УДК 517.977

ОДНОРОДНЫЕ СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ*

© 2021 г.   Ю. Л. Сачков

Описаны однородные субримановы геодезические для стандартной субримановой структуры на группе собственных движений плоскости $\mathrm{SE}(2)$. Показано, что эта структура не является геодезически орбитальной, несмотря на инвариантность времени разреза при сдвиге начальной точки вдоль геодезических.

DOI:

В римановой геометрии известны понятия однородных геодезических и геодезически орбитальных пространств [1, 2, 3, 4, 5]. В субримановой геометрии на эту тему известен ряд работ В.Н.Берестовского и И.А.Зубаревой [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]: в этих статьях доказана геодезическая орбитальность осесимметричных левоинвариантных субримановых метрик на группах $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SL}(2)$, $\mathrm{SO}_0(2,1)$ и всех локально изоморфных и локально изометричных накрытий последней группы с упомянутыми субримановыми метриками. Все эти метрики реализуемы как инвариантные метрики на соответствующих слабо симметрических по А.Сельбергу пространствах. В работе А.В. Подобряева [13] доказаны некоторые общие свойства однородных субримановых геодезических и геодезически орбитальных субримановых многообразий. Цель данной заметки — изучение этих свойств для стандартной субримановой структуры на группе собственных движений плоскости, включая их связь с инвариантностью времени разреза при сдвиге начальной точки вдоль геодезических.

1. Однородные и эквиоптимальные субримановы геодезические на группах Ли. Пусть на гладком многообразии M задана субриманова структура [14, 15]. Обозначим через $\mathrm{Isom}(M)$ группу изометрий субриманова многообразия M.

Субриманова геодезическая $\gamma \subset M$ называется *однородной*, если она является однородным пространством некоторой однопараметрической подгруппы в $\mathrm{Isom}(M)$. Субриманово многообразие называется *геодезически орбитальным*, если все его геодезические однородны.

Временем разреза для геодезической $g(t)$, $t \geq 0$, соответствующим начальному моменту $t = 0$, называется величина $t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) = \sup\{T > 0 \mid g(t)$ оптимальна при $t \in [0,T]\}$. Геодезическая $g(t)$, $t \in [0,T]$, где $T = t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) < +\infty$, называется *непродолжаемой кратчайшей.*

Пусть на группе Ли G задана левоинвариантная субриманова структура с ортонормированным репером $(X_1, \dots, X_k)$, $X_i \in \mathrm{Vec}(G)$. Будем говорить, что геодезическая $\{g(t)\} \subset G$ соответствует управлению $u(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$, $u_i \in L^\infty$, если $\dot g(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X_i(g(t))$.

Согласно принципу максимума Понтрягина [16, 17], любая нормальная геодезическая $\{g(t)\} \subset G$ есть проекция нормальной экстремали $\{\lambda(t)\} \subset T^*G$:

$$\dot\lambda(t) = \vec H(\lambda(t)), \qquad \lambda(t) \in T^*_{g(t)}G, \tag{1}$$

где $\vec H \in \mathrm{Vec}(T^*G)$ есть гамильтоново векторное поле с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k h_i^2 \in C^\infty(T^*G), \qquad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(\pi(\lambda))\rangle,$$

и $\pi : T^*G \to G$ есть каноническая проекция.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Кокасательное расслоение T^*G группы Ли G тривиализуется левыми сдвигами $L_g : g_0 \mapsto gg_0$, $g, g_0 \in G$:

$$\begin{aligned}
&\Phi : \mathfrak{g}^* \times G \to T^*G, \qquad (p, g) \mapsto L_g^* p, \\
&\langle L_g^* p, L_{g*}\xi \rangle = \langle p, \xi \rangle, \qquad p \in \mathfrak{g}^*, \ \xi \in \mathfrak{g}, \ g \in G,
\end{aligned}$$

где $\mathfrak{g} = T_{\mathrm{Id}}G$ есть алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное к ней пространство. В этой тривиализации гамильтонова система (1) становится треугольной, см. [17]:

$$\begin{aligned}
&\dot{p} = \left(\mathrm{ad}\frac{\partial H}{\partial p}\right)^* p, \qquad p \in \mathfrak{g}^*, \\
&\dot{g} = L_{g_*}\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad g \in G.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим вертикальную компоненту гамильтонова поля в правой части уравнения (2) через $\vec{H}_v \in \mathrm{Vec}(\mathfrak{g}^*)$.

Переходя к натурально параметризованным геодезическим ($\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \equiv 1$), будем считать, что $p \in C := \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$. Тогда время разреза на нормальных геодезических $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$ становится функцией $t_{\mathrm{cut}} : C \to (0, +\infty]$.

Пусть $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, есть натурально параметризованная геодезическая в субримановом многообразии M. Геодезическая $g(t)$ называется *эквиоптимальной*, если она удовлетворяет следующему свойству: если $g(t)$, $t \in [0, T]$, есть непродолжаемая кратчайшая, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ геодезическая $g(t + \tau)$, $t \in [0, T]$, есть также непродолжаемая кратчайшая. Субриманово многообразие M называется *эквиоптимальным*, если любая его натурально параметризованная геодезическая эквиоптимальна.

Лемма 1. *Пусть $\{g(t)\} \subset G$ есть субриманова геодезическая с управлением $u(t)$, и пусть $g_1 \in G$. Тогда кривая $\widetilde{g}(t) = g_1 g(t + \tau)$ есть субриманова геодезическая с управлением $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$.*

Доказательство. Кривая $g(t + \tau)$ есть геодезическая по определению геодезической, а ее левый сдвиг $\widetilde{g}(t) = L_{g_1}(g(t+\tau))$ есть геодезическая в силу левоинвариантности субримановой структуры. Вычислим управление $\widetilde{u}(t)$, соответствующее геодезической $\widetilde{g}(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{g}}(t) &= \frac{d}{dt}L_{g_1}(g(t+\tau)) = L_{g_1*}\dot{g}(t+\tau) = L_{g_1*}\sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(g(t+\tau)) = \\
&= \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)L_{g_1*}X_i(g(t+\tau)) = \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(\widetilde{g}(t)),
\end{aligned}$$

поэтому $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$. □

Предложение 1. *Нормальная геодезическая $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$, $t \in \mathbb{R}$, эквиоптимальна тогда и только тогда, когда время разреза инвариантно относительно выбора начального момента, т.е.*

$$t_{\mathrm{cut}} \circ e^{\tau \vec{H}_v}(p) = t_{\mathrm{cut}}(p), \qquad p \in C, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Геодезическая $\overline{g}(t) = g(t + \tau)$, $t \in [0, T]$, есть непродолжаемая кратчайшая тогда и только тогда, когда таковой является геодезическая $\widetilde{g}(t) = g_1^{-1}\overline{g}(t) = g_1^{-1}g(t+\tau)$, $g_1 = g(\tau)$, $t \in [0, T]$. Если геодезическая $g(t)$ соответствует управлению $u(t)$, то геодезическая $\widetilde{g}(t)$ соответствует управлению $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$, см. лемму 1. Наконец, равенство (3) означает, что для любого $T > 0$ управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, и $u(t + \tau)$, $t \in [0, T]$, одновременно оптимальны или неоптимальны. □

Следствие 1. *Стандартные левоинвариантные субримановы структуры на следующих группах Ли эквиоптимальны:*

1. *группа Гейзенберга,*

2. *группы* $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SL}(2)$ *с осесимметричной субримановой метрикой,*

3. *группы* $\mathrm{SE}(2)$ *и* $\mathrm{SH}(2)$,

4. *группы Энгеля и Картана.*

Доказательство. Все геодезические для указанных групп Ли нормальны. Инвариантное свойство времени разреза (3) для этих групп Ли доказано в соответствующих статьях:

1. [18],

2. [19, 7, 9],

3. [23, 21],

4. [24, 25].

□

Предложение 2. *Если субриманова геодезическая однородна, то она эквиоптимальна.*

Доказательство. Пусть геодезическая $\gamma = \{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, однородна, и пусть $\{\varphi_s \mid s \in \mathbb{R}\}$ есть однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{Isom}(G)$, для которой γ есть однородное пространство. Далее, пусть $g(t)$, $t \in [0, T]$ есть непродолжаемая кратчайшая. Возьмем любое $\tau \in \mathbb{R}$ и найдем такое $s \in \mathbb{R}$, что $\varphi_s(g(0)) = g(\tau)$. Тогда $g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, есть непродолжаемая кратчайшая так как $g(t+\tau) = \varphi_s(g(t))$, $t \in \mathbb{R}$. □

В следующем разделе мы покажем ложность импликации, обратной к предложению 2, на примере стандартной субримановой структуры на группе $\mathrm{SE}(2)$ [20, 22, 23].

2. Субримановы геодезические на группе $\mathrm{SE}(2)$**.** Группа собственных движений евклидовой плоскости $\mathrm{SE}(2)$ есть полупрямое произведение группы параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ и группы вращений плоскости $\mathrm{SO}(2)$: $\mathrm{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Эта группа имеет линейное представление

$$\mathrm{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in S^1,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Наряду с матричным обозначением, будем обозначать элементы этой группы как (x, y, θ).

Рассмотрим на группе $\mathrm{SE}(2)$ стандартную левоинвариантную субриманову структуру, порожденную ортонормированным репером

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Субримановы геодезические и оптимальный синтез для этой структуры описаны в работах [20, 22, 23].

Пример 1. Отметим следующие геодезические для этой структуры:

(1) «движение вперед» $e^{tX_1}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$,

(2) «поворот на месте» $e^{tX_2}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Проекции всех остальных геодезических на плоскость (x,y) являются некомпактными кусочно-гладкими кривыми с точками возврата, см. [20].

Группа $\mathrm{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ была вычислена в работе [26]: там показано, что

$$\mathrm{Isom}(\mathrm{SE}(2)) \cong \mathrm{SE}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Группа $\mathrm{SE}(2)$ действует на себе левыми сдвигами. Один сомножитель $\mathbb{Z}_2$ означает отражение в какой-либо оси на плоскости (x,y), а другой сомножитель $\mathbb{Z}_2$ — разворот. В частности, все однопараметрические подгруппы в $\mathrm{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ суть однопараметрические подгруппы в группе $\mathrm{SE}(2)$.

Теорема 1. *Однородными геодезическими в группе* $\mathrm{SE}(2)$ *являются только геодезические* (1) *и* (2)*, указанные в примере* 1.

Поэтому $\mathrm{SE}(2)$ *не является геодезически орбитальным пространством.*

Доказательство. Вычислим однопараметрические подгруппы в $\mathrm{Isom}(\mathrm{SE}(2))$, т.е. в $\mathrm{SE}(2)$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{SE}(2)$ есть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2) = \mathrm{span}(E_{13}, E_{23}, E_{21} - E_{12}),$$

где E_{ij} есть 3×3 матрица с единственным ненулевым элементом с строке i и столбце j, равным 1. Однопараметрическая подгруппа, соответствующая ее элементу $X = aE_{13} + bE_{23} + c(E_{21} - E_{12})$ есть $e^{sX} = (x(s), y(s), \theta(s))$, где координаты x, y, θ удовлетворяют задаче Коши

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -cy + a, && x(0) = 0,\\
&\dot{y} = cx + b, && y(0) = 0,\\
&\dot{\theta} = c, && \theta(0) = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому $\theta(s) = cs$ и

$$\begin{aligned}
&x(s) = as, \quad y(s) = bs && \text{при } c = 0,\\
&x(s) = \frac{b}{c}(\cos cs - 1) + \frac{a}{c}\sin cs, \quad y(s) = \frac{b}{c}\sin cs + \frac{a}{c}(1 - \cos cs) && \text{при } c \neq 0.
\end{aligned}$$

Орбита однопараметрической подгруппы $\{e^{sX}\} \subset \mathrm{SE}(2)$, проходящая через точку $(x_0, y_0, \theta_0) \in \mathrm{SE}(2)$, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&(x_0 + as, y_0 + bs, \theta_0) \qquad \text{при } c = 0,\\
&\Bigg(\left(x_0 + \frac{b}{c}\right)\cos cs + \left(\frac{a}{c} - y_0\right)\sin cs - \frac{b}{c}, \left(y_0 - \frac{a}{c}\right)\cos cs + \left(\frac{b}{c} + x_0\right)\sin cs + \frac{a}{c},\\
&\qquad \theta_0 + cs\Bigg) \qquad \text{при } c \neq 0.
\end{aligned}$$

Проекция этой орбиты на плоскость (x,y) есть следующая кривая:

(1) прямая при $c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$,

(2) точка при $c \neq 0$, $\left(x_0 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c} - y_0\right)^2 = 0$,

(3) окружность при $c\left(\left(x_0 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c} - y_0\right)^2\right) \neq 0$.

Из описания проекций геодезических на плоскость (x,y) следует, что однопараметрические подгруппы в случае (3) не могут быть геодезическими. Значит, только геодезические из примера 1 однородны (случаи (1), (2)). □

Таким образом, на группе $\mathrm{SE}(2)$:

- все геодезические эквиоптимальны (следствие 1),
- однородны только геодезические типов (1), (2) примера 1 (теорема 1).

Поэтому группа $\mathrm{SE}(2)$ эквиоптимальна, но не геодезически орбитальна.

Глубинная причина эквиоптимальности группы $\mathrm{SE}(2)$ остается скрытой. С другой стороны, группы, перечисленные в п. 1, 2 следствия 1 геодезически орбитальны и эквиоптимальны. Отметим также, что стандартная левоинвариантная субриманова структура на свободной двуступенной группе Карно с 3-мя образующими (вектор роста $(3,6)$) [27] эквиоптимальна [13], потому геодезически орбитальна по следствию 1.

Автор выражает благодарность А.В. Подобряеву за полезные обсуждения этой работы, а также рецензенту за ценную информацию о публикациях по теме статьи.

Список литературы

[1] W. Ambrose, I.M. Singer, On homogeneous Riemannian manifolds // Duke Math. J., 25 (1958), 647–669

[2] A. Kaplan. On the geometry of groups of Heisenberg type // Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 35–42

[3] O. Kowalski, L. Vanhecke. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Un. Mat. Ital. 5. 1991. pp. 189–246.

[4] D. Kowalski, J. Szenthe. On the existence of homogeneous geodesics in honogeneous Riemannian manifolds // Geom. Dedicata. 81, 1–3. 2000. pp. 209–214.

[5] V. Berestovskii, Yu. Nikonorov. Riemannian manifolds and homogeneous geodesics. Springer Monograph in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2020. XXII+482.

[6] В. Н. Берестовский, “(Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$”, Алгебра и анализ, 27:1 (2015), 3–22

[7] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}(3)$”, Сиб. матем. журн., 56:4 (2015), 762–774

[8] В. Н. Берестовский, И. А. Грибанова, “Субриманово расстояние в группах Ли $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SO}(3)$”, Матем. тр., 18:2 (2015), 3–21

[9] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SL}(2)$”, Сиб. матем. журн., 57:3 (2016), 527–542

[10] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Локально изометричные накрытия группы Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ со специальной субримановой метрикой”, Матем. сб., 207:9 (2016), 35–56

[11] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$”, Алгебра и анализ, 28:4 (2016), 62–79

[12] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SL}(2)$”, Сиб. матем. журн., 58:1 (2017), 22–35

[13] A.V. Podobryaev, Homogeneous geodesics in sub-Riemannian geometry (в работе).

[14] R. Montgomery, *A tour of subriemannnian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002.

[15] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.

[16] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.

[17] А.А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.

[18] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.* Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.

[19] U. Boscain, F. Rossi. "Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SL}(2)$ and lens spaces", SIAM J. Control Optim., 47 (2008), pp. 1851–1878

[20] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399.

[21] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $\mathrm{SH}(2)$, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23 (2017), 155–195.

[22] Yu. L. Sachkov, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039.

[23] Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.

[24] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 958–988.

[25] Ardentov, A. A. and Hakavuori E., Cut time in sub-Riemannian problem on Cartan group, *направлена для публикации.*

[26] A. Ardentov, G. Bor, E. Le Donne, R. Montgomery, Yu. Sachkov, Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry, *Nonlinearity*, 34 (2021) 4661–4683.

[27] O. Myasnichenko, Nilpotent $(3,6)$ Sub-Riemannian Problem, Journal of Dynamical and Control Systems, January 2002 8(4):573–597.

Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию г.
После доработки г.
Принята к публикации г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ (копия карточки автора для каждого автора в отдельности)

1. ФИО: Сачков Юрий Леонидович

2. Дата рождения: 23.11.1964

3. Место работы: Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

4. Занимаемая должность: Руководитель исследовательского центра процессов управления

5. Ученое звание и степень: д.ф.-м.н., доцент

6. Служебный адрес: 152020, Ярославская обл., г. Переславль-Залесский, Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

7. Телефон (с кодом города): +7 (4852) 695-228

8. Домашний адрес: 152020, Ярославская обл., г. Переславль-Залесский, ул. Трудовая, д. 5, кв. 41

9. Телефон (с кодом города): 8-48535-30380, 89108250143

10. Электронный адрес: `yusachkov@gmail.com`

11. Факс: +7 (4852) 695-228

12. Основные направления научных исследований: математическая теория управления

13. Название статьи: Однородные субримановы геодезические на группе движений плоскости

14. УДК: 517.977

15. Раздел (рубрика), к которому относится статья:
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Название организации указывать без сокращений, телефоны и электронный адрес указывать обязательно.