Анормальное множество для $(2,3,5,8)$-распределения[1]

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова

Ключевые слова: Субриманова геометрия, анормальные траектории, анормальное множество, свойство Сарда, субаналитичность.

Анормальные траектории представляют особый интерес для субримановой геометрии, так как вблизи них субриманова метрика имеет наиболее сложные особенности [1, 2]. Важный открытый вопрос в субримановой геометрии — описание множества, заполненного анормальными траекториями, выходящими из фиксированной точки. Так, гипотеза Сарда в субримановой геометрии утверждает, что это множество имеет меру нуль. В данной заметке рассматривается это и другие родственные свойства указанного множества для левоинвариантной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$, в продолжение предыдущих работ авторов по этой задаче [3–5].

1. Постановка задачи

Пусть G есть связная односвязная свободная нильпотентная группа Ли ранга 2 глубины 4. Ее алгебра Ли имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_8),\\
&[X_1,\, X_2] = X_3, \quad [X_1,\, X_3] = X_4, \quad [X_2,\, X_3] = X_5, \quad [X_1,\, X_4] = X_6,\\
&[X_2,\, X_4] = [X_1,\, X_5] = X_7, \quad [X_2,\, X_5] = X_8.
\end{aligned}$$

Рассмотрим левоинвариантное распределение $D = \operatorname{span}(X_1, X_2) \subset TG$, оно имеет вектор роста $(2, 3, 5, 8)$. Анормальное множество распределения D, соответствующее единичному элементу $\mathrm{Id} \in G$, определяется как

$$\mathrm{Abn} = \{x(t) \mid x(\cdot) \text{ — анормальная траектория распределения } D,\ x(0) = \mathrm{Id},\ t > 0\}.$$

2. Анормальные траектории

Обозначим $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1 \dots, 8$, $\lambda \in T^*G$. В работе [5] следующее утверждение получено из принципа максимума Понтрягина [6, 7].

Теорема 1. *Липшицева кривая $\lambda \in \mathrm{Lip}([0, t_1], T^*G)$ является анормальной экстремалью тогда и только тогда, когда существует управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^2)$, такое, что:*

$$\begin{aligned}
&\lambda_t \neq 0,\\
&h_1 = h_2 = h_3 = 0,\\
&u_1 h_4 + u_2 h_5 = 0,\\
&\begin{pmatrix} \dot h_4 \\ \dot h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0,
\end{aligned}$$

соответствующая анормальная траектория $x(t) = \pi(\lambda_t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot x = u_1 X_1 + u_2 X_2.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Хорошие анормальные траектории. В случае $(h_4^2+h_5^2)(\lambda_t)\neq 0$ анормальная экстремаль λ_t называется хорошей [2, 7]. В этом случае $u_1=-h_5$, $u_2=h_4$ с точностью до перепараметризации времени. Соответствующие экстремали являются траекториями анормального векторного поля $\vec{A}=-h_5\vec{h}_1+h_4\vec{h}_2$, а траектории задаются анормальным экспоненциальным отображением $\operatorname{Exp}(\lambda,t)=\pi\circ e^{t\vec{A}}(\lambda)$.

Асимптотические траектории. В случае, когда $(h_4^2+h_5^2)(\lambda_t)$ обращается в нуль при некоторых t, для описания анормального множества достаточно рассмотреть кусочно-постоянные управления с не более чем одним переключением. Соответствующие траектории имеют вид

$$x(t)=\begin{cases} e^{t(u_1X_1+u_2X_2)}, & t\in[0,\bar t],\quad \bar t\geqslant 0,\\ e^{(t-\bar t)(v_1X_1+v_2X_2)}\circ e^{\bar t(u_1X_1+u_2X_2)}, & t\geqslant \bar t.\end{cases}$$

При $\bar t>0$ такие траектории имеют угловую точку и ветвятся при $t=\bar t$. При $\bar t=0$ такие траектории называются вырожденными.

3. Свойства анормального множества

Обозначим множества точек в G, заполненные хорошими, асимптотическими и вырожденными траекториями, выходящими из Id, через $\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}$, $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ и $\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}=\operatorname{Exp}(\Pi\times\mathbb{R}_+),\qquad \Pi=(D^2)^{\perp}\cap\mathfrak{g}^*,\\
&\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}=\{e^{v_1X_1+v_2X_2}\circ e^{u_1X_1+u_2X_2}\mid (u_1,u_2),(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\},\\
&\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}=\{e^{u_1X_1+u_2X_2}\mid (u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Предложение 1. *Выполняются соотношения*

$$\mathrm{Abn}=\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}\cup\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}},\qquad \mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}=\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}\cap\mathrm{Abn}_{\mathrm{nice}}.$$

Теорема 2. (1) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ *есть полуалгебраическое множество и не является алгебраическим многообразием,*

(2) *множество* $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}$ *незамкнуто,*

(3) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}\cap\{x_3\neq 0\}$ *есть гладкое 4-мерное многообразие, диффеоморфное* $\mathbb{R}^4\times\{\pm1\}$,

(4) $\mathrm{Abn}_{\mathrm{as}}\cap\{x_3=0\}=\mathrm{Abn}_{\mathrm{deg}}$ *есть гладкое 2-мерное многообразие, диффеоморфное* $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3. (1) Abn *есть 5-мерное субаналитическое множество,*

(2) *множество* Abn *незамкнуто,*

(3) *множество* Abn *не является гладким многообразием и не полуаналитично,*

(4) $e^{\mathbb{R}X_0}(\mathrm{Abn})=e^{\mathbb{R}Y}(\mathrm{Abn})=\mathrm{Abn}$, *где*

$$\begin{aligned}
X_0&=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_5\frac{\partial}{\partial x_4}+x_4\frac{\partial}{\partial x_5}+P\frac{\partial}{\partial x_6}+Q\frac{\partial}{\partial x_7}+R\frac{\partial}{\partial x_8},\\
P&=\frac{x_1^4}{24}-\frac{x_1^2x_2^2}{8}-x_7,\\
Q&=-\frac{x_1x_2^3}{12}-\frac{x_1^3x_2}{12}+2x_6-2x_8,\\
R&=-\frac{x_1^2x_2^2}{8}+\frac{x_2^4}{24}+x_7,\\
Y&=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+2x_3\frac{\partial}{\partial x_3}+3x_4\frac{\partial}{\partial x_4}+3x_5\frac{\partial}{\partial x_5}+4x_6\frac{\partial}{\partial x_6}+4x_7\frac{\partial}{\partial x_7}+4x_8\frac{\partial}{\partial x_8}.
\end{aligned}$$

Замечание 1. В работе [8] доказано, что Abn есть субаналитическое множество размерности не больше 5. Утверждение п. (1) теоремы 3 уточняет это утверждение.

В работе [9] доказано, что множество Abn содержится в алгебраическом многообразии коразмерности 1, откуда следует, что это множество имеет меру нуль (свойство Сарда в субримановой геометрии). Это также следует из п. (1) теоремы 3.

Обозначим через $\mathcal{H}^\mu(E)$ μ-мерную меру Хаусдорфа, а через $\operatorname{met}\dim(E)$ — метрическую размерность множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Следующее утверждение демонстрирует т.н. сильное свойство Сарда в субримановой геометрии.

Следствие 1. (1) *Если* $0 \leqslant \mu \leqslant 5$, *то* $\mathcal{H}^\mu(\mathrm{Abn}) = +\infty$. *Если* $\mu > 5$, *то* $\mathcal{H}^\mu(\mathrm{Abn}) = 0$.

(2) $\operatorname{met}\dim(\mathrm{Abn}) = 5$.

4. Заключение

Результаты этой работы показывают, что анормальное множество может иметь довольно сложную структуру — быть незамкнутым и не полуаналитическим множеством, не быть гладким многообразием. С другой стороны, известные результаты субримановой геометрии позволяют предположить, что анормальное множество субаналитично и имеет коразмерность не менее 1. Возможно, для левоинвариантных распределений ранга 2 нижнюю оценку коразмерности можно повысить до 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, Providence, 2002. **[2]** A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry*, Cambridge University Press, 2019. **[3]** Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, “Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2,3,5,8)”, *Дифференциальные уравнения*, 2017, № 3, 362–374. **[4]** Yu. L Sachkov, E. F. Sachkova, “Symmetries and Parameterization of Abnormal Extremals in the Sub-Riemannian Problem with the Growth Vector (2, 3, 5, 8)”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **15**:4 (2019), 579–587. **[5]** Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, “Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8)”, *Математический сборник*, **211** (2020). **[6]** Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1961. **[7]** А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005. **[8]** F. Boarotto, D. Vittone, “A dynamical approach to the Sard problem in Carnot groups”, *Journal of Differential Equations*, **269**:65 (2020), 4998–5033. **[9]** E. Le Donne, G. P. Leonardi, R. Monti, D. Vittone, “Extremal polynomials in stratified groups”, *Communications in Analysis and Geometry*, **26**:4 (2018), 723-757.

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова
Институт программных систем им. А.К.
Айламазяна РАН (Переславль-Залесский)
E-mail: yusachkov@gmail.com, efsachkova@mail.ru

Поступило
18.06.2020
Исправленный вариант