаны сублоренцево расстояние и сферы.

1. Постановка задачи оптимального управления

Группа Гейзенберга есть пространство $M \simeq \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ с законом умножения

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2).$$

Это трехмерная нильпотентная группа Ли с левоинвариантным репером

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

Левоинвариантную субриманову задачу на группе Гейзенберга можно поставить как задачу быстродействия

$$\begin{aligned}
&\dot q = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in M, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1,\\
&q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0,0,0), \quad q(t_1) = q_1,\\
&t_1 \to \min .
\end{aligned}$$

Эта задача — краеугольный камень субримановой геометрии [1–6].

Естественно рассмотреть вариацию этой задачи — левоинвариантную сублоренцеву задачу на группе Гейзенберга

$$\dot q = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in M, \tag{2}$$
$$u \in U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 = 1,\ u_1 > 0\}, \tag{3}$$
$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0,0,0), \quad q(t_1) = q_1, \tag{4}$$
$$t_1 \to \max . \tag{5}$$

Задача быстродействия $t_1 \to \min$ для системы (2)–(4) не имеет решения. Поэтому рассматривается задача медленнодействия (5).

Задачу (2)–(5) в несколько другой терминологии рассматривал М. Гроховский [7, 8].

2. Множество достижимости

Теорема 1 [8]. *Множество достижимости системы* (2), (3) *из точки* q_0 *за произвольное неотрицательное время есть*

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in M \mid -x^2 + y^2 + 4|z| < 0,\ x > 0\} \cup \{q_0\}.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/.

3. Экспоненциальное отображение

Теорема 2 [7, 8]. *Анормальных траекторий нет.*

Нормальные экстремальные траектории параметризуются параметрами $(c, \psi) \in \mathbb{R}^2$ *следующим образом. Если* $c = 0$, *то*

$$x = t \operatorname{ch} \psi, \quad y = t \operatorname{sh} \psi, \quad z = 0. \tag{6}$$

Если $c \neq 0$, *то*

$$x = \frac{\operatorname{sh}(\psi + ct) - \operatorname{sh} \psi}{c}, \quad y = \frac{\operatorname{ch}(\psi + ct) - \operatorname{ch} \psi}{c}, \quad z = \frac{\operatorname{sh}(ct) - ct}{2c^2}. \tag{7}$$

Обозначим $C = \mathbb{R}^2_{\psi,c}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $N = C \times \mathbb{R}_+$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \setminus \{q_0\} = \operatorname{int} \mathcal{A}$, тогда экспоненциальное отображение

$$\operatorname{Exp} : N \to \widetilde{\mathcal{A}}, \qquad (\psi, c, t) \mapsto (x, y, z) \tag{8}$$

параметризовано формулами (6), (7).

Теорема 3. *Экспоненциальное отображение* (8) *есть вещественно-аналитический диффеоморфизм. Обратное отображение* $\operatorname{Exp}^{-1} : \widetilde{\mathcal{A}} \to N$ *также вещественно-аналитично и задается формулами:*

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \operatorname{arth} \frac{y}{x}, \quad c = 0, \quad t = \sqrt{x^2 - y^2},$$

$$z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \operatorname{arth} \frac{y}{x} - p, \quad c = (\operatorname{sgn} z) \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2p - 2p}{2z}}, \quad t = \frac{2p}{c},$$

где $p = \beta\left(\frac{z}{x^2 - y^2}\right)$, *а* β *есть обратная функция к функции* $\alpha(p) = \frac{\operatorname{sh} 2p - 2p}{8 \operatorname{sh}^2 p}$.

4. Оптимальный синтез

Теорема 4. *Для любой точки* $q_1 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *экстремальная траектория* $q(t) = \operatorname{Exp}(\psi, c, t)$, $t \in [0, t_1]$, *есть единственная оптимальная траектория, соединяющая* q_0 *с* q_1, *где* $(\psi, c, t_1) = \operatorname{Exp}^{-1}(q_1) \in N$.

5. Сублоренцево расстояние

Для произвольной точки $q_1 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ обозначим

$$d(q_1) = \sup\{t_1 \mid \exists \text{ траектория } q(\cdot) : \ q(0) = q_0, \ q(t_1) = q_1\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $q = (x, y, z) \in \widetilde{\mathcal{A}}$. *Тогда*

$$d(q) = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \frac{p}{\operatorname{sh} p}, \qquad p = \beta\left(\frac{z}{x^2 - y^2}\right).$$

В частности, $d(x, y, 0) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Функция $d : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ *вещественно-аналитична.*

Как показано в работе [8], сублоренцево расстояние $d(q)$ допускает оценку снизу функцией $\sqrt{x^2 - y^2 - 4|z|}$ и не допускает оценки сверху этой функцией, умноженной на какую-либо константу.

Теорема 6. *Для любого* $q = (x, y, z) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *справедлива оценка* $d(q) \leqslant \sqrt{x^2 - y^2}$.

6. Симметрии

Теорема 7. *Гиперболические повороты* $y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$ *и отражения* $(x,y,z)\mapsto(x,-y,z)$, $(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$ *сохраняют сублоренцево расстояние* d, *а дилатации* $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}$ *растягивают его:* $d(e^{sY}(q)) = e^s d(q)$.

7. Сублоренцевы сферы

Сублоренцевы сферы

$$S(R) = \{q \in \mathcal{A} \mid d(q) = R\}, \qquad R > 0,$$

переходят друг в друга при дилатациях $e^{sY}\ :\ (x,y,z)\mapsto(e^s x, e^s y, e^{2s} z)$, поэтому опишем единичную сферу $S = S(1)$.

Теорема 8. (1) *Сублоренцева сфера* S *есть регулярное вещественно-аналитическое многообразие, диффеоморфное* $\mathbb{R}^2$.

(2) *пусть* $q = \operatorname{Exp}(\psi, c, 1) \in S$, $(\psi, c) \in C$, *тогда касательное пространство к сфере в точке* q *есть*

$$T_q S = \left\{ v = \sum_{i=1}^{3} v_i X_i(q) \mid -v_1 \operatorname{ch}(\psi + c) + v_2 \operatorname{sh}(\psi + c) + v_3 c = 0 \right\}.$$

(3) S *есть график функции* $x = \sqrt{y^2 + f(z)}$, *где* $f(z) = e \circ k(z)$, $e(w) = \frac{\operatorname{sh}^2 w}{w^2}$, $k(z) = b(z)/2$, $b = a^{-1}$, $a(c) = \frac{\operatorname{sh} c - c}{2c^2}$.

(4) *Функция* $f(z)$ *вещественно-аналитична, четна, строго выпукла, неограниченно строго возрастает при* $z \geqslant 0$, *а при* $z \to 0$ *имеет разложение* $f(z) = 1 + 12z^2 + O(z^4)$.

(5) *Сечение сферы* S *плоскостью* $\{z = \mathrm{const}\}$ *есть ветвь гиперболы* $x^2 - y^2 = f(z)$, $x > 0$. *Сечение сферы* S *плоскостью* $\{x = \mathrm{const} > 1\}$ *есть строго выпуклая кривая* $y^2 + f(z) = x^2$, *диффеоморфная* S^1.

(6) *Сублоренцево расстояние от точки* q_0 *до точки* $q = (x,y,z) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *может быть выражено как* $d(q) = R$, *где* $x^2 - y^2 = R^2 f(z/R^2)$.

(7) *Сублоренцев шар* $B = \{q \in \widetilde{\mathcal{A}} \mid d(q) \leqslant 1\}$ *имеет бесконечный объем в координатах* x, y, z.

8. Заключение

Сублоренцева геометрия есть попытка перенести, насколько это возможно, богатую теорию субримановой геометрии на случай лоренцевой метрики (неопределенной метрики индекса 1). Представленные в этой заметке результаты по сублоренцевой задаче на группе Гейзенберга имеют существенные отличия от известной субримановой задачи на этой группе:

1. Сублоренцева задача не является вполне управляемой.
2. Теорема Филиппова существования оптимальных управлений неприменима напрямую к сублоренцевой задаче.
3. В сублоренцевой задаче все экстремальные траектории оптимальны до бесконечности, поэтому множество разреза и каустика пусты.
4. Сублоренцевы сферы и расстояние вещественно-аналитичны и регулярны.

Было бы интересно понять, насколько сохраняются эти свойства для более общих сублоренцевых задач (например, для левоинвариантных задач на группах Карно).

Авторы выражают благодарность А.А.Аграчеву и Л.В.Локуциевскому за полезные обсуждения рассматриваемой задачи.

Авторы также благодарят рецензента за полезные замечания по изложению в статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вершик А.М., Гершкович В.Я., *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16,*, ВИНИТИ, Москва, 1987. **[2]** V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997. **[3]** R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, Providence, 2002. **[4]** А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005. **[5]** A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry*, Cambridge University Press, 2019. **[6]** Ю.Л. Сачков, *Введение в геометрическую теорию управления*, URSS, M., 2021. **[7]** M. Grochowski, "On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$", *GEOMETRIC SINGULARITY THEORY, BANACH CENTER PUBLICATIONS, INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES, WARSZAWA*, **65** (2004). **[8]** M. Grochowski, "Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function", *Journal of Dynamical and Control Systems*, **12**:2 (2006), 145–160.

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова
Институт программных систем им. А.К.
Айламазяна РАН (Переславль-Залесский)
E-mail: `yusachkov@gmail.com, efsachkova@mail.ru`

Поступило
18.07.2020