

Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях*

Ю.Л. Сачков
Институт программных систем РАН
Переславль-Залесский
yusachkov@gmail.com

14 июня 2022 г.

Аннотация

Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли образуют важный класс задач с большой группой симметрий. Они интересны в теоретическом плане, так как часто допускают полное исследование, и на этих модельных задачах можно изучить общие закономерности. В частности, задачи на нильпотентных группах Ли доставляют фундаментальную нильпотентную аппроксимацию общих задач. Левоинвариантные задачи также часто возникают в приложениях: в классической и квантовой механике, геометрии, робототехнике, моделях зрения и обработке изображений.

Цель данной работы — дать обзор основных понятий, методов и результатов, относящихся к левоинвариантным задачам оптимального управления на группах Ли, интегрируемым в эллиптических функциях. Основное внимание уделено описанию экстремальных траекторий и их оптимальности, времени разреза и множества разреза, оптимального синтеза.

Библиография: 190 названий.

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрическая теория управления, левоинвариантные задачи, субриманова геометрия, группы Ли, оптимальный синтез, эллиптические функции

Содержание

1	Предисловие	4
2	Задачи, интегрируемые в эллиптических функциях и интегралах	4
2.1	Эллиптические интегралы и функции	4
2.2	Математический маятник	5
2.2.1	Уравнение маятника и его решение	5
2.2.2	Выпрямляющие координаты	6
2.2.3	Библиографические комментарии	6
2.3	Плоская субриманова задача Мартине	6
2.3.1	Постановка задачи	6
2.3.2	Принцип максимума Понтрягина	7
2.3.3	Симметрии	7
2.3.4	Параметризация геодезических	8
2.3.5	Сопряженное время	8
2.3.6	Время разреза и множество разреза	8
2.3.7	Сфера и фронт	9
2.3.8	Библиографические комментарии	10
2.4	Субриманова задача на группе $SE(2)$ евклидовых движений плоскости	10
2.4.1	Постановка задачи	10
2.4.2	Принцип максимума Понтрягина	12
2.4.3	Симметрии и страты Максвелла	14
2.4.4	Оценки сопряженного времени	15
2.4.5	Диффеоморфная структура экспоненциального отображения	15
2.4.6	Время разреза	16
2.4.7	Множество разреза и его стратификация	16

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>

2.4.8	Сферы	16
2.4.9	Метрические прямые	19
2.4.10	Модель велосипеда	19
2.4.11	Группа изометрий и однородные геодезические	19
2.4.12	Библиографические комментарии	19
2.5	Субриманова задача на группе $SH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости	20
2.5.1	Группа $SH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости	20
2.5.2	Субриманова задача на $SH(2)$	20
2.5.3	Геодезические	21
2.5.4	Симметрии и страты Максвелла	22
2.5.5	Оценки сопряженного времени	22
2.5.6	Время разреза	23
2.5.7	Диффеоморфная структура экспоненциального отображения	23
2.5.8	Множество разреза	24
2.5.9	Сферы	24
2.5.10	Структура оптимального синтеза	26
2.5.11	Метрические прямые	26
2.5.12	Библиографические комментарии	26
2.6	Задача Эйлера об эластиках	26
2.6.1	История задачи	26
2.6.2	Постановка задачи	28
2.6.3	Множество достижимости	29
2.6.4	Существование и ограниченность оптимальных управлений	29
2.6.5	Экстремали	29
2.6.6	Симметрии и страты Максвелла	33
2.6.7	Оценки сопряженного времени	34
2.6.8	Диффеоморфная структура экспоненциального отображения	36
2.6.9	Оптимальные эластики для различных граничных условий	36
2.6.10	Библиографические комментарии	38
2.7	Левоинвариантная субриманова задача общего вида на группе $SO(3)$	39
2.7.1	Постановка задачи	39
2.7.2	Параметризация геодезических	39
2.7.3	Периодические геодезические	41
2.7.4	Условия оптимальности	41
2.7.5	Библиографические комментарии	42
2.8	Задача о качении шара по плоскости без прокручивания и проскальзывания	42
2.8.1	История задачи	42
2.8.2	Постановка задачи	43
2.8.3	Экстремали	45
2.8.4	Симметрии	49
2.8.5	Условия оптимальности	51
2.8.6	Библиографические комментарии	51
2.9	Субриманова задача на группе Энгеля	51
2.9.1	Постановка задачи	51
2.9.2	Симметрии распределения и субримановой структуры	52
2.9.3	Геодезические	53
2.9.4	Симметрии экспоненциального отображения и время Максвелла	57
2.9.5	Нижняя оценка сопряженного времени	58
2.9.6	Диффеоморфная структура экспоненциального отображения	58
2.9.7	Время разреза	58
2.9.8	Множество разреза и его стратификация	58
2.9.9	Сфера	60
2.9.10	Явные выражения для субриманова расстояния	62
2.9.11	Метрические прямые	62
2.9.12	Библиографические комментарии	62
2.10	Субриманова задача на группе Картана	62
2.10.1	Постановка задачи	62
2.10.2	Симметрии распределения и субримановой структуры	64
2.10.3	Геодезические	64
2.10.4	Симметрии и страты Максвелла	68
2.10.5	Нижняя оценка сопряженного времени	71

2.10.6	Время разреза и кратчайшие	71
2.10.7	Метрические прямые	71
2.10.8	Библиографические комментарии	71
3	Вместо заключения: некоторые неохваченные вопросы	71
	Список иллюстраций	72
	Список литературы	73

1 Предисловие

Исследование инвариантных управляемых систем на группах Ли и однородных пространствах является одной из центральных тем геометрической теории управления. С теоретической точки зрения, это — естественный и важный класс систем, для которого возможна содержательная глобальная теория (именно такие системы возникают, например, при локальной нильпотентной аппроксимации гладких систем). С другой стороны, такие системы моделируют целый ряд прикладных задач (вращение и качение тел, движение роботов, квантовая механика, компьютерное видение).

Хорошо известно, что получить точное решение глобальной нелинейной задачи управления (например, задачи управляемости или оптимального управления) представляется очень сложным, если задача не имеет большой группы симметрий. Для инвариантных задач на группах Ли (и их проекций на однородные пространства) точное решение часто можно найти на основе методов геометрической теории управления с использованием техники дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли. Полученное решение инвариантной задачи может дать хорошую аппроксимацию соответствующей нелинейной задачи. Например, инвариантная субриманова геометрия на группе Гейзенберга служит краеугольным камнем всей субримановой геометрии.

Основные задачи, рассматривавшиеся для левоинвариантных систем на группах Ли, — задача управляемости и задача оптимального управления. По задаче управляемости имеется обширная литература; она описана, например, в обзоре [9].

В данном обзоре рассматриваются только задачи, интегрируемые в эллиптических функциях. Задачи, интегрируемые в элементарных функциях, рассмотрены в обзоре [42].

Автор благодарит А.А. Аграчева, А.В. Подобреева, А.П. Маштакова, А.А. Ардентова и И.Ю. Бесчастного за полезные советы по содержанию и изложению в данной работе.

Также автор благодарен Е.Ф. Сачковой за помощь в наборе обзора и постоянную поддержку при работе над ним.

2 Задачи, интегрируемые в эллиптических функциях и интегралах

2.1 Эллиптические интегралы и функции

Стандартные источники по эллиптическим интегралам и функциям — книги [34, 37, 38]. Мы приведем ниже минимальные сведения о них, необходимые для изложения в последующих разделах.

Эллиптические интегралы в форме Якоби Эллиптические интегралы Лежандра первого рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

второго рода:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt,$$

третьего рода:

$$\Pi(m; \varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 + m \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

здесь и далее эллиптический модуль $k \in (0, 1)$. Дополнительный модуль есть $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Полные эллиптические интегралы:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Эллиптические функции Якоби:

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k) \Leftrightarrow u = F(\varphi, k),$$

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \operatorname{am}(u, k),$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \operatorname{am}(u, k),$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)},$$

$$E(u, k) = E(\operatorname{am} u, k).$$

При записи эллиптических функций модуль k часто опускается.

Стандартные формулы Производные и интегралы:

$$\begin{aligned} \operatorname{am}' u &= \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{sn}' u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{cn}' u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{dn}' u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \\ \int_0^u \operatorname{dn}^2 t \, dt &= E(u). \end{aligned}$$

Вырождение:

$$\begin{aligned} k \rightarrow +0 &\Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \sin u, \quad \operatorname{cn} u \rightarrow \cos u, \quad \operatorname{dn} u \rightarrow 1, \quad E(u) \rightarrow u, \\ k \rightarrow 1-0 &\Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u \rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad E(u) \rightarrow \operatorname{th} u. \end{aligned}$$

2.2 Математический маятник

Во всех субримановых задачах разделов 2.3–2.10 вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина загадочным образом сводится к уравнению маятника, поэтому все они интегрируются в эллиптических функциях и интегралах.

2.2.1 Уравнение маятника и его решение

Рассмотрим *математический маятник* — материальную точку, закрепленную на невесомом нерастяжимом стержне длины L , который может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. Пусть θ обозначает угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения. Тогда движение маятника удовлетворяет уравнениям

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -r \sin \theta, \quad (2.1)$$

где $r = \frac{g}{L} > 0$ и g есть ускорение силы тяжести. Полная энергия маятника (первый интеграл уравнений (2.1)) есть

$$E = \frac{c^2}{2} - r \cos \theta \in [-r, +\infty).$$

Характер движения маятника определяется значением энергии E :

- если $E = -r$, то $(\theta, c) \equiv (0, 0)$, и маятник покоится в устойчивом положении равновесия;
- если $E \in (-r, r)$, то маятник колеблется вокруг устойчивого положения равновесия, он совершает периодические движения с периодом $T = \frac{4}{\sqrt{r}} K(k)$, $k = \sqrt{\frac{E+r}{2r}} \in (0, 1)$ по закону

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{r} t, k);$$

- если $E = r$, $c = 0$, то маятник покоится в неустойчивом положении равновесия $(\theta, c) \equiv (\pm\pi, 0)$;
- если $E = r$, $c \neq 0$, то маятник совершает неперiodическое движение вдоль сепаратрисы, стремясь к неустойчивым положениям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$ по закону

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{th}(\sqrt{r} t);$$

- если $E > r$, то маятник неравномерно вращается по часовой ($c < 0$) или против часовой ($c > 0$) стрелки, он совершает периодические движения с периодом $T = \frac{2}{\sqrt{r}} k K(k)$, $k = \sqrt{\frac{2r}{E+r}} \in (0, 1)$ по закону

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}}{k} t, k\right), \quad \pm = \operatorname{sgn} c.$$

Выше указан характер движений маятника (2.1) при $r = \frac{g}{L} > 0$. Если же $r = 0$ (что можно истолковать как отсутствие силы тяжести), то:

- при $c \neq 0$ маятник равномерно вращается по часовой ($c < 0$) или против часовой ($c > 0$) стрелки;
- при $c = 0$ маятник покоится в неустойчивом положении равновесия.

Случай $r < 0$ (сила тяжести направлена вверх) сводится к случаю $r > 0$ заменой переменных $(\theta, c, r) \mapsto (\theta + \pi, c, -r)$.

2.2.2 Выпрямляющие координаты

При $r > 0$ фазовый цилиндр маятника (2.1),

$$C = \{(\theta, c) \mid \theta \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}\}, \quad S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

стратифицируется в зависимости от типа движения маятника:

$$\begin{aligned} C &= \sqcup_{i=1}^5 C_i, \\ C_1 &= \{(\theta, c) \in C \mid E \in (-r, r)\}, \\ C_2 &= \{(\theta, c) \in C \mid E > r\}, \\ C_3 &= \{(\theta, c) \in C \mid E = r, \quad c \neq 0\}, \\ C_4 &= \{(\theta, c) \in C \mid c = 0, \quad \theta = 0\}, \\ C_5 &= \{(\theta, c) \in C \mid c = 0, \quad \theta = \pi\}. \end{aligned}$$

В областях C_1, C_2, C_3 можно ввести координаты (φ, k) , выпрямляющие уравнение маятника.

Если $(\theta, c) \in C_1$, то

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E+r}{2r}} \in (0, 1), \quad \sqrt{r}\varphi \pmod{4K(k)} \in [0, 4K(k)], \\ \sin \frac{\theta}{2} &= k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi, k), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi, k), \\ c &= 2k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi, k). \end{aligned}$$

Если $(\theta, c) \in C_2$, то

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2r}{E+r}} \in (0, 1), \quad \sqrt{r}\varphi \pmod{2kK(k)} \in [0, 2kK(k)], \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \\ c &= \pm 2\frac{\sqrt{r}}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

Если $(\theta, c) \in C_3$, то

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \\ c &= \pm \frac{2\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

В координатах (φ, k) уравнение маятника (2.1) выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0,$$

поэтому оно имеет решение

$$\varphi_t = \varphi + t, \quad k \equiv \operatorname{const}.$$

Эти выпрямляющие координаты и их модификации используются для параметризации экстремальных траекторий в разделах 2.4–2.10.

2.2.3 Библиографические комментарии

Раздел 2.2.1 опирается на [38], а раздел 2.2.2 — на [108].

2.3 Плоская субриманова задача Мартине

2.3.1 Постановка задачи

Плоская субриманова структура Мартине задается метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ на распределении Мартине $\Delta = \{dz - \frac{1}{2}y^2 dx = 0\}$ в пространстве $M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3$. Ортонормированный репер может быть выбран в форме

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, тогда алгебра Ли, порожденная полями X_1, X_2 , имеет таблицу умножения

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -yX_3, & [X_2, [X_1, X_2]] &= -X_3, \\ [X_1, [X_1, X_2]] &= 0, & \text{ad } X_3 &= 0, \end{aligned}$$

то есть это алгебра Энгеля (см. раздел 2.9).

Плоская субриманова структура Мартине *не левоинвариантна*, но мы включаем ее в данный обзор из-за ее особой роли в субримановой геометрии:

- это простейшая субриманова структура с аномальными кратчайшими,
- это простейшая субриманова структура, в которой сфера не субаналитична,
- эта структура является нильпотентной аппроксимацией общих субримановых структур на распределении Мартине,
- это простейшая субриманова структура, интегрируемая в эллиптических функциях и интегралах.

Кроме того, плоская субриманова структура Мартине есть фактор-структура левоинвариантной субримановой структуры на группе Энгеля (см. раздел 2.9), поэтому гамильтонова система для экстремалей Мартине сводится к уравнению маятника, а сами эти экстремали проецируются на плоскость (x, y) в эйлеровы эластички (см. раздел 2.6).

Задача оптимального управления для плоской субримановой структуры Мартине имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, & u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

2.3.2 Принцип максимума Понтрягина

Предложение 2.1. *Аномальные траектории суть $\{y = 0, z = z_0\}$. Они нестрого аномальны.*

Нормальные экстремали суть траектории гамильтонова поля с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{2}[(p_x + \frac{y^2}{2}p_z)^2 + p_y^2],$$

где (p_x, p_y, p_z) — канонические координаты ковектора $\lambda \in T^*M$, и $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Соответствующая гамильтонова система $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + \frac{y^2}{2}p_z, & \dot{p}_x &= 0, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -(p_x + \frac{y^2}{2}p_z)p_z y, \\ \dot{z} &= (p_x + \frac{y^2}{2}p_z)\frac{y^2}{2}, & \dot{p}_z &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1, & \dot{h}_1 &= yh_2h_3, \\ \dot{y} &= h_2, & \dot{h}_2 &= -yh_1h_3, \\ \dot{z} &= \frac{y^2}{2}h_1, & \dot{h}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Будем рассматривать экстремали на поверхности уровня $\{H = \frac{1}{2}\}$, на которой введем координаты

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_3 = c.$$

2.3.3 Симметрии

Отражения Субриманова структура (Δ, ds^2) сохраняется группой отражений

$$\begin{aligned} \text{Sym} &= \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ \varepsilon^1 &: (x, y, z) \mapsto (x, -y, z), & (\theta, c) &\mapsto (\pi - \theta, c), \\ \varepsilon^2 &: (x, y, z) \mapsto (-x, y, -z), & (\theta, c) &\mapsto (-\theta, -c), \\ \varepsilon^3 &: (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z), & (\theta, c) &\mapsto (\theta - \pi, -c). \end{aligned}$$

Дилатации Гамильтонова система (2.2) сохраняется однопараметрической группой дилатаций

$$\begin{aligned}(x, y, z) &\mapsto (\delta^{-1}x, \delta^{-1}y, \delta^{-3}z), \\ (h_1, h_2, h_3) &\mapsto (\delta^{-1}h_1, \delta^{-1}h_2, \delta h_3).\end{aligned}$$

2.3.4 Параметризация геодезических

Далее предполагается, что $q_0 = 0$.

Предложение 2.2. *Натурально параметризованные геодезические, выходящие из $q_0 = 0$, суть кривые*

$$\begin{aligned}x_t &= -t + \frac{2}{\sqrt{c}}(E(u) - E(k)), \\ y_t &= -\frac{2k}{\sqrt{c}} \operatorname{cn} u, \\ z_t &= \frac{2}{3c^{3/2}}[(2k^2 - 1)(E(u) - E(k)) + k'^2 t\sqrt{c} + 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u],\end{aligned}$$

где $u = K + t\sqrt{c}$, $k = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $c > 0$, а также

$$x_t = t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = \frac{t^3}{6} \sin \theta \cos^2 \theta,$$

где $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и кривые, получающиеся из указанных с помощью симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$.

Обозначим экспоненциальное отображение

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow M, \quad (\lambda, t) \mapsto q_t = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda), \\ C &= T_{q_0}^* M \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\}.\end{aligned}$$

2.3.5 Сопряженное время

Если геодезическая проецируется на плоскость (x, y) в прямую и строго нормальна, то она оптимальна, потому свободна от сопряженных точек. В аномальном случае геодезическая оптимальна и состоит из сопряженных точек.

Пусть $\lambda = (\theta, c) \in C$, и пусть геодезическая $q_t = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$ проецируется на плоскость (x, y) не в прямую. Благодаря симметриям ε^1 и ε^2 можно считать, что $c > 0$ и $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тогда первое сопряженное время есть

$$\begin{aligned}t_{\operatorname{conj}}^1(\lambda) &= \min\{t > 0 \mid v^2 c_1(v) + v c_2(v) + c_3(v) = 0\}, \\ c_1(v) &= k'^2 \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \\ c_2(v) &= k'^2 \operatorname{sn} v - 2k'^2 E(v) \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \\ c_3(v) &= E^2(v) \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} - E(v) \operatorname{sn} v, \\ v &= t\sqrt{c}.\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Пусть $q_t = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C$, $t > 0$, есть геодезическая, которая проецируется на плоскость (x, y) не в прямую. Тогда*

$$t_{\operatorname{conj}}^1(\lambda) \in \left(\frac{2K}{\sqrt{|c|}}, \frac{3K}{\sqrt{|c|}} \right).$$

Приближенные вычисления показывают, что отношение $\frac{t_{\operatorname{conj}}^1 \cdot \sqrt{|c|}}{3K}$ есть приближенно константа 0,97.

2.3.6 Время разреза и множество разреза

Теорема 2.2. *Геодезические, проецирующиеся на плоскость (x, y) в прямую, суть кратчайшие. Геодезическая $q_t = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C$, $t > 0$, проецирующаяся на плоскость (x, y) не в прямую, имеет время разреза $t_{\operatorname{cut}}(\lambda) = \frac{2K}{\sqrt{|c|}}$, соответствующее ее первому пересечению с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$.*

Множество разреза есть

$$\operatorname{Cut} = \{q \in M \mid y = 0, \quad z \neq 0\}.$$

Это множество не пересекается с первой каустикой.

2.3.7 Сфера и фронт

Разные сферы с центром $q_0 = 0$ переводятся друг в друга дилатациями, поэтому достаточно рассмотреть единичную сферу

$$S = \{q \in M \mid d(q_0, q) = 1\}.$$

Сфера S изображена на Рис. 1 в координатах (x, y, v) , $v = z - xy^2/6$.

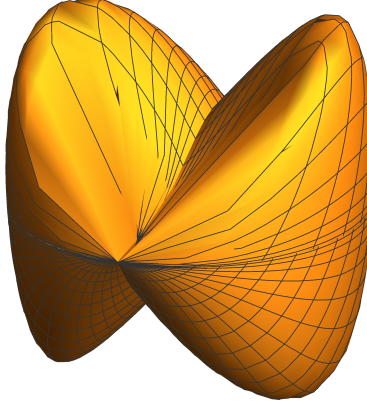


Рис. 1: Сфера в плоском случае Мартине

Теорема 2.3. Пересечение сферы S со множеством разреза (см. Рис. 2) есть кривая $k \mapsto \gamma(k)$, содержащаяся в плоскости Мартине $\{y = 0\}$ и заданная параметрическими уравнениями

$$x(k) = -1 + 2 \frac{E(k)}{K(k)}, \quad (2.3)$$

$$z(k) = \frac{1}{6K^3(k)} [(2k^2 - 1)E(k) + k'^2 K(k)], \quad (2.4)$$

где $k \in (0, 1)$, и кривая, полученная из γ симметрией $\varepsilon^2|_{\{y=0\}} : (x, z) \mapsto (-x, -z)$.

Если $k \rightarrow +0$, то кривая γ есть сужение на полуплоскость $\{z > 0\}$ графика аналитической функции $z = -\frac{2}{3\pi^2}(x-1) + o(x-1)$, $x \rightarrow 1-0$.

Если $k \rightarrow 1-0$, то кривая γ есть график гладкой неаналитической функции

$$z = \frac{X^3}{6} + F(X), \quad X = \frac{x+1}{2},$$

где F есть плоская функция

$$F(X) = -4X^3 e^{-\frac{2}{X}} + o\left(X^3 e^{-\frac{2}{X}}\right), \quad X \rightarrow +0.$$

Теорема 2.4. Пересечение сферы S с плоскостью Мартине не субаналитично, поэтому сфера S не субаналитична.

Рассмотрим волновой фронт из точки q_0 за единичное время:

$$W = \{q \in M \mid q = \text{Exp}(\lambda, 1), \quad \lambda \in C\},$$

остальные фронты из точки q_0 переводятся в этот фронт дилатациями.

Теорема 2.5. Пересечение волнового фронта W с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$ и полупространством $\{z > 0\}$ есть объединение кривых γ_n , $n \in \mathbb{N}$, замыкание которых имеет две точки ветвления $x = \pm 1$, $z = 0$. Кривая γ_n задается параметрическими уравнениями

$$x_n(k) = -1 + 2 \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$z_n(k) = \frac{1}{6n^2 K^3(k)} [(2k^2 - 1)E(k) + k'^2 K(k)].$$

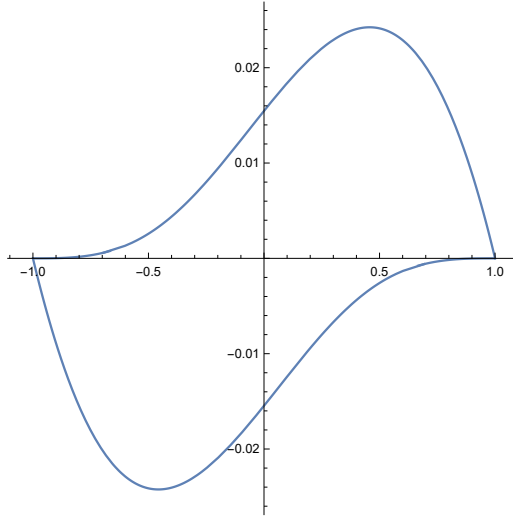


Рис. 2: Пересечение сферы с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$

Эта кривая вблизи точки $x = -1, z = 0$ есть график функции

$$z = \frac{1}{6n^2}X^3 + F(X),$$

где $F(X) = \alpha X^3 e^{-\frac{2}{X}} + o\left(X^3 e^{-\frac{2}{X}}\right)$, $\alpha \neq 0$, а вблизи точки $x = 1, z = 0$ есть график функции

$$z = -\frac{2}{3n^2\pi^2}(x-1) + o(x-1).$$

Внешняя кривая γ_1 есть пересечение γ сферы с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$ и полупространством $\{z > 0\}$, см. теорему 2.3.

Пересечение сферы S с плоскостью Мартине и полупространством $\{z > 0\}$ есть параметрически заданная кривая $k \mapsto (x(k), z(k))$, $k \in (0, 1)$, см. (2.3), (2.4). Эта кривая продолжается по непрерывности в полуплоскость $\{z \geq 0\}$ условием $k \in [0, 1]$. Полученная кривая полуаналитична при $k \neq 1$. Однако при $k = 1$ эта кривая не полуаналитична, поэтому не субаналитична.

Теорема 2.6. Пересечение сферы S с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$ и полуплоскостью $\{z \geq 0\}$ вблизи точки $X = 0$, где $X = \frac{x+1}{2}$, является графиком функции вида

$$z = F\left(X, \frac{e^{-\frac{1}{X}}}{X^2}\right),$$

где $X \geq 0$, и F есть аналитическое отображение из окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ в \mathbb{R} .

Поэтому пересечение сферы S с плоскостью Мартине принадлежит exp-log категории [116, 117].

2.3.8 Библиографические комментарии

Этот раздел опирается на работу [47].

2.4 Субриманова задача на группе $SE(2)$ евклидовых движений плоскости

2.4.1 Постановка задачи

Механическая постановка Рассмотрим задачу об оптимальном движении для кинематической модели мобильного робота на плоскости. Состояние робота задается его положением на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и углом ориентации $\theta \in S^1 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}$ относительно положительного направления оси абсцисс. Робот может двигаться с произвольной линейной скоростью $u_1 \in \mathbb{R}$ и при этом поворачиваться с произвольной угловой скоростью $u_2 \in \mathbb{R}$. Требуется перевести робота из начального состояния $g_0 = (x_0, y_0, \theta_0)$ в конечное состояние $g_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$ вдоль кратчайшего пути в пространстве состояний. Длина пути в пространстве состояний $\mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1$ измеряется интегралом $\int_0^{t_1} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} dt$, где $\alpha > 0$ — некоторое заданное число, определяющее компромисс между линейной и угловой скоростью.

Задача оптимального управления и ее нормализация Описанная задача для мобильного робота формализуется как задача оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta, & \dot{y} &= u_1 \sin \theta, & \dot{\theta} &= u_2, \\ g &= (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, & u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ g(0) &= g_0, & g(t_1) &= g_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Заменой масштаба в плоскости (x, y) :

$$(x, y, \theta) \mapsto \left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \theta \right), \quad (u_1, u_2) \mapsto \left(\frac{u_1}{\alpha}, u_2 \right)$$

можно свести эту задачу к случаю $\alpha = 1$.

Параллельными переносами и поворотами плоскости (x, y) можно добиться равенства $g_0 = (0, 0, 0)$.

В итоге получаем задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u_2, \quad (2.5)$$

$$g = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.6)$$

$$g(0) = g_0 = (0, 0, 0), \quad g(t_1) = g_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \quad (2.7)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Это субриманова задача, заданная ортонормированным репером

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.9)$$

Группа движений плоскости Группа собственных евклидовых движений плоскости $G = \text{SE}(2)$ есть полупрямое произведение группы параллельных переносов \mathbb{R}^2 и группы вращений $\text{SO}(2)$:

$$\text{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \ltimes \text{SO}(2).$$

Эта группа имеет линейное представление

$$\text{SE}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid \theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Действие движения $g = (x, y, \theta)$ на вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ вычисляется с помощью матричного произведения:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta + x \\ a \sin \theta + b \cos \theta + y \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$g : (a, b) \mapsto (a \cos \theta - b \sin \theta + x, \quad a \sin \theta + b \cos \theta + y).$$

Алгебра Ли группы Ли $\text{SE}(2)$ есть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2) = \text{span}(E_{21} - E_{12}, E_{13}, E_{23}),$$

где E_{ij} есть 3×3 матрица с единственным ненулевым элементом — единицей в строке i и столбце j . Базисные левоинвариантные векторные поля на группе $\text{SE}(2)$ суть

$$\begin{aligned} X_1 &= gE_{13} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= g(E_{21} - E_{12}) = \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_3 &= -gE_{23} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

с таблицей умножения

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0. \quad (2.10)$$

Ортонормированный репер (2.9) для субримановой задачи (2.5)–(2.8) состоит из левоинвариантных полей, поэтому эта задача — левоинвариантная субриманова задача на группе $G = \text{SE}(2)$.

Согласно классификации Аграчева-Барилари [43], это единственная, с точностью до локальных изометрий, вполне неголономная субриманова задача на $\text{SE}(2)$, ей соответствуют инварианты $\chi = \kappa = 1$.

Существование оптимальных управлений в задаче (2.5)–(2.8) следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова: система имеет полный ранг, так как

$$\mathfrak{g} = \text{span}(X_1, X_2, X_3), \quad X_3 = [X_1, X_2].$$

2.4.2 Принцип максимума Понтрягина

Аномальные траектории постоянны.

Нормальные экстремали суть траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$, где $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. В координатах эта система записывается как

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_2 h_3, & \dot{h}_2 &= h_1 h_3, & \dot{h}_3 &= h_1 h_2, \\ \dot{x} &= h_1 \cos \theta, & \dot{y} &= h_1 \sin \theta, & \dot{\theta} &= h_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

На поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ в координатах (γ, c) , где

$$h_1 = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad h_2 = -\cos \frac{\gamma}{2}, \quad c = 2h_3,$$

вертикальная подсистема (2.11) гамильтоновой системы принимает форму двулистного накрытия маятника:

$$\dot{\gamma} = c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma, \quad (\gamma, c) \in C = \mathfrak{g}^* \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\} \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \quad 2S^1 = \mathbb{R}/(4\pi\mathbb{Z}). \quad (2.12)$$

Первый интеграл этого уравнения — энергия маятника

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma \in [-1, +\infty). \quad (2.13)$$

Симплектическое слоение На коалгебре Ли \mathfrak{g}^* имеется функция Казимира $F = h_1^2 + h_3^2$. Симплектическое слоение состоит из круговых цилиндров $\{h_1^2 + h_3^2 = \text{const} > 0\}$ и точек $\{h_1 = h_3 = 0, \quad h_2 = \text{const}\}$.

Энергия маятника есть линейная комбинация функции Казимира и гамильтониана:

$$E = 2F - 2H.$$

Стратификация цилиндра C и выпрямляющие координаты Цилиндр C разбивается на инвариантные множества маятника (2.12) критическими линиями уровня энергии E :

$$\begin{aligned} C &= \sqcup_{i=1}^5 C_i, \\ C_1 &= \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\}, \\ C_3 &= \{\lambda \in C \mid E = 1, \quad c \neq 0\}, \\ C_4 &= \{\lambda \in C \mid E = -1\} = \{(\gamma, c) \in C \mid \gamma = 2\pi n, \quad c = 0\}, \\ C_5 &= \{\lambda \in C \mid E = 1, \quad c = 0\} = \{(\gamma, c) \in C \mid \gamma = \pi + 2\pi n, \quad c = 0\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для регулярного интегрирования уравнения маятника (2.12) на стратах C_1, C_2, C_3 вводятся координаты (φ, k) , выпрямляющие это уравнение.

Если $\lambda = (\gamma, c) \in C_1$, то

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E+1}{2}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{c^2}{4}} \in (0, 1), \\ \sin \frac{\gamma}{2} &= s_1 k \operatorname{sn}(\varphi, k), \quad s_1 = \operatorname{sgn} \cos(\gamma/2), \\ \cos \frac{\gamma}{2} &= s_1 \operatorname{dn}(\varphi, k), \\ \frac{c}{2} &= k \operatorname{cn}(\varphi, k), \quad \varphi \in [0, 4K(k)]. \end{aligned}$$

Если $\lambda = (\gamma, c) \in C_2$, то

$$k = \sqrt{\frac{2}{E+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{c^2}{4}}} \in (0, 1),$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = s_2 \operatorname{sn}(\varphi/k, k), \quad s_2 = \operatorname{sgn} c,$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \operatorname{cn}(\varphi/k, k),$$

$$\frac{c}{2} = (s_2/k) \operatorname{dn}(\varphi/k, k), \quad \varphi \in [0, 4kK(k)].$$

Если $\lambda = (\gamma, c) \in C_3$, то

$$k = 1,$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = s_1 s_2 \operatorname{th} \varphi, \quad s_1 = \operatorname{sgn} \cos(\gamma/2), \quad s_2 = \operatorname{sgn} c,$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = s_1 / \operatorname{ch} \varphi,$$

$$\frac{c}{2} = s_2 / \operatorname{ch} \varphi, \quad \varphi \in (-\infty, +\infty).$$

В координатах (φ, k) поток маятника (2.12) выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0, \quad \lambda = (\varphi, k) \in \cup_{i=1}^3 C_i.$$

Параметризация геодезических Если $\lambda = (\varphi, k) \in C_1$, то $\varphi_t = \varphi + t$ и

$$\cos \theta_t = \operatorname{cn} \varphi \operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \varphi_t,$$

$$\sin \theta_t = s_1 (\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi \operatorname{sn} \varphi_t),$$

$$\theta_t = s_1 (\operatorname{am} \varphi - \operatorname{am} \varphi_t) \pmod{2\pi},$$

$$x_t = (s_1/k) [\operatorname{cn} \varphi (\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) + \operatorname{sn} \varphi (t + \operatorname{E}(\varphi) - \operatorname{E}(\varphi_t))],$$

$$y_t = (1/k) [\operatorname{sn} \varphi (\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) - \operatorname{cn} \varphi (t + \operatorname{E}(\varphi) - \operatorname{E}(\varphi_t))].$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\cos \theta_t = k^2 \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t,$$

$$\sin \theta_t = k (\operatorname{sn} \psi \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi \operatorname{sn} \psi_t),$$

$$x_t = s_2 k [\operatorname{dn} \psi (\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) + \operatorname{sn} \psi (t/k + \operatorname{E}(\psi) - \operatorname{E}(\psi_t))],$$

$$y_t = s_2 [k^2 \operatorname{sn} \psi (\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) - \operatorname{dn} \psi (t/k + \operatorname{E}(\psi) - \operatorname{E}(\psi_t))],$$

где

$$\psi = \varphi/k, \quad \psi_t = \varphi_t/k = \psi + t/k.$$

Если $\lambda = (\varphi, k) \in C_3$, $k = 1$, то $\varphi_t = \varphi + t$ и

$$\cos \theta_t = 1/(\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_t) + \operatorname{th} \varphi \operatorname{th} \varphi_t,$$

$$\sin \theta_t = s_1 (\operatorname{th} \varphi / \operatorname{ch} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi_t / \operatorname{ch} \varphi),$$

$$x_t = s_1 s_2 [(1/\operatorname{ch} \varphi)(1/\operatorname{ch} \varphi - 1/\operatorname{ch} \varphi_t) + \operatorname{th} \varphi (t + \operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} \varphi_t)],$$

$$y_t = s_2 [\operatorname{th} \varphi (1/\operatorname{ch} \varphi - 1/\operatorname{ch} \varphi_t) - (1/\operatorname{ch} \varphi)(t + \operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} \varphi_t)].$$

Если $\lambda \in C_4$, то

$$\theta_t = -s_1 t, \quad x_t = 0, \quad y_t = 0.$$

Если $\lambda \in C_5$, то

$$\theta_t = 0, \quad x_t = t \operatorname{sgn} \sin(\gamma/2), \quad y_t = 0.$$

Проекция геодезических на плоскость (x, y) в случаях C_1, C_2, C_3 изображены соответственно на Рис. 3, 4, 5.

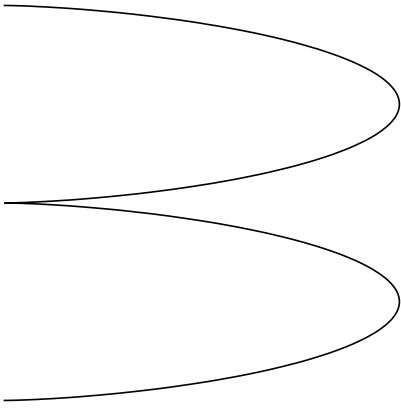


Рис. 3: Неинфлексионная кривая (x_t, y_t) : $\lambda \in C_1$

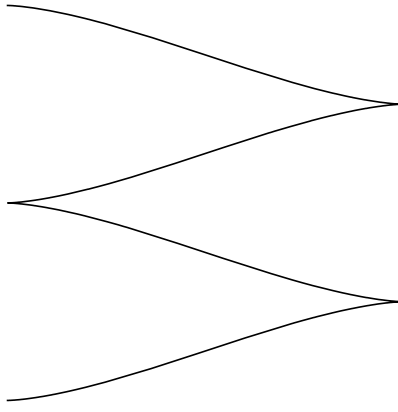


Рис. 4: Инфлексионная кривая (x_t, y_t) : $\lambda \in C_2$

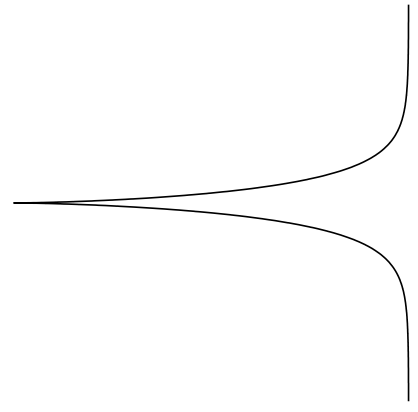


Рис. 5: Трактриса (x_t, y_t) : $\lambda \in C_3$

2.4.3 Симметрии и страты Максвелла

Фазовый портрет маятника (2.12) сохраняется группой симметрий Sym , порожденной отражениями цилиндра C в осях координат γ, c , в начале координат $(\gamma, c) = (0, 0)$, и поворотом на угол 2π :

$$\text{Sym} = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 &: (\gamma, c) \rightarrow (\gamma, -c), \\ \varepsilon^2 &: (\gamma, c) \rightarrow (-\gamma, c), \\ \varepsilon^3 &: (\gamma, c) \rightarrow (-\gamma, -c), \\ \varepsilon^4 &: (\gamma, c) \rightarrow (\gamma + 2\pi, c), \\ \varepsilon^5 &: (\gamma, c) \rightarrow (\gamma + 2\pi, -c), \\ \varepsilon^6 &: (\gamma, c) \rightarrow (-\gamma + 2\pi, c), \\ \varepsilon^7 &: (\gamma, c) \rightarrow (-\gamma + 2\pi, -c). \end{aligned}$$

Эти симметрии естественно продолжаются на прообраз и образ экспоненциального отображения.

Если $\nu = (\lambda, t) = (\gamma, c, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$, то $\varepsilon^i(\nu) = \nu^i = (\lambda^i, t) = (\gamma^i, c^i, t) \in N$,

$$\begin{aligned} (\gamma^1, c^1) &= (\gamma_t, -c_t), \\ (\gamma^2, c^2) &= (-\gamma_t, c_t), \\ (\gamma^3, c^3) &= (-\gamma, -c), \\ (\gamma^4, c^4) &= (\gamma + 2\pi, c), \\ (\gamma^5, c^5) &= (\gamma_t + 2\pi, -c_t), \\ (\gamma^6, c^6) &= (-\gamma_t + 2\pi, c_t), \\ (\gamma^7, c^7) &= (-\gamma, -c). \end{aligned}$$

Если $g = (x, y, \theta) \in G$, то $g^i = \varepsilon^i(g) = (x^i, y^i, \theta^i) \in G$, где

$$\begin{aligned} (x^1, y^1, \theta^1) &= (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, \theta), \\ (x^2, y^2, \theta^2) &= (-x \cos \theta - y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, \theta), \\ (x^3, y^3, \theta^3) &= (-x, -y, \theta), \\ (x^4, y^4, \theta^4) &= (-x, y, -\theta), \\ (x^5, y^5, \theta^5) &= (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta), \\ (x^6, y^6, \theta^6) &= (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, -\theta), \\ (x^7, y^7, \theta^7) &= (x, -y, -\theta). \end{aligned}$$

Предложение 2.3. *Группа $\text{Sym} = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}$ есть подгруппа группы симметрий экспоненциального отображения.*

Теорема 2.7. Первое время Максвелла, соответствующее группе симметрий Sym , для почти всех геодезических выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda \in C_1 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = 2K(k), \\ \lambda \in C_2 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = 2kp_1^1(k), \\ \lambda \in C_3 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = +\infty, \\ \lambda \in C_4 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = \pi, \\ \lambda \in C_5 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = +\infty,\end{aligned}$$

где $p = p_1^1(k) \in (K(k), 2K(k))$ есть первый положительный корень функции

$$f_1(p, k) = \text{cn } p(\text{E}(p) - p) - \text{dn } p \text{sn } p.$$

Замечание. Для тех геодезических, для которых первое время Максвелла, соответствующее группе Sym , не равно t_{MAX}^1 , оно больше этого значения, а t_{MAX}^1 есть первое сопряженное время.

Теорема 2.8. Функция $t_{\text{MAX}}^1 : C \rightarrow (0, +\infty]$ имеет следующие свойства инвариантности:

- (1) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ зависит только от E ,
- (2) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ есть первый интеграл поля \vec{H}_v ,
- (3) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ инвариантно относительно отражений $\varepsilon^i \in \text{Sym}$: если $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $(\lambda^i, t) = \varepsilon^i(\lambda, t)$, то $t_{\text{MAX}}^1(\lambda^i) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$.

2.4.4 Оценки сопряженного времени

Теорема 2.9. (1) Если $\lambda \in C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty$.

(2) Если $\lambda \in C_2$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) \in [2kp_1^1, 4kK]$.

(3) Следовательно, $t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ для всех $\lambda \in C$.

2.4.5 Диффеоморфная структура экспоненциального отображения

Рассмотрим подмножество в пространстве состояний, не содержащее неподвижных точек отражений ε^i :

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= \{g \in G \mid \varepsilon^i(g) \neq g, \quad i = 1, \dots, 7\} = \{g \in G \mid R_1(g)R_2(g) \sin \theta \neq 0\}, \\ R_1 &= y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}, \quad R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

и его разбиение на компоненты связности

$$\tilde{G} = \sqcup_{i=1}^8 G_i,$$

где каждое множество G_i характеризуется постоянными знаками функций $\sin \theta$, R_1 , R_2 , описанными в таблице 1.

G_i	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
$\text{sgn}(\sin \theta)$	-	-	-	-	+	+	+	+
$\text{sgn}(R_1)$	+	+	-	-	-	-	+	+
$\text{sgn}(R_2)$	+	-	-	+	+	-	-	+

Таблица 1: Определение областей G_i

Также рассмотрим открытое плотное подмножество в пространстве всех потенциально оптимальных геодезических:

$$\tilde{N} = \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} \sin \gamma_{t/2} \neq 0\},$$

и его связные компоненты

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} > 0, \quad \gamma_{t/2} \in (-\pi, 0)\}, \\
D_2 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} > 0, \quad \gamma_{t/2} \in (0, \pi)\}, \\
D_3 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} < 0, \quad \gamma_{t/2} \in (0, \pi)\}, \\
D_4 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} < 0, \quad \gamma_{t/2} \in (-\pi, 0)\}, \\
D_5 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} > 0, \quad \gamma_{t/2} \in (\pi, 2\pi)\}, \\
D_6 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} > 0, \quad \gamma_{t/2} \in (2\pi, 3\pi)\}, \\
D_7 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} < 0, \quad \gamma_{t/2} \in (2\pi, 3\pi)\}, \\
D_8 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), \quad c_{t/2} < 0, \quad \gamma_{t/2} \in (\pi, 2\pi)\}, \\
\tilde{N} &= \sqcup_{i=1}^8 D_i.
\end{aligned}$$

Теорема 2.10. *Следующие отображения являются диффеоморфизмами:*

$$\begin{aligned}
\text{Exp} : D_i &\rightarrow G_i, \quad i = 1, \dots, 8, \\
\text{Exp} : \tilde{N} &\rightarrow \tilde{G}.
\end{aligned}$$

2.4.6 Время разреза

Теорема 2.11. *Для любого $\lambda \in C$*

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

Время разреза инвариантно относительно вертикальной компоненты гамильтонова поля \vec{H}_v , поэтому субриманова структура на группе SE(2) эквиоптимальна.

2.4.7 Множество разреза и его стратификация

Теорема 2.12. *Множество разреза есть 2-мерное стратифицированное многообразие со стратификацией*

$$\begin{aligned}
\text{Cut} &= \text{Cut}_{\text{glob}} \sqcup \text{Cut}_{\text{loc}}^+ \sqcup \text{Cut}_{\text{loc}}^-, \\
\text{Cut}_{\text{glob}} &= \{q \in M \mid \theta = \pi\}, \\
\text{Cut}_{\text{loc}}^+ &= \{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), \quad R_2 = 0, \quad R_1 \geq R_1^1(|\theta|)\}, \\
\text{Cut}_{\text{loc}}^- &= \{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), \quad R_2 = 0, \quad R_1 \leq -R_1^1(|\theta|)\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_1^1(\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \\
R_1^1(\theta) &= 2(F(v_1^1(k), k) - E(v_1^1(k), k)), \quad k = k_1^1(\theta), \\
v_1^1(k) &= \text{am}(p_1^1(k), k), \quad k \in [0, 1],
\end{aligned}$$

а функция $k = k_1^1(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, есть обратная функция к убывающей функции

$$\theta(k) = 2 \arcsin(k \sin v_1^1(k)), \quad k \in [0, 1].$$

Начальная точка $g_0 = \text{Id}$ содержится в замыкании каждой компоненты $\text{Cut}_{\text{loc}}^+$, $\text{Cut}_{\text{loc}}^-$, и отделена от компоненты Cut_{glob} .

Множество разреза $\text{Cut} \subset \text{SE}(2)$ изображено на Рис. 6 (в выпрямляющих координатах $R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}$, $R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}$) и на Рис. 7 (при вложении в полноторий — модель группы SE(2)).

2.4.8 Сферы

Субримановы сферы S_R гомеоморфны (но не диффеоморфны):

- евклидовой сфере S^2 при $R \in (0, \pi)$,
- сфере с отождествленными полюсами S и N : $S^2/\{S \sim N\}$ при $R = \pi$,
- тору \mathbb{T}^2 при $R > \pi$,

На Рис. 8, 9, 10 изображены субримановы сферы радиусов $\pi/2$, π , $3\pi/2$ соответственно, вложенные в полноторий — модель группы SE(2).

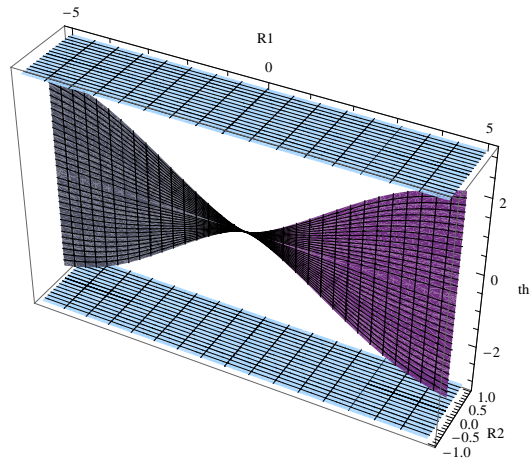


Рис. 6: Множество разреза в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



Рис. 7: Множество разреза в $SE(2)$

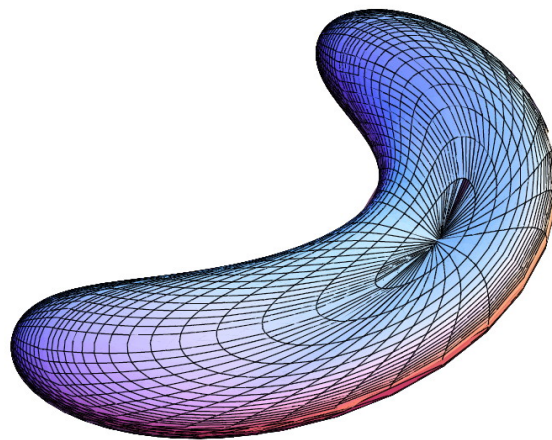


Рис. 8: Субриманова сфера $S_{\pi/2} \subset SE(2)$

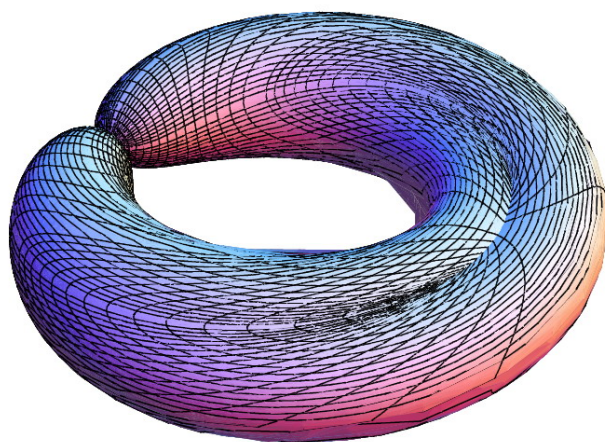


Рис. 9: Субриманова сфера $S_\pi \subset SE(2)$

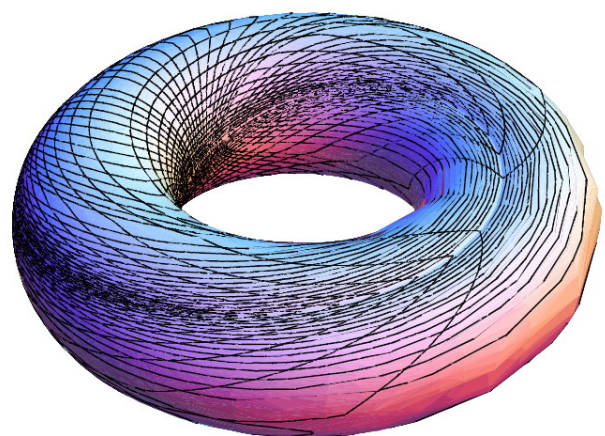


Рис. 10: Субриманова сфера $S_{3\pi/2} \subset SE(2)$

2.4.9 Метрические прямые

Метрические прямые, проходящие через единичный элемент $g_0 = \text{Id}$, суть $g(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $\lambda \in C_3 \cup C_5$. Геодезические $\text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C_3$, проецируются на плоскость (x, y) в трактрисы, а геодезические $\text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C_5$ — в прямые $(x, y) = (\pm t, 0)$.

2.4.10 Модель велосипеда

Субриманову задачу на группе $\text{SE}(2)$ можно рассматривать как задачу об оптимальном движении модели велосипеда.

Пусть переднее и заднее колеса велосипеда касаются земли в точках \mathbf{f} и \mathbf{b} соответственно, а расстояние между этими точками (длина рамы велосипеда) постоянно и равно ℓ . При движении велосипеда точки \mathbf{f} и \mathbf{b} пробегают две кривые — передний и задний пути. При этом отрезок $\mathbf{f} - \mathbf{b}$ в каждый момент времени касается заднего пути. Назовем движение велосипеда оптимальным, если оно минимизирует длину переднего пути. Тогда задача об оптимальном движении велосипеда есть в точности субриманова задача на группе $\text{SE}(2)$ (2.5)–(2.8).

Будем говорить, что две кривые на плоскости *имеют одинаковую форму*, если одну из них можно перевести в другую композицией движений и растяжений. *Ширина* плоской кривой есть нижняя грань расстояний между двумя параллельными прямыми, ограничивающими полосу, содержащую эту кривую.

Теорема 2.13. *Оптимальная траектория переднего колеса велосипеда $\mathbf{b}(t)$ есть либо прямая, либо дуга неинфлексионной эластички ширины не больше 2ℓ . Таким образом возникает любая форма неинфлексионной эластички.*

Теорема 2.14. *Бесконечное движение велосипеда является оптимальным на каждом своем отрезке тогда и только тогда, когда оно имеет один из следующих двух типов:*

- (1) *передний путь $\mathbf{b}(t)$ есть прямая, а задний путь $\mathbf{f}(t)$ есть трактриса или прямая,*
- (2) *передний путь $\mathbf{b}(t)$ есть солитон Эйлера (критическая эластичка) ширины 2ℓ , а задний путь $\mathbf{f}(t)$ есть трактриса.*

2.4.11 Группа изометрий и однородные геодезические

Теорема 2.15. *Группа изометрий субримановой структуры на $\text{SE}(2)$ есть $\text{Isom}(\text{SE}(2)) = \text{SE}(2) \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, где справа первый сомножитель $\text{SE}(2)$ действует на себе левыми сдвигами, второй сомножитель \mathbb{Z}_2 действует на пару (\mathbf{b}, \mathbf{f}) как отражение плоскости в какой-нибудь оси, а третий сомножитель \mathbb{Z}_2 действует как отражение $(\mathbf{b}, \mathbf{f}) \mapsto (\mathbf{b}, 2\mathbf{b} - \mathbf{f})$.*

Геодезическая γ на субримановом многообразии M называется *однородной*, если она является однородным пространством некоторой однопараметрической подгруппы в группе изометрий $\text{Isom}(M)$, т.е. существует однопараметрическая подгруппа $\{\varphi_s \mid s \in \mathbb{R}\} \subset \text{Isom}(M)$ такая, что:

1. $\forall s \in \mathbb{R} \quad \varphi_s(\gamma) \subset \gamma$,
2. $\forall g_1, g_2 \in \gamma \quad \exists s \in \mathbb{R} : \quad \varphi_s(g_1) = g_2$.

Субриманово многообразие называется *геодезически орбитальным*, если все его геодезические однородны.

Теорема 2.16. *Однородные геодезические на $\text{SE}(2)$ есть $g(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C_4 \cup C_5$. Это однопараметрические подгруппы e^{tX_2} и e^{tX_1} , они проецируются на плоскость (x, y) соответственно в точку $(0, 0)$ и прямую $y = 0$.*

Поэтому $\text{SE}(2)$ не является геодезически орбитальным пространством.

2.4.12 Библиографические комментарии

Разделы 2.4.1–2.4.3 опираются на [49], разделы 2.4.4–2.4.6, 2.4.8, 2.4.9 — на [50], раздел 2.4.7 — на [51], разделы 2.4.10 и 2.4.11 — на [52, 53].

2.5 Субриманова задача на группе SH(2) движений псевдоевклидовой плоскости

2.5.1 Группа SH(2) движений псевдоевклидовой плоскости

Псевдоевклидова плоскость *Псевдоевклидовой плоскостью* называется двумерное вещественное линейное пространство, в котором задана знакопеременная билинейная форма

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

Расстояние r между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ определяется формулами

$$r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2, \\ r = \begin{cases} |r| & \text{при } r^2 \geq 0, \\ i|r| & \text{при } r^2 < 0. \end{cases}$$

Множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, находящихся на нулевом расстоянии от начала координат ($x_1^2 - x_2^2 = 0$), называется *световым конусом*. Дополнение псевдоевклидовой плоскости до светового конуса распадается на 4 связные компоненты — *квадранты* ($\text{sgn}(x_1 - x_2) = \pm 1, \text{sgn}(x_1 + x_2) = \pm 1$).

Группа Ли SH(2) и алгебра Ли $\mathfrak{sh}(2)$ *Движением* псевдоевклидовой плоскости называется ее линейное преобразование, сохраняющее ориентацию, квадранты, и расстояние между точками этой плоскости. *Группа движений псевдоевклидовой плоскости* обозначается SH(2). Эта группа имеет линейное представление

$$\text{SH}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } z & \text{sh } z & x \\ \text{sh } z & \text{ch } z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, \in \mathbb{R} \right\}.$$

Действие движения $g = (x, y, z)$ на точку $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ псевдоевклидовой плоскости вычисляется с помощью матричного произведения:

$$\begin{pmatrix} \text{ch } z & \text{sh } z & x \\ \text{sh } z & \text{ch } z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \text{ch } z + a_2 \text{sh } z + x \\ a_1 \text{sh } z + a_2 \text{ch } z + y \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $g : (a_1, a_2) \mapsto (a_1 \text{ch } z + a_2 \text{sh } z + x, a_1 \text{sh } z + a_2 \text{ch } z + y)$.

$G = \text{SH}(2)$ есть группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sh}(2) = \text{span}(E_{21} + E_{12}, E_{13}, E_{23})$. Базисные левоинвариантные векторные поля на группе SH(2) суть

$$X_1 = L_{g*} E_{13} = \text{ch } z \frac{\partial}{\partial x} + \text{sh } z \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 = L_{g*} (E_{21} + E_{12}) = \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 = L_{g*} E_{23} = \text{sh } z \frac{\partial}{\partial x} + \text{ch } z \frac{\partial}{\partial y},$$

с таблицей умножения

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0. \quad (2.15)$$

2.5.2 Субриманова задача на SH(2)

Рассмотрим субриманову задачу на группе SH(2) с ортонормированным репером (X_1, X_2) :

$$\dot{g} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad g \in G = \text{SH}(2), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.16)$$

$$g(0) = g_0 = \text{Id}, \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.17)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (2.18)$$

Согласно классификации Аграчева-Барилари [43], это единственная, с точностью до локальных изометрий, неинтегрируемая субриманова задача ранга 2 на группе SH(2), ей соответствуют инварианты $\chi = -\kappa = 1$.

2.5.3 Геодезические

Существование оптимальных управлений в задаче (2.16)–(2.18) следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

Принцип максимума Понтрягина Анормальные траектории постоянны.

Нормальные экстремали суть проекции траекторий гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$, где $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. В координатах эта система записывается как

$$\dot{h}_1 = h_2 h_0, \quad (2.19)$$

$$\dot{h}_2 = -h_1 h_0, \quad (2.20)$$

$$\dot{h}_0 = h_1 h_2, \quad (2.21)$$

$$\dot{x} = h_1 \operatorname{ch} z,$$

$$\dot{y} = h_1 \operatorname{sh} z,$$

$$\dot{z} = h_2.$$

На поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ в координатах (γ, c) , где

$$h_1 = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad h_2 = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad c = -2h_3,$$

вертикальная подсистема (2.19)–(2.21) принимает форму двулистного накрытия маятника

$$\dot{\gamma} = c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma, \quad (\gamma, c) \in \mathfrak{g}^* \cap \{H = 1/2\} \simeq (2S_\gamma^1) \times \mathbb{R}_c. \quad (2.22)$$

Первый интеграл этого уравнения — энергия маятника

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma = 2h_3^2 - h_1^2 + h_2^2 \in [-1, +\infty).$$

Симплектическое слоение На коалгебре Ли \mathfrak{g}^* имеется функция Казимира $F = h_1^2 - h_3^2$. Симплектическое слоение состоит из:

- гиперболических цилиндров (компонент связности поверхностей $\{h_1^2 - h_3^2 = \operatorname{const} \neq 0\}$),
- полуплоскостей (компонент связности поверхности $\{h_1^2 - h_3^2 = 0, h_1^2 + h_3^2 \neq 0\}$),
- точек $\{h_1 = h_3 = 0, h_2 = \operatorname{const}\}$.

Энергия маятника есть линейная комбинация функции Казимира и гамильтониана: $E = 2H - 2F$.

Стратификация цилиндра C и выпрямляющие координаты Так как вертикальная подсистема гамильтоновой системы для задачи на $\operatorname{SH}(2)$ — маятник (2.22) — совпадает с таковой системой (2.12) для задачи на $\operatorname{SE}(2)$, то стратификация цилиндра C и выпрямляющие координаты (φ, k) для задачи на $\operatorname{SH}(2)$ совпадают с таковыми для задачи на $\operatorname{SE}(2)$, см. п. 2.4.2.

Параметризация геодезических Если $\lambda = (\varphi, k) \in C_1$, то $\varphi_t = \varphi + t$ и

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{2} \left[\left(w + \frac{1}{w(1-k^2)} \right) [\operatorname{E}(\varphi) - \operatorname{E}(\varphi_0)] + \left(\frac{k}{w(1-k^2)} - kw \right) [\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0] \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(w - \frac{1}{w(1-k^2)} \right) [\operatorname{E}(\varphi) - \operatorname{E}(\varphi_0)] - \left(\frac{k}{w(1-k^2)} + kw \right) [\operatorname{sn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi_0] \right] \\ s_1 \ln [(\operatorname{dn} \varphi - k \operatorname{cn} \varphi) w] \end{pmatrix}$$

где $w = \frac{1}{\operatorname{dn} \varphi_0 - k \operatorname{cn} \varphi_0}$.

Если $\lambda = (\varphi, k) \in C_2$, то $\psi = \frac{\varphi}{k}$, $\psi_t = \frac{\varphi_t}{k} = \psi + \frac{t}{k}$ и

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w(1-k^2)} - w \right) [\operatorname{E}(\psi) - \operatorname{E}(\psi_0) - k'^2(\psi - \psi_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(kw + \frac{k}{w(1-k^2)} \right) [\operatorname{sn} \psi - \operatorname{sn} \psi_0], \\ y &= -\frac{s_2}{2} \left(\frac{1}{w(1-k^2)} + w \right) [\operatorname{E}(\psi) - \operatorname{E}(\psi_0) - k'^2(\psi - \psi_0)] \\ &\quad + \frac{s_2}{2} \left(kw - \frac{k}{w(1-k^2)} \right) [\operatorname{sn} \psi - \operatorname{sn} \psi_0], \\ z &= s_2 \ln [(\operatorname{dn} \psi - k \operatorname{cn} \psi) w], \end{aligned}$$

где $w = \frac{1}{\operatorname{dn} \psi_0 - k \operatorname{cn} \psi_0}$.

Если $\lambda = (\varphi, k) \in C_3$, $k = 1$, то $\varphi_t = \varphi + t$ и

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{2} \left[\frac{1}{w} (\varphi - \varphi_0) + w (\operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} \varphi_0) \right] \\ \frac{s_2}{2} \left[\frac{1}{w} (\varphi - \varphi_0) - w (\operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} \varphi_0) \right] \\ -s_1 s_2 \ln[w \operatorname{sech} \varphi] \end{pmatrix},$$

где $w = \operatorname{ch} \varphi_0$.

Если $\lambda = (\gamma, c) \in C_4$, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right) t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = (\gamma, c) \in C_5$, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right) t \end{pmatrix}.$$

Проекция геодезической на плоскость (x, y) имеет кривизну $\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{(\operatorname{ch} 2z)^{3/2}}$. Она имеет точки перегиба при $\sin \frac{\gamma}{2} = 0$ (если $\lambda \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$) и точки возврата при $\cos \frac{\gamma}{2} = 0$ (если $\lambda \in C_2$).

2.5.4 Симметрии и страты Максвелла

Фазовый портрет маятника (2.22) имеет группу симметрий $\operatorname{Sym} = \{\operatorname{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}$, описанную в разделе 2.4.3. Продолжение этой группы симметрий на прообраз экспоненциального отображения $N = C \times \mathbb{R}_+$ описано в том же разделе. Продолжение этой группы симметрий на образ экспоненциального отображения имеет вид

$$\varepsilon^i : g = (x, y, z) \mapsto g^i = \varepsilon^i(g) = (x^i, y^i, z^i),$$

где

$$\begin{aligned} (x^1, y^1, z^1) &= (x \operatorname{ch} z - y \operatorname{sh} z, x \operatorname{sh} z - y \operatorname{ch} z, z), \\ (x^2, y^2, z^2) &= (x \operatorname{ch} z - y \operatorname{sh} z, -x \operatorname{sh} z + y \operatorname{ch} z, -z), \\ (x^3, y^3, z^3) &= (x, -y, -z), \\ (x^4, y^4, z^4) &= (-x, y, -z), \\ (x^5, y^5, z^5) &= (-x \operatorname{ch} z + y \operatorname{sh} z, x \operatorname{sh} z - y \operatorname{ch} z, -z), \\ (x^6, y^6, z^6) &= (-x \operatorname{ch} z + y \operatorname{sh} z, -x \operatorname{sh} z + y \operatorname{ch} z, z), \\ (x^7, y^7, z^7) &= (-x, -y, z). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Имеет место предложение, аналогичное предложению 2.3.

Теорема 2.17. *Первое время Максвелла, соответствующее группе симметрий Sym , для почти всех геодезических выражается следующим образом:*

$$\begin{aligned} \lambda \in C_1 &\implies t_{\operatorname{MAX}}^1(\lambda) = 4K(k), \\ \lambda \in C_2 &\implies t_{\operatorname{MAX}}^1(\lambda) = 4kK(k), \\ \lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 &\implies t_{\operatorname{MAX}}^1(\lambda) = +\infty. \end{aligned}$$

Имеет место

Следствие 2.1. *Для любого $\lambda \in C$ первое время Максвелла t_{MAX}^1 равно периоду колебаний маятника (2.22).*

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.8.

2.5.5 Оценки сопряженного времени

Обозначим через $p_1^1(k) \in (2K, 3K)$ первый положительный корень уравнения $\operatorname{sn} p \operatorname{E}(p) - \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p = 0$.

Теорема 2.18. *Если $\lambda \in C_1$, то $4K(k) \leq t_{\operatorname{conj}}^1(\lambda) \leq 2p_1^1(k)$. Более того,*

$$\lim_{k \rightarrow +0} t_{\operatorname{conj}}^1(\lambda) = 2\pi, \quad \lim_{k \rightarrow 1-0} t_{\operatorname{conj}}^1(\lambda) = +\infty.$$

Теорема 2.19. Если $\lambda \in C_2$, то $4kK(k) \leq t_{\text{conj}}^1(\lambda) \leq 2kp_1^1(k)$. Более того,

$$\lim_{k \rightarrow +0} t_{\text{conj}}^1(\lambda) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow 1-0} t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty.$$

Теорема 2.20. Если $\lambda \in C_4$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = 2\pi$.

Если $\lambda \in C_3 \cup C_5$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty$.

Теорема 2.21. Нижние оценки для $t_{\text{conj}}^1(\lambda)$ при $\lambda \in C_1 \cup C_2$, приведенные в теоремах 2.18 и 2.19, точны:

- (1) если $\lambda = (\varphi, k) \in C_1$ и $\text{sn } \varphi = 0$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = 4K(k)$,
- (2) если $\lambda = (\varphi, k) \in C_2$ и $\text{sn } \frac{\varphi}{k} = 0$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = 4kK(k)$.

2.5.6 Время разреза

Теорема 2.22. Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \min(t_{\text{MAX}}^1(\lambda), t_{\text{conj}}^1(\lambda)) = \begin{cases} 4K(k), & \lambda \in C_1, \\ 4kK(k), & \lambda \in C_2, \\ 2\pi, & \lambda \in C_4, \\ +\infty, & \lambda \in C_3 \cup C_5. \end{cases}$$

Теорема 2.23. (1) Функция $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$ зависит только от энергии E маятника (2.22).

- (2) Функция t_{cut} инвариантна относительно вертикальной компоненты гамильтонова поля \vec{H}_v и симметрий $\varepsilon^i \in \text{Sym}$.
- (3) Функция t_{cut} является непрерывной на C и гладкой на $C_1 \cup C_2$.
- (4) $\lim_{E \rightarrow -1} t_{\text{cut}} = 2\pi$, $\lim_{E \rightarrow 1} t_{\text{cut}} = +\infty$, $\lim_{E \rightarrow +\infty} t_{\text{cut}} = 0$.

2.5.7 Диффеоморфная структура экспоненциального отображения

Рассмотрим открытое всюду плотное подмножество в G , не содержащее первых точек Максвелла:

$$\tilde{G} = \{g \in G \mid z \neq 0\}$$

и его разбиение на компоненты связности

$$\tilde{G} = G_1 \sqcup G_2, \quad G_1 = \{g \in G \mid z > 0\}, \quad G_2 = \{g \in G \mid z < 0\}.$$

Также рассмотрим открытое плотное подмножество в пространстве всех потенциально оптимальных геодезических

$$\tilde{N} = \left\{ (\lambda, t) \in \cup_{i=1}^3 N_1 \cup N_5 \mid t < t_{\text{cut}}(\lambda), \sin\left(\frac{\gamma t/2}{2}\right) \neq 0 \right\}$$

и его разбиение на компоненты связности

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= D_1 \sqcup D_2, \\ D_1 &= \left\{ (\lambda, t) \in \tilde{N} \mid \sin\left(\frac{\gamma t/2}{2}\right) > 0 \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (\lambda, t) \in \tilde{N} \mid \sin\left(\frac{\gamma t/2}{2}\right) < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.24. Отображения

$$\begin{aligned} \text{Exp} : D_i &\rightarrow G_i, & i = 1, 2, \\ \text{Exp} : \tilde{N} &\rightarrow \tilde{G} \end{aligned}$$

суть диффеоморфизмы.

2.5.8 Множество разреза

Теорема 2.25. *Множество разреза Cut содержится в плоскости $\{z = 0\}$. Имеет место разбиение на связные компоненты:*

$$\text{Cut} = \text{Cut}_{\text{loc}}^+ \sqcup \text{Cut}_{\text{loc}}^- \sqcup \text{Cut}_{\text{glob}}^+ \sqcup \text{Cut}_{\text{glob}}^-,$$

где

- $\text{Cut}_{\text{loc}}^+$ есть часть плоскости $\{z = 0\}$, ограниченная кривой

$$x = \pm \frac{4ka(k)}{1-k^2}, \quad y = \frac{4a(k)}{1-k^2}, \quad k \in [0, 1),$$

$$a(k) = E(k) - (1-k^2)K(k),$$

содержащая луч $\{z = x = 0, y > 0\}$ за вычетом начальной точки $\text{Id} = \{x = y = z = 0\}$,

- $\text{Cut}_{\text{loc}}^-$ получается из $\text{Cut}_{\text{loc}}^+$ отражением $(x, y) \mapsto (x, -y)$,

- $\text{Cut}_{\text{glob}}^+$ есть часть плоскости $\{z = 0\}$, ограниченная кривой

$$x = \frac{4E(k)}{1-k^2}, \quad y = \pm \frac{4kE(k)}{1-k^2}, \quad k \in [0, 1),$$

$$a(k) = E(k) - (1-k^2)K(k),$$

содержащаяся в полуплоскости $\{z = 0, x > 0\}$,

- $\text{Cut}_{\text{glob}}^-$ получается из $\text{Cut}_{\text{glob}}^+$ отражением $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

Компоненты связности $\text{Cut}_{\text{loc}}^\pm$ содержат в своем замыкании начальную точку Id , а компоненты $\text{Cut}_{\text{glob}}^\pm$ нет.

Множество разреза изображено на Рис. 11. На Рис. 12 изображено множество разреза и первая кустика Conj^1 .

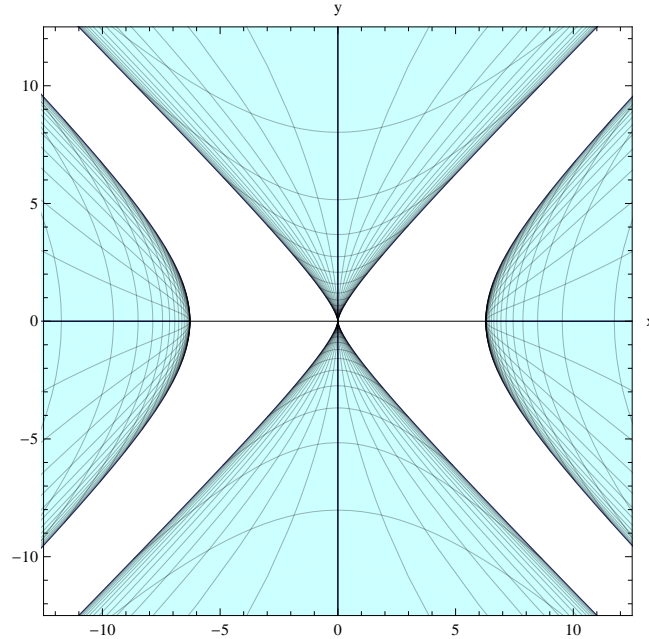


Рис. 11: Множество разреза на $\text{SH}(2)$

2.5.9 Сферы

Субримановы сферы S_R , $R > 0$, гомеоморфны двумерной евклидовой сфере, см. сферу S_π на Рис. 13 и сферу $S_{2\pi}$ на Рис. 14.

Сферы имеют особенности при пересечении со множеством разреза, см. пересечение Cut и $S_\pi \cap \{z < 0\}$ на Рис. 15 и пересечение Cut и $S_{2\pi} \cap \{z < 0\}$ на Рис. 16.

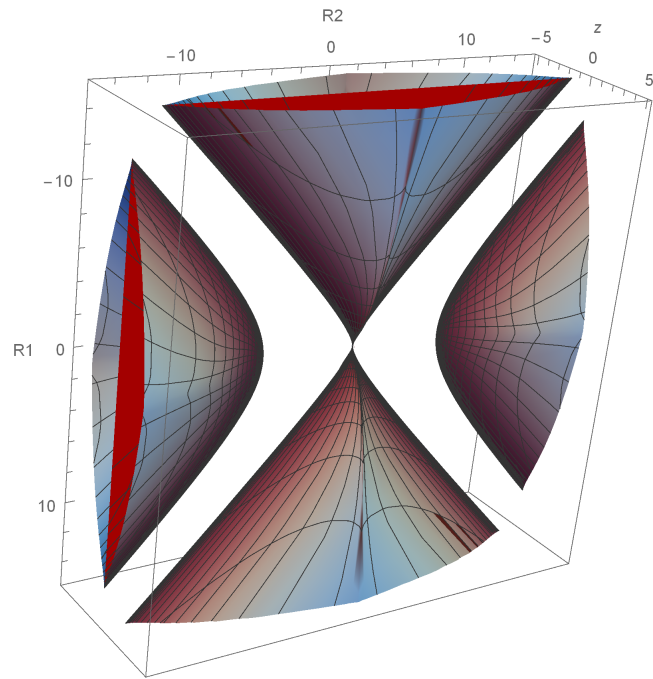


Рис. 12: Первая каустика и множество разреза на $\text{SH}(2)$

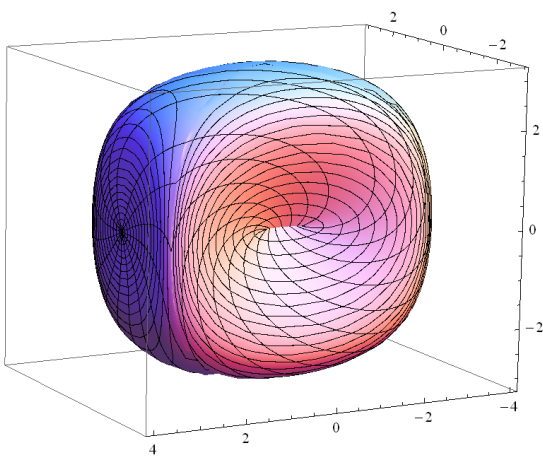


Рис. 13: Сфера $S_\pi \subset \text{SH}(2)$

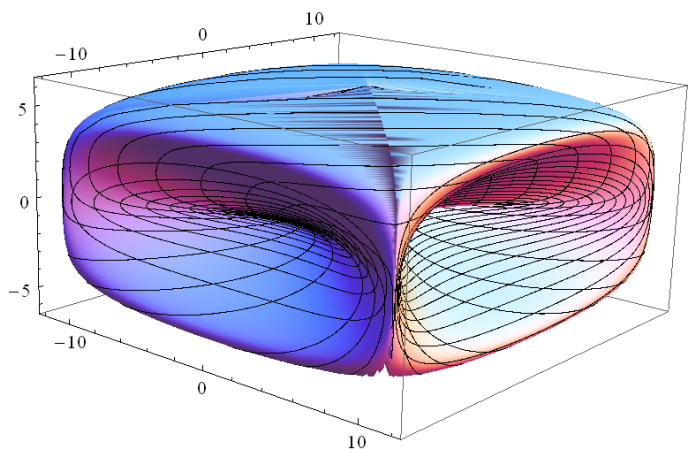


Рис. 14: Сфера $S_{2\pi} \subset \text{SH}(2)$

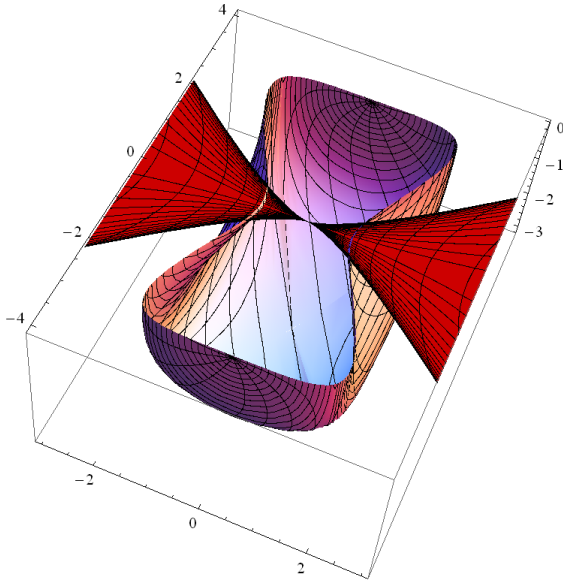


Рис. 15: Пересечение полусферы $S_\pi \cap \{z < 0\}$ со множеством разреза

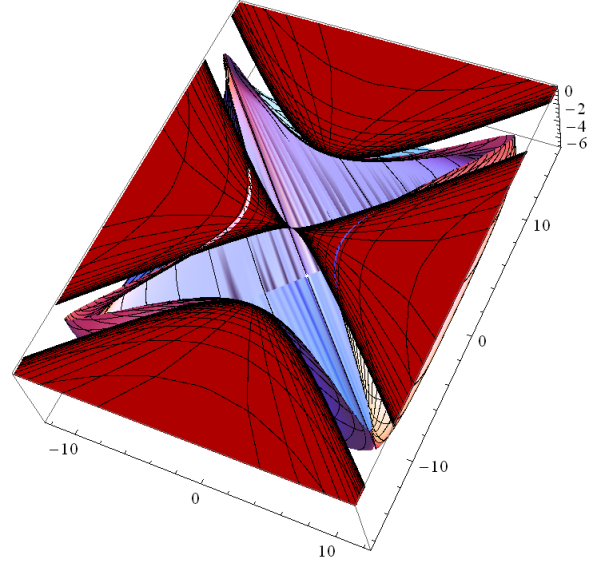


Рис. 16: Пересечение полусферы $S_{2\pi} \cap \{z < 0\}$ со множеством разреза

2.5.10 Структура оптимального синтеза

Теорема 2.26. (1) Для любой точки $g_1 \in \text{Cut} \setminus \text{Conj}^1 = \text{int}_{\{z=0\}} \text{Cut}$ существуют ровно две кратчайшие, соединяющие точки Id и g_1 , причем для этих кратчайших g_1 есть точка разреза и точка Максвелла, но не сопряженная точка.

(2) Для любой точки $g_1 \in \text{Cut} \cap \text{Conj}^1 = (\partial_{\{z=0\}} \text{Cut}) \setminus \{\text{Id}\}$ существует единственная кратчайшая, соединяющая точки Id и g_1 , причем для этой кратчайшей g_1 есть точка разреза и сопряженная точка, но не точка Максвелла.

(3) Для любой точки $g_1 \in G \setminus (\text{Cut} \cup \text{Id})$ существует единственная кратчайшая, соединяющая точки Id и g_1 , причем для этой кратчайшей g_1 не является ни точка разреза, ни сопряженной точкой, ни точкой Максвелла.

2.5.11 Метрические прямые

Метрические прямые, проходящие через единичный элемент Id , суть

$$g(t) = \text{Exp}(\lambda, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in C_3 \cup C_5.$$

2.5.12 Библиографические комментарии

Раздел 2.5.1 опирается на книгу [39], разделы 2.5.2, 2.5.3 — на [54], разделы 2.5.4, 2.5.5 — на [55], разделы 2.5.6–2.5.11 — на [56].

2.6 Задача Эйлера об эластике

2.6.1 История задачи

В 1691 году Я. Бернулли рассмотрел задачу о форме однородного плоского упругого стержня, сжимаемого внешней силой. Он вывел уравнения для упругого стержня, закрепленного вертикально в горизонтальной стене и согнутого силой, направляющей его верхний конец горизонтально (*прямоугольная эластика*):

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in [0, 1),$$

где (x, y) есть упругий стержень, а s — его параметр длины (стержень отклоняется по горизонтали на расстояние 1). Я. Бернулли проинтегрировал эти дифференциальные уравнения в рядах и получил двусторонние оценки их решения в конечной точке $x = 1$ [64].

В 1742 году Д. Бернулли в своем письме [63] к Эйлеру написал, что упругая энергия стержня пропорциональна величине $J = \int \frac{ds}{R^2}$, где R — радиус кривизны стержня, и предложил отыскивать форму упругого стержня из вариационного принципа $J \rightarrow \min$. В это время Эйлер писал свой трактат по вариационному исчислению «Methodus inveniendi . . .» [60], опубликованный в 1744 году, и снабдил свою книгу приложением «De curvis elasticis», в котором он применил только что разработанные методы к задаче об упругих стержнях. Эйлер рассмотрел тонкую однородную упругую пластину, прямолинейную в естественном (не напряженном) состоянии. Он поставил следующую задачу для профиля пластины:

«. . . среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B , но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int_A^B \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим».

Эйлер написал уравнение, известное сейчас как уравнение Эйлера-Лагранжа, для соответствующей вариационной задачи и свел его к уравнениям

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \quad ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

параметры которых выражаются через упругие характеристики и длину стержня, а также величину нагрузки. Говоря современным языком, Эйлер исследовал качественное поведение эллиптических функций, параметризующих упругие кривые с помощью качественного анализа определяющих их уравнений. После работы Леонарда Эйлера кривые, представляющие форму однородного плоского стержня, называются *эластиками Эйлера*. Эйлер описал все типы эластик и указал значения параметров, для которых эти типы реализуются. Эйлер разделил все эластики на 9 классов, изображенных на рисунках:

1. прямая линия,
2. синусообразная кривая, Рис. 19,
3. прямоугольная эластика, Рис. 20,
4. Рис. 21,
5. замкнутая эластика в форме восьмерки, Рис. 22,
6. Рис. 23,
7. непериодическая эластика с одной петлей, «солитон Эйлера», Рис. 24,
8. Рис. 25,
9. окружность.

Эластики типов 2–6, имеющие точки перегиба, называются *инфлекссионными*, эластика типа 7 называется *критической*, а эластики типа 8 без точек перегиба называются *неинфлекссионными*. Семейство всех эластик изображено на Рис. 17.

Первую явную параметризацию эластик Эйлера получил Л. Заалшютц в 1880 г. [73].

В 1906 г. будущий нобелевский лауреат Макс Борн защитил диссертацию «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве» [66]. Он рассмотрел задачу об эластиках методами вариационного исчисления и вывел из уравнения Эйлера-Лагранжа уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \theta, \\ A\ddot{\theta} + R \sin(\theta - \gamma) &= 0, & A, R, \gamma &= \text{const}. \end{aligned}$$

То есть угол θ наклона эластик удовлетворяет уравнению математического маятника. Далее, Борн изучил устойчивость эластик с закрепленными концами и касательными на концах. Он доказал, что дуга элаستيки без точек перегиба устойчива (в этом случае угол θ монотонен и может быть выбран параметром на эластике; Борн показал, что вторая вариация функционала упругой энергии $J = \frac{1}{2} \int \dot{\theta}^2 dt$ положительна). В общем случае Борн записал якобиан, обращающийся в нуль в сопряженных точках. В силу сложности функций, входящих в якобиан, Борн ограничился численным исследованием сопряженных точек. Он первым численно построил чертежи эластик и проверил теоретические результаты с помощью экспериментов с упругими стержнями. Более того, Борн исследовал устойчивость эластик с различными другими граничными условиями и получил некоторые результаты для трехмерных упругих кривых.

В 1993 г. В. Джурджевич [98] обнаружил эластики Эйлера в задаче о качении шара по плоскости без прокручивания и проскальзывания (см. раздел 2.8), а Р. Брокетт и Л. Даи [112] — в субримановой

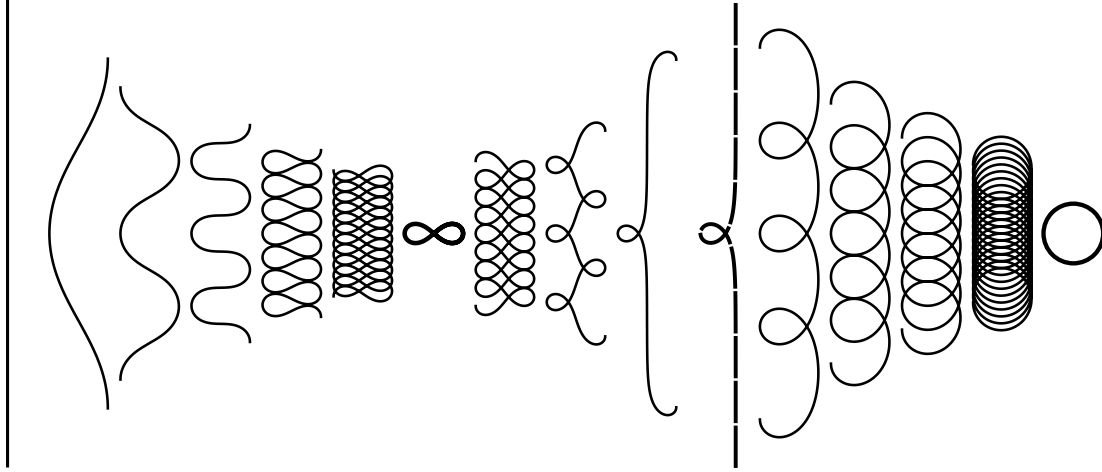


Рис. 17: Эластики Эйлера

задаче на группе Картана (см. раздел 2.10). Эластики Эйлера также удивительным образом появляются в плоской субримановой задаче Мартине (см. раздел 2.3), субримановых задачах на группах $SE(2)$ (см. раздел 2.4) и на группе Энгеля (см. раздел 2.9). Было бы интересно понять, почему эластики Эйлера появляются в стольких задачах оптимального управления.

Далее задача Эйлера об эластике исследовалась в работах [57, 59, 61, 71, 74–77], на которые опирается изложение в этом разделе.

2.6.2 Постановка задачи

Механическая постановка Пусть однородный упругий стержень на плоскости \mathbb{R}^2 имеет длину $l > 0$. Выберем любые точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$ и произвольные единичные касательные вектора $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2$, $|v_i| = 1$, $i = 0, 1$. Задача заключается в том, чтобы найти профиль стержня $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|\dot{\gamma}(s)| \equiv 1$, выходящего из точки a_0 и приходящего в точку a_1 с соответствующими касательными векторами v_0 и v_1 :

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= a_0, & \gamma(l) &= a_1, \\ \dot{\gamma}(0) &= v_0, & \dot{\gamma}(l) &= v_1, \end{aligned}$$

с минимальной упругой энергией

$$J = \frac{1}{2} \int_0^l k^2(s) ds \rightarrow \min,$$

где $k(s)$ — кривизна кривой $\gamma(s)$.

Задача оптимального управления Выберем на плоскости \mathbb{R}^2 декартовы координаты (x, y) . Будем обозначать параметр длины s на кривой γ через t , и пусть $t_1 = l$. Искомая кривая имеет параметризацию $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, t_1]$, а ее граничные точки имеют координаты $a_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1$. Обозначим через $\theta(t)$ угол между касательным вектором $\dot{\gamma}(t)$ и положительным направлением оси x . Наконец, пусть касательные векторы в граничных точках кривой γ имеют координаты $v_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, $i = 0, 1$, см. Рис. 18.

Тогда искомая кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ есть проекция траектории следующей управляемой системы:

$$\dot{x} = \cos \theta, \tag{2.24}$$

$$\dot{y} = \sin \theta, \tag{2.25}$$

$$\dot{\theta} = u, \tag{2.26}$$

$$g = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

$$g(0) = g_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \quad g(t_1) = g_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \quad t_1 \text{ фиксировано.} \tag{2.28}$$

Для естественно параметризованной кривой γ кривизна равна угловой скорости: $k = \dot{\theta} = u$, откуда получаем функционал качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min. \tag{2.29}$$

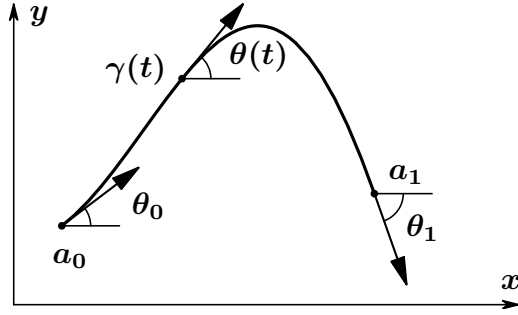


Рис. 18: Постановка задачи об эластिकाх Эйлера

Естественный класс допустимых управлений для задачи (2.24)–(2.29) есть $u(\cdot) \in L^2[0, t_1]$, поэтому допустимая траектория есть $g(\cdot) \in W^{1,2}([0, t_1], M)$.

В векторных обозначениях задача принимает форму:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= X_1(g) + uX_2(g), \quad g \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R}, \\ g(0) &= g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad t_1 \text{ фиксировано,} \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min, \quad u \in L^2[0, t_1], \end{aligned} \quad (2.30)$$

где векторные поля в правой части системы (2.30) суть

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Пространство состояний $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ имеет естественную структуру группы движений плоскости $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(2)$, см. раздел 2.4. При этом векторные поля X_1, X_2 становятся левоинвариантными полями на группе Ли G . Таблица умножения в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2)$ приведена в (2.10).

Таким образом, задача Эйлера об эластिकाх (2.24)–(2.29) есть левоинвариантная задача оптимального управления на группе $\text{SE}(2)$. Поэтому можно считать, что $g_0 = \text{Id} = (0, 0, 0)$.

2.6.3 Множество достижимости

Теорема 2.27. *Множество достижимости системы (2.30) из точки $\text{Id} = (0, 0, 0)$ за время $t_1 > 0$ есть*

$$\mathcal{A}(t_1) = \{(x, y, \theta) \in G \mid x^2 + y^2 < t_1^2 \text{ или } (x, y, \theta) = (t_1, 0, 0)\}.$$

Топологически множество достижимости $\mathcal{A}(t_1)$ есть открытый полноторий (внутренность тора) с одной точкой на границе. Будем далее рассматривать задачу об эластिकाх при естественном условии управляемости: $g_1 \in \mathcal{A}(t_1)$.

2.6.4 Существование и ограниченность оптимальных управлений

Теорема 2.28. *Пусть $g_1 \in \mathcal{A}(t_1)$. Тогда существует оптимальное управление $u \in L^2[0, t_1]$. Более того, $u \in L^\infty[0, t_1]$. Поэтому оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.*

2.6.5 Экстремали

Анормальные траектории Проходящая через точку Id естественно параметризованная анормальная траектория есть $(x, y, \theta) = (t, 0, 0)$, $t \in [0, t_1]$. Она проецируется на плоскость (x, y) в отрезок — это упругий стержень в отсутствие внешних сил. Упругая энергия в этом случае достигает абсолютного минимума $J = 0$, поэтому анормальная траектория оптимальна. Именно эта траектория приходит в единственную точку $(t_1, 0, 0)$ на границе множества достижимости $\mathcal{A}(t_1)$. Анормальная траектория одновременно нормальна.

Нормальные экстремали Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$, где $H = h_1 + \frac{1}{2}h_2^2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. В координатах эта система имеет вид

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3, \quad \dot{h}_2 = h_3, \quad \dot{h}_3 = h_1 h_2, \quad (2.31)$$

$$\dot{g} = X_1 + h_2 X_2. \quad (2.32)$$

Вертикальная подсистема (2.31) имеет интеграл — функцию Казимира $F = h_1^2 + h_3^2$.

Введем координаты

$$c = h_2, \quad h_1 = -r \cos \gamma, \quad h_2 = -r \sin \gamma,$$

в которых вертикальная подсистема (2.31) принимает форму *математического маятника*

$$\dot{\gamma} = c, \quad \dot{c} = -r \sin \gamma, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in S^1, \quad r \equiv \text{const} \geq 0, \quad (2.33)$$

известного как *кинетический аналог Кирхгофа* для эластик. Полная энергия маятника есть

$$E = H = \frac{c^2}{2} - r \cos \gamma \in [-r, +\infty).$$

Стратификация прообраза экспоненциального отображения и выпрямляющие координаты
Экспоненциальное отображение за время $t_1 > 0$ в задаче об эластике есть

$$\text{Exp}_{t_1} : N = \mathfrak{g}^* \rightarrow G, \quad \lambda \mapsto \pi \circ e^{t_1 \tilde{H}}(\lambda),$$

где $\pi : T^*G \rightarrow G$ есть каноническая проекция.

Прообраз экспоненциального отображения $N = \mathfrak{g}^*$ разбивается на инвариантные многообразия гамильтонова поля \tilde{H} критическими множествами энергии $E = H$:

$$\begin{aligned} N &= \sqcup_{i=1}^7 N_i, \\ N_1 &= \{\lambda \in N \mid r \neq 0, E \in (-r, r)\}, \\ N_2 &= \{\lambda \in N \mid r \neq 0, E \in (r, +\infty)\}, \\ N_3 &= \{\lambda \in N \mid r \neq 0, E = r, \gamma \neq \pi\}, \\ N_4 &= \{\lambda \in N \mid r \neq 0, E = -r\}, \\ N_5 &= \{\lambda \in N \mid r \neq 0, E = r, \gamma = \pi\}, \\ N_6 &= \{\lambda \in N \mid r = 0, c \neq 0\}, \\ N_7 &= \{\lambda \in N \mid r = c = 0\}. \end{aligned}$$

На множествах N_1, N_2, N_3 введем координаты (φ, k, r) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda = (\gamma, c, r) \in N_1 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi, k), \\ \frac{c}{2} = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi, k), \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi, k), \end{cases} \\ k = \sqrt{\frac{E+r}{2r}} \in (0, 1), \quad \sqrt{r}\varphi \pmod{4K(k)} &\in [0, 4K(k)], \\ \lambda = (\gamma, c, r) \in N_2 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{r}}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi}{k}, k\right), \end{cases} \\ k = \sqrt{\frac{2r}{E+r}} \in (0, 1), \quad \sqrt{r}\varphi \pmod{2K(k)k} &\in [0, 2K(k)k], \quad \pm = \operatorname{sgn} c, \\ \lambda = (\gamma, c, r) \in N_3 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi), \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)}, \end{cases} \\ k = 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. & \end{aligned}$$

Параметризация экстремалей В области $N_1 \cap N_2 \cup N_3$ уравнение маятника выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = \dot{r} = 0,$$

поэтому имеет решения

$$\varphi_t = \varphi + t, \quad k, r \equiv \text{const}.$$

В исходных координатах (γ, c) уравнение маятника (2.33) имеет решения:

$$\begin{aligned} \lambda \in N_1 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma_t}{2} = k_1 \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ \cos \frac{\gamma_t}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ \frac{c_t}{2} = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t), \end{cases} \\ \lambda \in N_2 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma_t}{2} = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}\right), \\ \cos \frac{\gamma_t}{2} = \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}\right), \\ \frac{c_t}{2} = \pm \frac{\sqrt{r}}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{r}\varphi_t}{k}\right), \quad \pm = \operatorname{sgn} c, \end{cases} \\ \lambda \in N_3 &\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\gamma_t}{2} = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ \cos \frac{\gamma_t}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)}, \\ \frac{c_t}{2} = \pm \frac{\sqrt{r}}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{cases} \end{aligned}$$

В вырожденных случаях $\cup_{i=4}^7 N_i$ уравнение маятника (2.33) интегрируется в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} \lambda \in N_4 &\Rightarrow \gamma_t \equiv 0, \quad c_t \equiv 0, \\ \lambda \in N_5 &\Rightarrow \gamma_t \equiv \pi, \quad c_t \equiv 0, \\ \lambda \in N_6 &\Rightarrow \gamma_t = ct + \gamma, \quad c_t \equiv c, \\ \lambda \in N_7 &\Rightarrow c_t \equiv 0, \quad r \equiv 0. \end{aligned}$$

Параметризация решений горизонтальной подсистемы (2.32) имеет следующий вид. Если $\lambda \in N_1$, то

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta_t}{2} &= k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t) - k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ \cos \frac{\theta_t}{2} &= \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t) + k^2 \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ x_t &= \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) (\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi)) \\ &\quad + \frac{4k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) (\operatorname{cn} \sqrt{r}\varphi - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ &\quad + \frac{2k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\varphi) (\sqrt{r}t + \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t)) - t, \\ y_t &= \frac{2k}{\sqrt{r}} (2 \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) - 1) (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ &\quad - \frac{2k}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) (2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t). \end{aligned}$$

Если $\lambda \in N_2$, то

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta_t}{2} &= \pm (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi_t)), \\ \cos \frac{\theta_t}{2} &= \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi_t) + \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi_t), \\ x_t &= \frac{1}{\sqrt{r}} (1 - 2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\psi)) \left(\frac{2}{k} (\operatorname{E}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\psi)) - \frac{2 - k^2}{k^2} \sqrt{r}t \right) \\ &\quad + \frac{4}{k\sqrt{r}} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) (\operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi_t)), \\ y_t &= \pm \left(\frac{2}{k\sqrt{r}} (2 \operatorname{cn}^2(\sqrt{r}\psi) - 1) (\operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi_t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \left(\frac{2}{k} (\operatorname{E}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\psi)) - \frac{2 - k^2}{k^2} \sqrt{r}t \right) \right). \end{aligned}$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, $\psi_t = \frac{\varphi_t}{k} = \frac{\varphi+t}{k}$.

Если $\lambda \in N_3$, то

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta_t}{2} &= \pm \left(\frac{\operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)} - \frac{\operatorname{th} \sqrt{r}\varphi}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)} \right), \\ \cos \frac{\theta_t}{2} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)} + \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t), \\ x_t &= (1 - 2 \operatorname{th}^2(\sqrt{r}\varphi))t \\ &\quad + \frac{4 \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi)}{\sqrt{r} \operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)} \right), \\ y_t &= \pm \left(\frac{2}{\sqrt{r}} \left(\frac{2}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{r}\varphi} - 1 \right) \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi)}{\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi)} t \right).\end{aligned}$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$.

Если $\lambda \in N_4 \cup N_5 \cup N_7$, то

$$\theta_t = 0, \quad x_t = t, \quad y_t = 0.$$

Если $\lambda \in N_6$, то

$$\theta_t = ct, \quad x_t = \frac{\sin ct}{c}, \quad y_t = \frac{1 - \cos ct}{c}.$$

Эластики Эйлера Проекция экстремальных траекторий на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластики. Эти кривые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \theta, \\ \ddot{\theta} &= -r \sin(\theta - \gamma), & r, \gamma &\equiv \operatorname{const}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

В зависимости от значения энергии маятника $E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r \cos(\theta - \gamma) \in [-r, +\infty)$ и функции Казимира $r \geq 0$, эластики имеют разные качественные типы, открытые Эйлером.

Если энергия E принимает минимальное значение $-r < 0$, т.е. $\lambda \in N_4$, то эластика (x_t, y_t) есть прямая. Соответствующее движение маятника (2.34) (кинетический аналог Кирхгофа) есть устойчивое положение равновесия.

Если $E \in (-r, r)$, $r > 0$, т.е. $\lambda \in N_1$, то маятник (2.34) колеблется между экстремальными значениями угла, и угловая скорость $\dot{\theta}$ меняет знак. Соответствующие эластики имеют точки перегиба при $\dot{\theta} = 0$ и вершины при $|\dot{\theta}| = \max$, т.к. $\dot{\theta}$ есть кривизна эластики. Такие эластики называются *инфлекссионными*, см. Рис. 19–23. Разные случаи на этих рисунках определяются значениями модуля эллиптических функций $k = \frac{\sqrt{E+r}}{2r} \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}k \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\Rightarrow \text{Рис. 19,} \\ k = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \text{Рис. 20,} \\ k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, k_0\right) &\Rightarrow \text{Рис. 21,} \\ k = k_0 &\Rightarrow \text{Рис. 22,} \\ k \in (k_0, 1) &\Rightarrow \text{Рис. 23.}\end{aligned}$$

Значение $k = 1/\sqrt{2}$ соответствует *прямоугольной эластике*, исследованной Я. Бернулли (см. раздел 2.6.1), Рис. 20. Значение $k \approx 0,909$ соответствует периодической эластике в форме восьмерки, см. Рис. 22. Как отмечал Эйлер, при $k \rightarrow 0$ инфлекссионные эластики похожи на синусоиды, что соответствует гармоническому осциллятору $\ddot{\theta} = -r(\theta - \gamma)$ как кинетическому аналогу Кирхгофа, см. Рис. 19.

Если $E = r > 0$ и $\theta - \gamma \neq \pi$, т.е. $\lambda \in N_3$, то маятник (2.34) стремится к неустойчивому положению равновесия $(\theta - \gamma = \pi, \dot{\theta} = 0)$ вдоль сепаратрисы седла, а соответствующая критическая эластика («солитон Эйлера») имеет одну петлю, см. Рис. 24.

Если $E = r > 0$ и $\theta - \gamma = \pi$, т.е. $\lambda \in N_5$, то маятник (2.34) находится в неустойчивом положении равновесия $(\theta - \gamma = \pi, \dot{\theta} = 0)$ и эластика есть прямая.

Если $E > r > 0$, т.е. $\lambda \in N_2$, то кинетический аналог Кирхгофа есть маятник (2.34), вращающийся против часовой стрелки ($\dot{\theta} > 0$) или по часовой стрелке ($\dot{\theta} < 0$). Соответствующие эластики имеют ненулевую кривизну $\dot{\theta}$, не имеют точек перегиба и называются *неинфлекссионными*, см. Рис. 25.

Если $r = 0$ и $\dot{\theta} \neq 0$, т.е. $\lambda \in N_6$, то маятник (2.34) равномерно вращается в невесомости, и соответствующая эластика есть окружность.

Наконец, если $r = 0$ и $\dot{\theta} = 0$, т.е. $\lambda \in N_7$, то маятник (2.34) неподвижен в невесомости (положение равновесия неустойчиво), и эластика есть прямая.

Изображения эластик на Рис. 19–25 не всегда передают отношение x/y для экономии места.

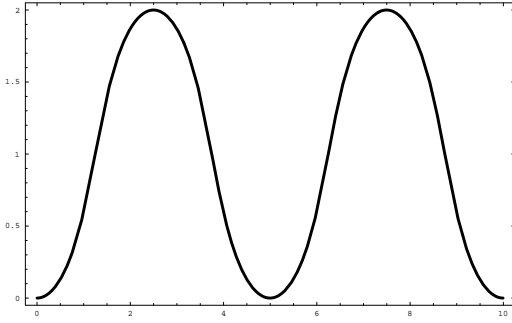


Рис. 19: Инфлекссионная эластика

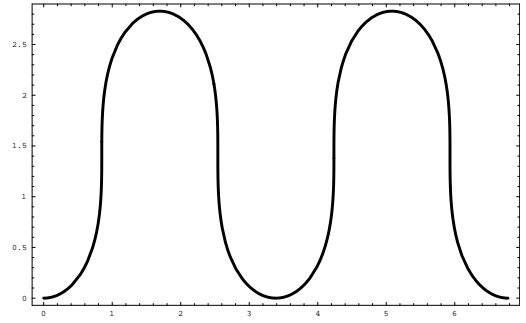


Рис. 20: Прямоугольная эластика

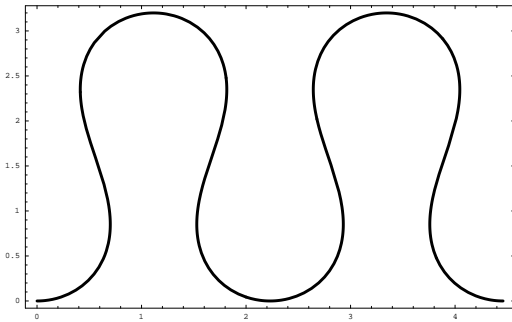


Рис. 21: Инфлекссионная эластика

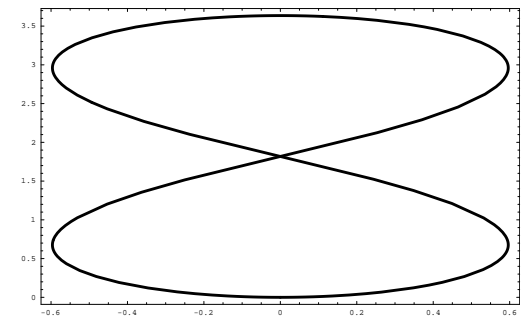


Рис. 22: Эластика-восьмерка

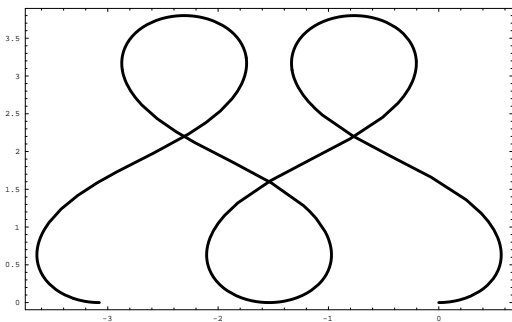


Рис. 23: Инфлекссионная эластика

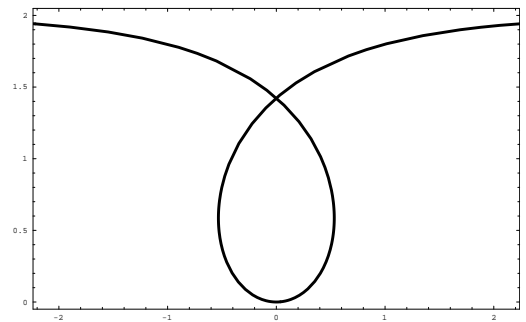


Рис. 24: Критическая эластика

Периодические движения маятника (2.33), (2.34) имеют период

$$T = \begin{cases} 4 \frac{K(k)}{\sqrt{r}}, & \lambda \in N_1, \\ 2 \frac{kK(k)}{\sqrt{r}}, & \lambda \in N_2, \\ \frac{2\pi}{|c|}, & \lambda \in N_6. \end{cases}$$

2.6.6 Симметрии и страты Максвелла

Фазовый портрет маятника (2.33) сохраняется группой симметрий Sym , порожденной отражением ε^1 в оси γ , отражением ε^2 в оси c , и отражением ε^3 в начале координат $(\gamma, c) = (0, 0)$:

$$\text{Sym} = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

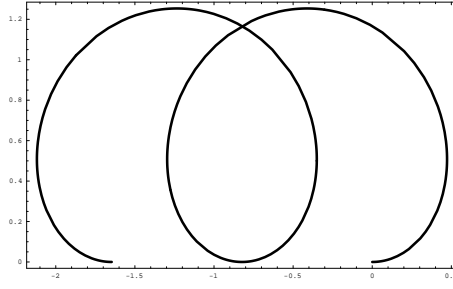


Рис. 25: Неинфлексионная эластика

Эти симметрии естественно продолжаются на прообраз $N = \mathfrak{g}^*$ и образ G экспоненциального отображения Exp_t . Если $\nu = (\gamma, c, r) \in N$, то

$$\varepsilon^i(\nu) = \nu^i = (\gamma^i, c^i, r) \in N,$$

где

$$(\gamma^1, c^1) = (\gamma_t, -c_t),$$

$$(\gamma^2, c^2) = (-\gamma_t, c_t),$$

$$(\gamma^3, c^3) = (-\gamma, -c).$$

Если $g = (x, y, \theta) \in G$, то $\varepsilon^i(g) = (x^i, y^i, \theta^i) \in G$, где

$$(x^1, y^1, \theta^1) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, -\theta),$$

$$(x^2, y^2, \theta^2) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, \theta),$$

$$(x^3, y^3, \theta^3) = (x, -y, -\theta).$$

Предложение 2.4. Группа $\text{Sym} = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ состоит из симметрий экспоненциального отображения.

Теорема 2.29. Первое время Максвелла, соответствующее группе симметрий Sym , для почти всех экстремальных траекторий $g_t = \text{Exp}_t(\lambda)$, $\lambda \in N$, выражается следующим образом:

$$\lambda \in N_1 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2}{\sqrt{r}} p_1(k),$$

$$p_1(k) = \min(2K(k), p_z^1(k)) = \begin{cases} 2K(k), & k \in (0, k_0], \\ p_z^1(k), & k \in (k_0, 1), \end{cases}$$

$$\lambda \in N_2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2}{\sqrt{r}} kK(k),$$

$$\lambda \in N_6 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = \frac{2\pi}{|c|},$$

$$\lambda \in N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_7 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = +\infty.$$

Здесь $p = p_z^1(k) \in (K, 3K)$ есть первый положительный корень уравнения $\text{sn} p \text{dn} p - (2E(p) - p) \text{cn} p = 0$, а $k_0 \approx 0,909$ есть корень уравнения $2E(k) - K(k) = 0$.

Имеет место замечание, аналогичное замечанию после теоремы 2.7, и теорема об инвариантных свойствах функции $t_{\text{MAX}}^1 : N \rightarrow (0, +\infty]$, аналогичная теореме 2.8.

2.6.7 Оценки сопряженного времени

Для эластик Эйлера вопрос локальной оптимальности очень важен с прикладной точки зрения, т.к. локальная оптимальность эластики означает ее устойчивость относительно малых возмущений профиля при закрепленных концах и касательных на концах. С теоретической точки зрения решение этого вопроса важно как шаг в направлении исследования глобальной оптимальности эластик.

Теорема 2.30. Пусть $\lambda = (k, \varphi, r) \in N_1$. Тогда первое сопряженное время $t_{\text{conj}}^1(\lambda)$ на траектории $\text{Exp}_t(\lambda)$ принадлежит отрезку с концами $\frac{4K(k)}{\sqrt{r}}$ и $\frac{2p_1(k)}{\sqrt{r}}$, а именно:

- (1) $k \in (0, k_0) \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in \left[\frac{4K(k)}{\sqrt{r}}, \frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}} \right]$,
- (2) $k = k_0 \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 = \frac{4K(k)}{\sqrt{r}} = \frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}}$,
- (3) $k \in (k_0, 1) \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in \left[\frac{2p_1^1(k)}{\sqrt{r}}, \frac{4K(k)}{\sqrt{r}} \right]$,

где функция $p_1(k)$ определена в теореме 2.29.

Следствие 2.2. Пусть $\lambda = (k, \varphi, r) \in N_1$. Тогда

- (1) $k \in (0, k_0) \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in [T, t_1^1] \subset [T, 3T/2)$, $t_1^1 = 2p_1^1/\sqrt{r} \in (T, 3T/2)$,
- (2) $k = k_0 \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 = T$,
- (3) $k \in (k_0, 1) \Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in [t_1^1, T] \subset (T/2, T]$, $t_1^1 = 2p_1^1/\sqrt{r} \in (T/2, T)$,

где $T = \frac{4K(k)}{\sqrt{r}}$ есть период колебаний маятников (2.33), (2.34).

Следствие 2.3. Пусть $\lambda = (k, \varphi, r) \in N_1$, $t_1 > 0$, и пусть

$$\Gamma = \{(x_t, y_t) \mid t \in [0, t_1]\}, \quad g(t) = (x_t, y_t, \theta_t) = \text{Exp}_t(\lambda), \quad (2.35)$$

есть дуга соответствующей элаستيки.

- (1) Если дуга Γ не содержит точек перегиба, то она локально оптимальна.
- (2) Если $k \in (0, k_0]$ и дуга Γ содержит ровно одну точку перегиба, то она локально оптимальна.
- (3) Если дуга Γ содержит не менее трех точек перегиба внутри себя, то она не является локально оптимальной.

Рассмотрим дуги инфлекссионных эластиков (2.35), центрированные в вершине, т.е. пусть в точке $(x_{t_1/2}, y_{t_1/2})$ достигается локальный экстремум кривизны элаستيки. Примеры таких дуг см. на Рис. 26, 27.

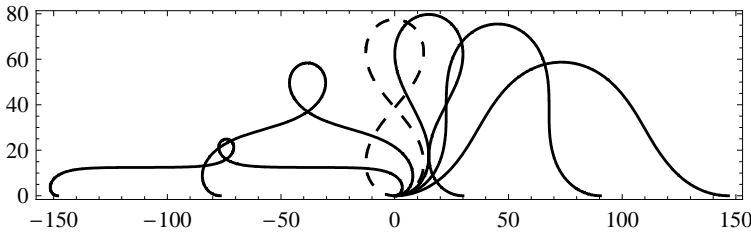


Рис. 26: Эластики, центрированные в вершине

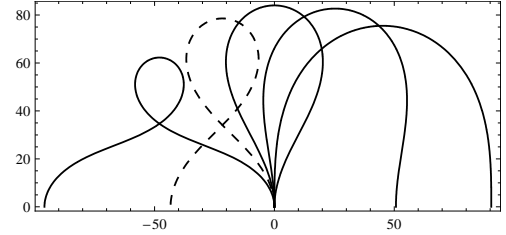


Рис. 27: Эластики, центрированные в вершине

Обозначим $t_1^1 = \frac{2}{\sqrt{r}}p_1(k)$, где функция $p_1(k)$ определена в теореме 2.29.

Теорема 2.31. Пусть инфлекссионная эластика Γ центрирована в вершине.

- (1) Если $t < t_1^1$, то эластика Γ устойчива.
- (2) Если $t = t_1^1$, то конец элаستيки Γ является первой сопряженной точкой.
- (3) Если $t > t_1^1$, то эластика Γ неустойчива.

Рассмотрим дуги инфлекссионных эластиков (2.35), центрированные в точке перегиба, т.е. пусть в точке $(x_{t_1/2}, y_{t_1/2})$ эластика имеет нулевую кривизну. Примеры таких дуг см. на Рис. 28.

Теорема 2.32. Пусть эластика Γ центрирована в точке перегиба. Пусть также $k \in (0, k_0]$.

- (1) Если $t < T$, то эластика Γ устойчива.
- (2) Если $t = T$, то конец элаستيки Γ является первой сопряженной точкой.
- (3) Если $t > T$, то эластика Γ неустойчива.

Теорема 2.33. Пусть $\lambda \in N_2 \cup N_3 \cup N_6$. Тогда экстремальная траектория $g(t) = \text{Exp}_t(\lambda)$ не содержит сопряженных точек при $t > 0$.

Итак, если дуга элаستيки не содержит точек перегиба, то она устойчива; если она содержит не менее трех точек перегиба внутри себя, то она неустойчива. Если есть одна или две точки перегиба, то эластика может быть устойчивой или неустойчивой.

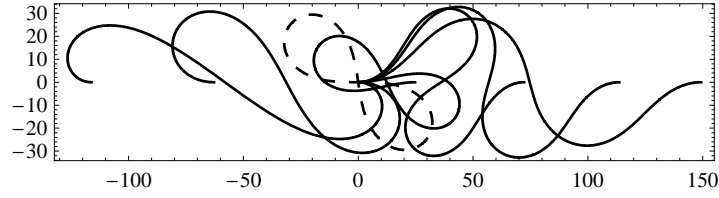


Рис. 28: Эластики, центрированные в точке перегиба

2.6.8 Диффеоморфная структура экспоненциального отображения

Пусть $t_1 = 1$, $\text{Exp} = \text{Exp}_1$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \{(x, y, \theta) \in G \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ или } (x, y, \theta) = (1, 0, 0)\}.$$

Случай общего $t_1 > 0$ сводится к частному случаю $t_1 = 0$ гомотетиями плоскости (x, y) :

$$(x, y, \theta, t, u, t_1, J) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{t}_1, \tilde{J}) = (e^s x, e^s y, \theta, e^s t, e^{-s} u, e^s t_1, e^{-s} J).$$

Рассмотрим подмножество в \mathcal{A} , не содержащее неподвижных точек отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\tilde{G} = \{g \in \mathcal{A} \mid \varepsilon^i(g) \neq g, i = 1, 2\} = \left\{g \in \mathcal{A} \mid \sin \frac{\theta}{2} P(g) \neq 0\right\},$$

$$P(g) = x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2},$$

и его разбиение на компоненты связности

$$\tilde{G} = G_+ \sqcup G_-,$$

$$G_{\pm} = \{g \in G \mid \theta \in (0, 2\pi), x^2 + y^2 < 1, \text{sgn } P(g) = \pm 1\}.$$

Также рассмотрим открытое плотное подмножество в пространстве всех потенциально оптимальных экстремальных траекторий:

$$\tilde{N} = \{\lambda \in \cup_{i=1}^3 N_i \mid t_1 < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t_1/2} \sin \gamma_{t_1/2} \neq 0\},$$

и его связные компоненты

$$\tilde{N} = \sqcup_{i=1}^4 D_i,$$

$$D_1 = \{\lambda \in \cup_{i=1}^3 N_i \mid t_1 < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t_1/2} > 0, \sin \gamma_{t_1/2} > 0\},$$

$$D_2 = \{\lambda \in \cup_{i=1}^3 N_i \mid t_1 < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t_1/2} < 0, \sin \gamma_{t_1/2} > 0\},$$

$$D_3 = \{\lambda \in \cup_{i=1}^3 N_i \mid t_1 < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t_1/2} < 0, \sin \gamma_{t_1/2} < 0\},$$

$$D_4 = \{\lambda \in \cup_{i=1}^3 N_i \mid t_1 < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t_1/2} > 0, \sin \gamma_{t_1/2} < 0\}.$$

Теорема 2.34. *Следующие отображения являются диффеоморфизмами:*

$$\text{Exp} : D_1 \rightarrow G_+, \quad \text{Exp} : D_2 \rightarrow G_-, \quad \text{Exp} : D_3 \rightarrow G_+, \quad \text{Exp} : D_4 \rightarrow G_-.$$

Следствие 2.4. *Отображение $\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{G}$ есть двулистное накрытие.*

2.6.9 Оптимальные эластики для различных граничных условий

Граничные условия общего положения Если $g_1 \in G_+$, то существует единственная пара $(\lambda_1, \lambda_3) \in D_1 \times D_3$, для которой $\text{Exp}(\lambda_1) = \text{Exp}(\lambda_3) = g_1$. Оптимальная траектория находится среди траекторий $q^1(t) = \text{Exp}_t(\lambda_1)$ и $q^3(t) = \text{Exp}_t(\lambda_3)$, $t \in [0, 1]$. Для отыскания оптимальной траектории необходимо взять ту из них, для которой функционал качества $J[q^i(\cdot)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (c_t^i)^2 dt$ принимает меньшее значение. Если $J[q^1(\cdot)] = J[q^3(\cdot)]$, то оптимальны обе траектории, этот случай изображен на Рис. 29.

Если $g_1 \in G_-$, то оптимальные траектории выбираются аналогично среди соответствующих ковекторов $\lambda_2 \in D_2$ и $\lambda_4 \in D_4$, для которых $\text{Exp}(\lambda_2) = \text{Exp}(\lambda_4) = g_1$.

Случай $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 0, 0)$ Оптимальная эластика есть отрезок $(x, y) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$.

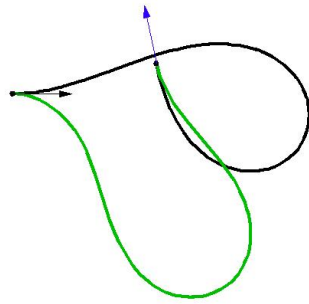


Рис. 29: Две оптимальные несимметричные эластики с одинаковыми граничными условиями

Случай $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$ В этом случае $g_1 \in G_+$ и уравнение $\text{Exp}(\lambda) = g_1, \lambda \in \tilde{G}$, имеет два корня $\lambda_1 \in D_1$ и $\lambda_3 \in D_3$. Траектории $q^1(t) = \text{Exp}_t(\lambda_1)$ и $q^3(t) = \text{Exp}_t(\lambda_3)$ имеют одинаковое значение функционала J , поэтому оптимальны. Соответствующие оптимальные инфлекссионные эластики симметричны относительно оси x , см. Рис. 30.

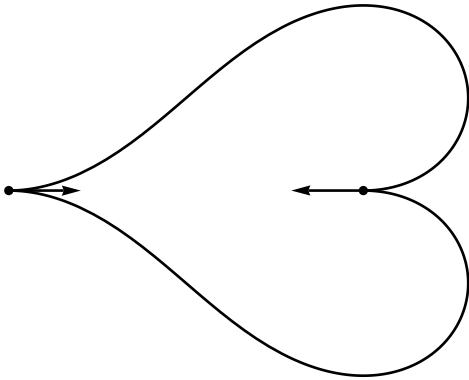


Рис. 30: Оптимальные эластики для $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$

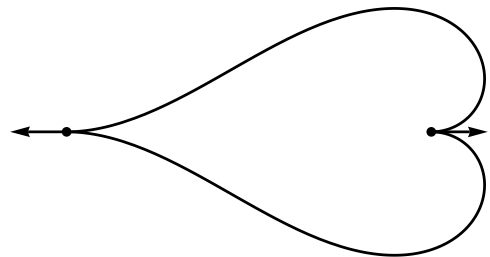


Рис. 31: Оптимальные эластики для $x_1 < 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$

Случай $x_1 < 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$ Этот случай аналогичен предыдущему случаю, см. Рис. 31.

Случай $x_1 = 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$ Единственная оптимальная эластика - «капля» определяется параметрами $\lambda = (\varphi, k, r) \in N_1, \varphi = \frac{\tau}{2p} - \frac{1}{2}, r = 4p^2, \text{sn } \tau = 0, 1 - 2k^2 \text{sn}^2 p - 0, 2E(p) - p = 0$, см. Рис. 32.

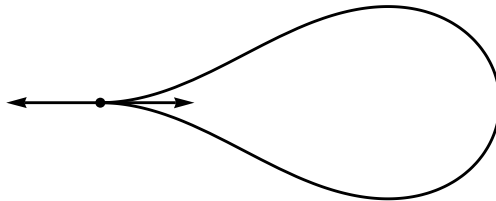


Рис. 32: Оптимальная эластика - «капля» для $x_1 = 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$

Случай $x_1 = 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0$ Существуют две оптимальные эластики — окружности, симметричные относительно оси x .

Случай $x_1 > 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ Имеются две или четыре оптимальных эластики; существует такое $x_* \in (0, 4, 0, 5)$, что:

- если $x_1 \in (0, x_*)$, то имеются две оптимальные неинфлекссионные эластики, см. Рис. 33,
- если $x_1 \in (x_*, 1)$, то имеются две оптимальные инфлекссионные эластики, см. Рис. 34,
- если $x_1 = x_*$, то существуют четыре оптимальные эластики (две инфлекссионные и две неинфлекссионные), см. Рис. 35,

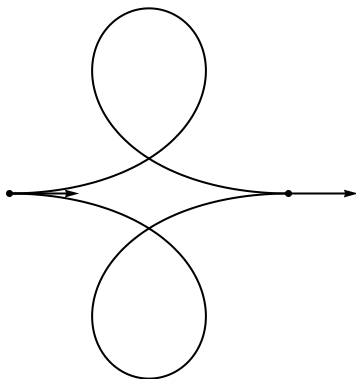


Рис. 33: Оптимальные эластики для $x_1 > 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $x_1 \in (0, x_*)$

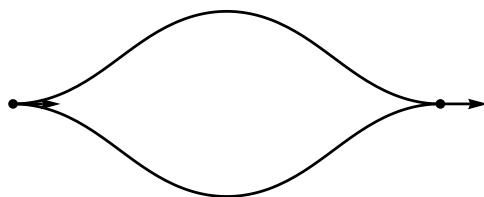


Рис. 34: Оптимальные эластики для $x_1 > 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $x_1 \in (x_*, 1)$

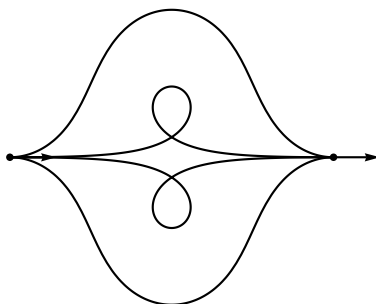


Рис. 35: Оптимальные эластики для $x_1 > 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $x_1 = x_*$

Случай $x_1 < 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ Существуют две оптимальные неинфлекссионные эластики, см. Рис. 36.

2.6.10 Библиографические комментарии

Раздел 2.6.1 по истории задачи об эластике опирается на классические источники [58, 78, 79]. Имеется также замечательное описание [68] этой истории.

Заметим, что задача об эластике долгое время представляла лишь теоретический интерес и служила одним из примеров приложения теории эллиптических функций (см., например, [58, 80]). В связи с широким внедрением стали в практику проектирования и появлением гибких тонкостенных конструкций, стимулировавшим развитие теории устойчивости деформируемых систем, решение задачи об эластике стало приобретать практическое значение. Возникли, в частности, важные для инженерных приложений вопросы: каково поведение сжатой стойки при нагрузках, превышающих эйлерово критическое значение, какова при этом форма стойки, единственна ли эта форма и устойчива ли она? Решению этих вопросов посвящены многочисленные исследования [81–88], где рассматривались различные условия опирания и нагружения гибких нерастяжимых стержней. В последние десятилетия интерес к эластике возрос в связи с применением теории гибких стержней к анализу микро- и наноструктур в биологии и нанотехнологиях [89–92]. Подтверждено существование множественных форм равновесия при фиксированной нагрузке.

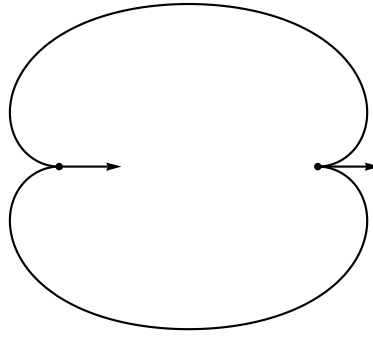


Рис. 36: Оптимальные эластики для $x_1 < 0$, $y_1 = 0$, $\theta_1 = 0$

Разделы 2.6.2–2.6.6 опираются на работу [74], разделы 2.6.7 — на работы [75] и [61], разделы 2.6.8 и 2.6.9 — на работы [77] и [76].

2.7 Левоинвариантная субриманова задача общего вида на группе $SO(3)$

2.7.1 Постановка задачи

Из классификации контактных левоинвариантных субримановых структур на трехмерных группах Ли [43] следует, что для произвольной такой структуры на группе $G = SO(3)$ можно выбрать ортонормированный репер (X_1, X_2) с таблицей умножения

$$[X_2, X_1] = X_3, \quad [X_1, X_3] = (\kappa + \chi)X_2, \quad [X_2, X_3] = (\chi - \kappa)X_1, \quad (2.36)$$

где $\kappa \geq \chi \geq 0$ суть дифференциальные инварианты субримановой структуры. Равномерное растяжение полей (X_1, X_2) пропорционально изменяет функцию расстояния и оба инварианта κ и χ . В работе [43] использована нормализация $\kappa^2 + \chi^2 = 1$. В этом разделе удобнее принять $\kappa + \chi = 1$ и использовать инвариант $a = \sqrt{2\chi} \in [0, 1)$. Случай $a = 0$ соответствует осесимметричной субримановой структуре, рассмотренной в работе [44].

Следующие векторные поля удовлетворяют таблице умножения (2.36):

$$X_1(g) = L_{g*}A_2, \quad X_2(g) = \sqrt{1-a^2}L_{g*}A_1, \quad X_3(g) = \sqrt{1-a^2}L_{g*}A_3,$$

где базис A_1, A_2, A_3 алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

2.7.2 Параметризация геодезических

Аномальные экстремальные траектории постоянны.

Для параметризации нормальных геодезических введем гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Естественно параметризованные экстремали параметризуются точками цилиндра $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$. Введем на этом цилиндре координаты (ψ, c) :

$$h_1 = \cos \psi, \quad h_2 = -\sin \psi, \quad h_3 = c.$$

Нормальная гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\dot{h}_1 = h_2 h_3, \quad \dot{h}_2 = -h_1 h_3, \quad \dot{h}_3 = a^2 h_1 h_2, \quad (2.38)$$

$$\dot{g} = h_1 X_1(g) + h_2 X_2(g). \quad (2.39)$$

Вертикальная подсистема (2.38) задает на цилиндре C уравнение маятника

$$\dot{\psi} = c, \quad \dot{c} = -\frac{a^2}{2} \sin 2\psi. \quad (2.40)$$

Этот цилиндр имеет стратификацию

$$C = \sqcup_{i=1}^5 C_i$$

на инвариантные множества системы (2.40), которые определяются значением полной энергии маятника $E = 2c^2 - a^2 \cos 2\psi$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\lambda \in C : E \in (-a^2, a^2)\}, & (\text{область внутри сепаратрис}), \\ C_2 &= \{\lambda \in C : E \in (a^2, +\infty)\}, & (\text{область вне сепаратрис}), \\ C_3 &= \{\lambda \in C : E = a^2, c \neq 0\}, & (\text{сепаратрисы}), \\ C_4 &= \{\lambda \in C : E = -a^2\}, & (\text{устойчивое положение равновесия}), \\ C_5 &= \{\lambda \in C : E = a^2, c = 0\}, & (\text{неустойчивое положение равновесия}). \end{aligned}$$

Введем на множествах C_1, C_2, C_3 координаты (θ, k) , выпрямляющие уравнение маятника (2.40). В области C_1 :

$$\begin{aligned} \sin \psi &= s_1 k \operatorname{sn}(a\theta, k), & s_1 &= \operatorname{sgn}(\cos \psi), \\ \cos \psi &= s_1 \operatorname{dn}(a\theta, k), & k &= \sqrt{\frac{E + a^2}{2a^2}} \in (0, 1), \\ c &= ak \operatorname{cn}(a\theta, k), & \theta &\in [0, 4K(k)/a]. \end{aligned}$$

В области C_2 :

$$\begin{aligned} \sin \psi &= s_2 \operatorname{sn}\left(\frac{a\theta}{k}, k\right), & s_2 &= \operatorname{sgn}(c), \\ \cos \psi &= \operatorname{cn}\left(\frac{a\theta}{k}, k\right), & k &= \sqrt{\frac{2a^2}{E + a^2}} \in (0, 1), \\ c &= \frac{s_2 a}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{a\theta}{k}, k\right), & \theta &\in [0, 4kK(k)/a]. \end{aligned}$$

На множестве C_3 :

$$\begin{aligned} \sin \psi &= s_1 s_2 \operatorname{th} a\theta, \\ \cos \psi &= \frac{s_1}{\operatorname{ch} a\theta}, \\ c &= \frac{s_2 a}{\operatorname{ch} a\theta}, \\ \theta &\in (-\infty, +\infty), \quad k = 1. \end{aligned}$$

Тогда при $(\psi_0, c_0) \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$ решение уравнения маятника есть $\theta(t) = t + \theta_0$, $k \equiv \operatorname{const}$. При $(\psi_0, c_0) \in C_4$ имеем $\psi \equiv \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $c = 0$, а при $(\psi_0, c_0) \in C_5$ имеем $\psi \equiv -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $c = 0$.

Для параметризации решений горизонтальной подсистемы (2.39) представим их с помощью углов Эйлера

$$g_t = \exp(-\varphi_1(0)A_3) \exp(-\varphi_2(0)A_1) \exp(\varphi_3(t)A_3) \exp(\varphi_2(t)A_1) \exp(\varphi_1(t)A_3).$$

Тогда

$$\cos \varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{M}}, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{\frac{M - c^2}{M}}, \quad (2.41)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{h_1 \sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{M - c^2}}, \quad \sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{h_2}{M - c^2}}, \quad (2.42)$$

где $M = h_2^2 + (1 - a^2)h_1^2 + c^2$ есть первый интеграл подсистемы (2.38).

Угол φ_3 удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\sqrt{M(1 - a^2)}}{M - c^2} = \frac{\sqrt{M(1 - a^2)}}{1 - a^2 h_1^2} \quad (2.43)$$

и является монотонной функцией времени т.к. $0 < \sqrt{M(1 - a^2)} \leq \dot{\varphi}_3 \leq \sqrt{M/(1 - a^2)}$. Решения этого уравнения имеют вид:

1. в C_1 :

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{1-a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}} \left(\Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1}; \operatorname{am}(a\theta, k), k\right) - \Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1}; \operatorname{am}(a\theta_0, k), k\right) \right);$$

2. в C_2 :

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{k^2+a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}} \left(\Pi\left(\frac{a^2}{a^2-1}; \operatorname{am}\left(\frac{a\theta}{k}, k\right), k\right) - \Pi\left(\frac{a^2}{a^2-1}; \operatorname{am}\left(\frac{a\theta_0}{k}, k\right), k\right) \right);$$

3. в C_3 :

$$\varphi_3 = \sqrt{1-a^2}t + \left(\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{th} a\theta\right) - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{th} a\theta_0\right) \right);$$

4. в C_4 :

$$\varphi_3 = t;$$

5. в C_5 :

$$\varphi_3 = \sqrt{1-a^2}t.$$

Здесь $\operatorname{am}(\varphi, k)$ – амплитуда Якоби, а $\Pi(n; \varphi, k)$ – эллиптический интеграл третьего рода. Заметим, что из последних двух выражений видно, что геодезические, которые соответствуют областям C_4 и C_5 , являются вращениями вокруг горизонтальных базисных векторов $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

2.7.3 Периодические геодезические

Предложение 2.5. Для любого $a \in (0, 1)$ в соответствующей субримановой задаче на группе $\mathrm{SO}(3)$ существует бесконечное количество геодезических.

В случае $\lambda \in C_1$ ($\lambda \in C_2$) периодическая геодезическая может иметь только период $T = \frac{4K(k)}{a}$ ($T = \frac{4kK(k)}{a}$), и такие траектории существуют тогда и только тогда, когда для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\varphi_3(mT) = 2\pi n$. Это равенство выполняется вдоль некоторой геодезической тогда и только тогда, когда

$$\frac{n}{m} > \frac{1}{a} \quad (2.44)$$

в случае C_1 и

$$\frac{n}{m} > 1 \quad (2.45)$$

в случае C_2 . Различными несократимым дробям $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+$ соответствуют различные периодические геодезические.

Предложение 2.6. Любая периодическая геодезическая для $\lambda \in C_1$ ($\lambda \in C_2$) однозначно определяется несократимой дробью $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющей условию (2.44) (соотв. (2.45)).

При $\lambda \in C_3$ геодезические неперiodичны.

При $\lambda \in C_4 \cup C_5$ геодезические периодичны.

Так как $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$, то существуют только два гомотопических класса замкнутых путей на $\mathrm{SO}(3)$. Следующее утверждение показывает, какие из периодических геодезических стягиваемы (нуль-гомотопны).

Предложение 2.7. Рассмотрим периодическую геодезическую $g_t \in \mathrm{SO}(3)$, которая является проекцией экстремали $\lambda_t \in C_1$ ($\lambda_t \in C_2$) и которая задана своей несократимой дробью $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющей (2.44) (соотв. (2.45)). В этом случае геодезическая g_t стягиваема тогда и только тогда, когда n четно.

Все геодезические, соответствующие $\lambda \in C_4 \cup C_5$, нестягиваемы.

2.7.4 Условия оптимальности

Рассмотрим трехмерную единичную сферу в алгебре кватернионов

$$S^3 = \{q = q^0 + iq^1 + jq^2 + kq^3 \in \mathbb{H} \mid (q^0)^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 = 1\}.$$

Сфера S^3 односвязна и образует двулистное накрытие группы $\mathrm{SO}(3)$. Геодезическая $g_t \in \mathrm{SO}(3)$ имеет лифт $q_t \in S^3$, $q_0 = 1$, вида

$$q_t = \exp\left(-\frac{\varphi_1(t)}{2}k\right) \exp\left(-\frac{\varphi_2(t)}{2}i\right) \exp\left(\frac{\varphi_3(t)}{2}k\right) \exp\left(\frac{\varphi_2(t)}{2}i\right) \exp\left(\frac{\varphi_1(t)}{2}k\right),$$

где углы Эйлера $\varphi_i(t)$ совпадают с аналогичными углами в (2.41)–(2.43).

Теорема 2.35. Пусть $g_t \in \text{SO}(3)$, $t \in [0, t_1]$, есть геодезическая, а $q_t \in S^3$, $q_0 = 1$, есть ее лифт на S^3 . Пусть θ_t есть соответствующая выпрямленная координата маятника (2.40), и $\tau = a(\theta_0 + \frac{t}{2})$.

Тогда кривая g_t неоптимальна, если для некоторого $t \in (0, t_1)$ выполняется одно из следующих условий:

- (1) $q_t^0 = 0$,
- (2) $q_t^1 = 0$ и $\text{sn } \tau \neq 0$, если $\lambda_0 \in C_1 \cup C_2$, или $\tau \neq 0$, если $\lambda_0 \in C_3$,
- (3) $q_t^2 = 0$ и $\text{sn } \tau \neq 0$, если $\lambda_0 \in C_1$,
- (3) $q_t^3 = 0$ и $\text{sn } \tau \neq 0$, если $\lambda_0 \in C_2$.

2.7.5 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [45].

2.8 Задача о качении шара по плоскости без прокручивания и проскальзывания

2.8.1 История задачи

В 1983 году Дж. Хаммерсли [97] рассмотрел следующую *оксфордскую задачу о шаре*. Шар единичного радиуса лежит на бесконечной горизонтальной плоскости. Состояние шара определяется его пространственной ориентацией и положением на плоскости. Требуется перевести шар из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с помощью последовательности качений. Каждое качение выполняется вдоль некоторой прямой на плоскости: длина и направление качений выбираются нами, но качение должно выполняться *без прокручиваний и проскальзываний*, то есть ось вращения должна быть горизонтальной и скорость шара в точке касания с плоскостью должна быть нулевой. Какое наименьшее число качений N необходимо для достижения любого конечного состояния? С использованием кватернионов Хаммерсли показал, что $N \in \{3, 4\}$. Далее, он поставил две континуальные версии задачи о шаре:

- (a) найти кривую Γ на плоскости минимальной длины T , переводящую шар в заданное конечное состояние;
- (b) перевести шар просто в некоторую заданную ориентацию, не заботясь о ее положении на плоскости.

Для задачи (b) Хаммерсли указывает, что оптимальная кривая Γ есть отрезок или дуга окружности, и $0 \leq T \leq \pi\sqrt{3}$, где верхняя граница достигается, только если требуемая переориентация сферы есть ее поворот на π вокруг вертикальной оси.

В заключительном разделе статьи [97] «Варианты для двадцать первого века» Хаммерсли ставит ряд вариаций и обобщений указанных задач о шаре, остающихся открытыми до сих пор.

В 1986 году А. Артурс и Дж. Уолш [95] исследовали задачу (a). С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина они доказали, что точка контакта шара и плоскости (x, y) удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin \psi, & \dot{y} &= -\cos \psi, \\ \ddot{\psi} &= \lambda \cos(\psi + \varepsilon), & \lambda, \varepsilon &\equiv \text{const}. \end{aligned}$$

Артурс и Уолш указали, что эти дифференциальные уравнения интегрируются в эллиптических интегралах первого и третьего рода, и оставили задачу оптимального управления для численного исследования.

Независимо от этих работ, в 1993 году Р. Брокетт и Л. Даи [112] поставили «задачу о пластинах и шаре» (The Plate-Ball Problem). Они рассмотрели шар, катящийся без прокручивания и проскальзывания между двумя плоскими горизонтальными пластинами, расстояние между которыми равно диаметру шара. Брокетт и Даи записали управляемую систему для шара в форме (2.46)–(2.50) и показали, что нильпотентная аппроксимация этой системы эквивалентна управляемой системе (2.117) на группе Картана (см. раздел 2.10).

В том же 1993 году В. Джурджевич [98] подробно исследовал *задачу об оптимальном качении шара по плоскости без прокручиваний и проскальзываний*, опираясь на постановку Брокетта и Даи [112], и независимо от работ [95, 97]. Джурджевич рассмотрел эту задачу как левоинвариантную задачу оптимального

управления на группе Ли $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$:

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad (2.46)$$

$$\dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$g = (x, y, R) \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.48)$$

$$g(0) = \text{Id} = (0, 0, E_{11} + E_{22} + E_{33}), \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.49)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \quad (2.50)$$

Далее, он применил к этой задаче принцип максимума Понтрягина в инвариантной формулировке для групп Ли (см. [2, 25], и получил следующие результаты. Оптимальные аномальные управления постоянны и порождают качение шара по прямой; эти управления нестрого аномальны. Нормальные экстремали суть траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1 - H_2)^2 + \frac{1}{2}(h_2 + H_1)^2$, где гамильтонианы h_1 и h_2 соответствуют векторным полям $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, а гамильтонианы H_1, H_2, H_3 соответствуют левоинвариантным полям на $\text{SO}(3)$, задающим вращение трехмерного пространства с генераторами

$$A_1 = E_{32} - E_{23}, \quad A_2 = E_{13} - E_{31}, \quad A_3 = E_{21} - E_{12}.$$

Вертикальная подсистема этой гамильтоновой системы есть

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \dot{h}_2 = 0, \\ \dot{H}_1 &= (h_1 - H_2)H_3, \quad \dot{H}_2 = (h_2 + H_1)H_3, \\ \dot{H}_3 &= -h_1H_1 - h_2H_2. \end{aligned}$$

Эта подсистема имеет интегралы h_1, h_2, H и $M = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$, поэтому интегрируема. Более того, эта подсистема сведена к уравнению маятника. Для интегрирования уравнения для ориентации шара $R(t) \in \text{SO}(3)$ вводятся углы Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, для этих углов получены дифференциальные уравнения, которые качественно исследованы и частично проинтегрированы. Показано, что траектория точки контакта шара и плоскости $(x(t), y(t))$ есть эйлерова эластичка, см. раздел 2.6. Получена связь между типом пересечения цилиндра $\{H = \text{const}\}$ и сферы $\{M = \text{const}\}$, типом эластик и качественным поведением углов Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Дальнейшее изложение в этом разделе опирается на [93, 94].

2.8.2 Постановка задачи

Механическая постановка Рассматривается механическая система, состоящая из двух горизонтальных плоскостей и сферы, касающейся этих плоскостей. Нижняя плоскость неподвижна, а сфера катится без прокручивания и проскальзывания благодаря горизонтальному движению верхней плоскости. Состояние такой системы описывается точкой контакта сферы с нижней плоскостью и ориентацией сферы в трехмерном пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное терминальное состояние так, чтобы кривая, пробегаемая точкой контакта на плоскости, имела минимальную длину. Управлением является скорость верхней плоскости, или, что эквивалентно, скорость центра сферы.

Рассматривается кинематика данной системы, поэтому наличие верхней плоскости можно игнорировать и изучать качение сферы по (нижней) плоскости без прокручивания и проскальзывания. Отсутствие проскальзывания означает, что мгновенная скорость точки контакта сферы и плоскости равна нулю, а отсутствие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы горизонтален. Качение одной поверхности по другой без прокручивания и проскальзывания моделирует работу руки роботоманипулятора, и задачи о таком движении вызывают большой интерес в механике, робототехнике и теории управления (см., например, работы [2, 96, 158, 188, 190]).

Математическая постановка Пусть e_1, e_2, e_3 — неподвижный правый репер в пространстве \mathbb{R}^3 , такой, что векторы e_1, e_2 лежат в плоскости $\mathbb{R}^2 \cong (\mathbb{R}^2, 0) \subset \mathbb{R}^3$, по которой катится сфера S^2 единичного радиуса, а вектор e_3 направлен в полупространство, содержащее эту сферу. Репер e_1, e_2, e_3 закреплен в точке $O \in (\mathbb{R}^2, 0)$. Пусть f_1, f_2, f_3 — подвижный правый репер, закрепленный в катящейся сфере S^2 . Обозначим координаты точки в \mathbb{R}^3 в базисе e_1, e_2, e_3 как (x, y, z) , а координаты этой точки в базисе f_1, f_2, f_3 , перенесенном в точку O , как (X, Y, Z) . Таким образом,

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = Xf_1 + Yf_2 + Zf_3.$$

Пусть матрица $R \in \text{SO}(3)$ переводит координаты точки в неподвижном репере e_1, e_2, e_3 в ее координаты в подвижном репере f_1, f_2, f_3 , т.е.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Состояние системы «сфера S^2 и плоскость \mathbb{R}^2 » задается координатами (x, y) точки контакта S^2 и \mathbb{R}^2 , и матрицей вращения R . В качестве управлений будем использовать вектор (u_1, u_2) скорости центра сферы. Задача об оптимальном качении сферы по плоскости формализуется как следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = u_1, \quad (2.51)$$

$$\dot{y} = u_2, \quad (2.52)$$

$$\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2), \quad (2.53)$$

$$Q = (x, y, R) \in G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (2.54)$$

$$u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.55)$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}), \quad Q(t_1) = Q_1, \quad (2.56)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (2.57)$$

Здесь и далее мы используем базисные матрицы в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Левинвариантная субриманова задача Задача (2.51)–(2.57) есть левинвариантная субриманова задача на группе Ли $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$. Введем следующий левинвариантный репер на этой группе Ли:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_i(R) = RA_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В терминах левинвариантных полей

$$X_1 = e_1 - V_2, \quad X_2 = e_2 + V_1,$$

управляемая система (2.51)–(2.55) принимает вид

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q), \quad Q \in G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.59)$$

Функционал (2.57) есть функционал субримановой длины для левинвариантной субримановой структуры, заданной полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min, \quad (2.60)$$

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Существование оптимальных управлений Матричные коммутаторы $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$ вычисляются следующим образом:

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2.$$

Таблица умножения в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{so}(3) = \text{span}(e_1, e_2, V_1, V_2, V_3)$ группы Ли G имеет вид:

$$\text{ad } e_i = 0, \quad [V_1, V_2] = V_3, \quad [V_2, V_3] = V_1, \quad [V_3, V_1] = V_2.$$

В силу равенств

$$[X_1, X_2] = V_3, \quad [X_1, V_3] = -V_1, \quad [X_2, V_3] = -V_2,$$

векторные поля X_1, X_2 в правой части системы (2.59) порождают алгебру Ли \mathfrak{g} . По теореме Рашевского-Чжоу, система (2.59) вполне управляема. Из теоремы Филиппова следует существование оптимальных управлений в задаче (2.51)–(2.57) для любых $Q_0, Q_1 \in G$ в классе существенно ограниченных измеримых управлений.

2.8.3 Экстремали

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы:

$$\begin{aligned} h_i(\lambda) &= \langle \lambda, e_i \rangle, \quad i = 1, 2, \\ H_i(\lambda) &= \langle \lambda, V_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Аномальные траектории Аномальные траектории постоянной скорости имеют вид

$$\begin{aligned} x_t &= u_1 t, \quad y_t = u_2 t, \\ R_t &= \exp(t(u_2 A_1 - u_1 A_2)). \end{aligned}$$

Они нестрого аномальны и оптимальны. В аномальном случае сфера равномерно катится по прямой.

Нормальная гамильтонова система В нормальном случае гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}((h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2)$$

записывается в координатах так

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0, \tag{2.61}$$

$$\dot{H}_1 = (h_1 - H_2)H_3, \tag{2.62}$$

$$\dot{H}_2 = (h_2 + H_1)H_3, \tag{2.63}$$

$$\dot{H}_3 = -h_1 H_1 - h_2 H_2, \tag{2.64}$$

$$\dot{Q} = (h_1 - H_2)X_1 + (h_2 + H_1)X_2. \tag{2.65}$$

Как всегда в субримановых задачах, можно ограничиться геодезическими единичной скорости, т.е. экстремальными траекториями, вдоль которых $H \equiv \frac{1}{2}$. При таком ограничении удобно перейти в сопряженном пространстве от координат $(h_1, h_2, H_1, H_2, H_3)$ к новым координатам (r, α, θ, c) :

$$h_1 = r \cos \alpha, \quad h_2 = r \sin \alpha, \tag{2.66}$$

$$h_1 - H_2 = \cos(\theta + \alpha), \quad h_2 + H_1 = \sin(\theta + \alpha), \tag{2.67}$$

$$c = H_3.$$

После этого гамильтонова система для нормальных экстремалей (2.61)–(2.65) принимает следующую форму:

$$\dot{\theta} = c, \tag{2.68}$$

$$\dot{c} = -r \sin \theta, \tag{2.69}$$

$$\dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \tag{2.70}$$

$$\dot{x} = \cos(\theta + \alpha), \tag{2.71}$$

$$\dot{y} = \sin(\theta + \alpha), \tag{2.72}$$

$$\dot{R} = R\Omega, \quad \Omega = \sin(\theta + \alpha)A_1 - \cos(\theta + \alpha)A_2. \tag{2.73}$$

Семейство нормальных экстремалей λ_t параметризуется цилиндром C , состоящим из начальных точек $\lambda = \lambda_t|_{t=0}$:

$$\begin{aligned} C &= \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid H(\lambda) = 1/2\} \\ &\cong \{(h_1, h_2, H_1, H_2, H_3) \in \mathbb{R}^5 \mid (h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2 = 1\} \\ &\cong \{(\theta, c, \alpha, r) \mid \theta \in S^1, c \in \mathbb{R}, \alpha \in S^1, r \geq 0\}. \end{aligned}$$

Экспоненциальное отображение определяется как

$$\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\bar{H}}(\lambda) = Q_t,$$

$$\text{Exp} : N \rightarrow M,$$

$$N = C \times \mathbb{R}_+ = \{(\lambda, t) \mid \lambda \in C, t > 0\}.$$

В случае $r = 0$ эластика (x_t, y_t) есть прямая (при $H_3 = c = 0$) или окружность (при $H_3 = c \neq 0$), будем называть такие эластики *вырожденными*.

В случае $r \neq 0$ эластика (x_t, y_t) принадлежит одному из четырех классов в зависимости от полной энергии $E = c^2/2 - r \cos \theta$ маятника (2.68), (2.69), см. раздел 2.6:

1. инфлекссионный при $E \in (-r, r)$,
2. неинфлекссионный при $E \in (r, +\infty)$,
3. критический при $E = r, c \neq 0$,
4. прямая при $E = -r$ и при $E = r, c = 0$.

Эластики классов 1–3 будем называть *невыврожденными*.

Симплектическое слоение На коалгебре Ли \mathfrak{g}^* имеются функции Казимира $h_1, h_2, M = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$. Симплектическое слоение состоит из:

- сфер $\{h_1, h_2 = \text{const}, M = \text{const} > 0\}$,
- точек $\{h_1, h_2 = \text{const}, H_1 = H_2 = H_3 = 0\}$.

Нормальная гамильтонова система имеет интегралы $h_1, h_2, M, E = \frac{1}{2}(M + h_1^2 + h_2^2) - H$ и интегрируема в эллиптических функциях и интегралах.

Различные типы геодезических, проецирующихся в эйлеровы эластики (x_t, y_t) , соответствуют разным типам пересечения поверхности уровня гамильтониана $\{H = \text{const}\}$ с симплектическими листами.

Выпрямляющие координаты Цилиндр $C = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid H(\lambda) = \frac{1}{2}\}$ стратифицируется согласно разным типам движения маятника (2.68), (2.69):

$$\begin{aligned}
C &= \sqcup_{i=1}^7 C_i, \\
C_1 &= \{\lambda \in C \mid E \in (-r, r), r > 0\}, \\
C_2 &= \{\lambda \in C \mid E \in (r, +\infty), r > 0\}, \\
C_3 &= \{\lambda \in C \mid E = r > 0, c \neq 0\}, \\
C_4 &= \{\lambda \in C \mid E = -r, r > 0\}, \\
C_5 &= \{\lambda \in C \mid E = r > 0, c = 0\}, \\
C_6 &= \{\lambda \in C \mid r = 0, c \neq 0\}, \\
C_7 &= \{\lambda \in C \mid r = 0, c = 0\}.
\end{aligned}$$

В области $\cup_{i=1}^3 C_i$ введем координаты (φ, k, α, r) , выпрямляющие уравнения маятника (2.68), (2.69). Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_1$, то

$$\sin(\theta/2) = k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi, k), \quad \cos(\theta/2) = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi, k), \quad c/2 = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi, k),$$

при этом $k = \sqrt{(E+r)/(2r)} \in (0, 1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{4K} \in [0, 4K]$.

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, r) \in C_2$, то

$$\sin(\theta/2) = \pm \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi/k, k), \quad \cos(\theta/2) = \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi/k, k), \quad c/2 = \pm\sqrt{r}/k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi/k, k),$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = \sqrt{2r/(E+r)} \in (0, 1)$, $\sqrt{r}\varphi \pmod{2kK} \in [0, 2kK]$.

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin(\theta/2) = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi), \quad \cos(\theta/2) = 1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi), \quad c/2 = \pm\sqrt{r}/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi),$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$, при этом $k = 1, \varphi \in (-\infty, +\infty)$.

В новых координатах уравнения маятника (2.68), (2.69) принимают форму:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{r} = 0,$$

откуда $\varphi_t = \varphi + t; k, \alpha, r = \text{const}$.

Интегрирование вертикальной подсистемы гамильтоновой системы ПМП Если $\lambda \in C_1$, то

$$\sin(\theta_t/2) = k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \quad \cos(\theta_t/2) = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t, k), \quad c_t/2 = k\sqrt{r} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t, k).$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\sin(\theta_t/2) = \pm \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t/k, k), \quad \cos(\theta_t/2) = \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t/k, k), \quad c_t/2 = \pm\sqrt{r}/k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t/k, k),$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$.

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\sin(\theta_t/2) = \pm \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t), \quad \cos(\theta_t/2) = 1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t), \quad c_t/2 = \pm\sqrt{r}/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t),$$

где $\pm = \operatorname{sgn} c$.

Для случаев $\lambda \in \cup_{i=4}^7 C_i$ система (2.68)–(2.70) интегрируется непосредственно: $\theta_t \equiv 0$, $c_t \equiv 0$ при $\lambda \in C_4$; $\theta_t \equiv \pi$, $c_t \equiv 0$ при $\lambda \in C_5$; $\theta_t = ct + \theta$, $c_t \equiv c \neq 0$ при $\lambda \in C_6$; $\theta_t \equiv \theta$, $c_t \equiv 0$ при $\lambda \in C_7$.

Интегрирование уравнений для x , y Для интегрирования уравнений (2.71), (2.72) с начальным условием $x_0 = y_0 = 0$ воспользуемся симметрией задачи — поворотом

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha, \quad y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha.$$

В новых переменных получаем задачу Коши

$$\dot{\bar{x}}_t = \cos \theta_t, \quad \dot{\bar{y}}_t = \sin \theta_t, \quad \bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0, \quad (2.74)$$

решения которой параметризуются следующим образом.

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= (2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{rt})/\sqrt{r}, \\ \bar{y}_t &= 2k(\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t))/\sqrt{r}. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= 2(\operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi_t/k) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\varphi/k) - (2 - k^2)\sqrt{rt}/(2k))/(k\sqrt{r}), \\ \bar{y}_t &= \pm 2(\operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi/k) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t/k))/(k\sqrt{r}), \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= (2(\operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi_t) - \operatorname{th}(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{rt})/\sqrt{r}, \\ \bar{y}_t &= \pm 2(1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi) - 1/\operatorname{ch}(\sqrt{r}\varphi_t))/\sqrt{r}, \quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

При $\lambda \in \cup_{i=4}^7 C_i$ уравнения (2.74) интегрируются непосредственно: $\bar{x}_t = t$, $\bar{y}_t = 0$ при $\lambda \in C_4$; $\bar{x}_t = -t$, $\bar{y}_t = 0$ при $\lambda \in C_5$; $\bar{x}_t = (\sin(ct + \theta) - \sin \theta)/c$, $\bar{y}_t = (\cos \theta - \cos(ct + \theta))/c$ при $\lambda \in C_6$; $\bar{x}_t = t \cos \theta$, $\bar{y}_t = t \sin \theta$ при $\lambda \in C_7$.

Интегрирование уравнений для R Пусть $M = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 > 0$. Тогда

$$R(t) = e^{(\alpha - \varphi_3^0)A_3} e^{-\varphi_2^0 A_2} e^{\varphi_1(t)A_3} e^{\varphi_2(t)A_2} e^{(\varphi_3(t) - \alpha)A_3}, \quad (2.75)$$

где углы φ_i определяются из соотношений (2.76)–(2.82) при $r \neq 1$ и (2.79)–(2.83) при $r = 1$, а угол φ_1 удовлетворяет начальному условию $\varphi_1^0 = 0$.

Входящие в разложение (2.75) экспоненты матриц, содержащие φ_2 , φ_3 , выражаются через $\cos \varphi_2$, $\sin \varphi_2$, $\cos \varphi_3$, $\sin \varphi_3$, которые с помощью соотношений (2.76), (2.77), (2.79), (2.80) выражены через переменные c , $\cos(\theta/2)$, $\sin(\theta/2)$, которые, в свою очередь представлены выше как функции эллиптических координат или непосредственно. При $r = 1$ имеем $\varphi_1(t) = \sqrt{Mt}/2$. Интегрирование уравнения (2.78) при $r \neq 1$ вынесено в следующий пункт.

В случае $M = 0$ имеем $r = 1$, $c = 0$, $\theta = 0$, откуда $u_1 = \cos \alpha$, $u_2 = \sin \alpha$. Поэтому $\Omega = u_2 A_1 - u_1 A_2 \equiv \operatorname{const}$ и $R(t) = e^{t\Omega}$.

Интегрирование уравнений для φ_1 Вдоль нормальных геодезических углы φ_i удовлетворяют при $r \neq 1$ равенствам:

$$\cos \varphi_2 = c/\sqrt{M}, \quad \sin \varphi_2 = \pm\sqrt{M-c^2}/\sqrt{M}, \quad (2.76)$$

$$\cos \varphi_3 = \mp \sin \theta/\sqrt{M-c^2}, \quad \sin \varphi_3 = \pm(r-\cos \theta)/\sqrt{M-c^2}, \quad (2.77)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{M}(1-r\cos \theta)/(M-c^2), \quad (2.78)$$

а при $r = 1$ равенствам:

$$\cos \varphi_2 = c/\sqrt{M}, \quad \sin \varphi_2 = \pm 2\sin(\theta/2)/\sqrt{M}, \quad (2.79)$$

$$\cos \varphi_3 = \mp \cos(\theta/2), \quad \sin \varphi_3 = \pm \sin(\theta/2), \quad (2.80)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{M}/2. \quad (2.81)$$

Введем в рассмотрение *эллиптический интеграл III рода* в следующей форме:

$$\Pi(n, u, k) = \int_0^u \frac{dt}{(1-n\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int_0^{F(u,k)} \frac{dv}{1-n\sin^2 v}. \quad (2.82)$$

Пусть $r \neq 1$. Если $\lambda_1 \in C_1$, то

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)}(\Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}(\varphi+t)), k) - \Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}\varphi), k)), \quad (2.83)$$

где $l = -\frac{4k^2r}{(1-r)^2}$.

Если $\lambda_1 \in C_2$, то

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1+r)}{2\sqrt{r}(1-r)}(\Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}(\varphi+t)/k), k) - \Pi(l, \operatorname{am}(\sqrt{r}\varphi/k), k)),$$

где $l = -\frac{4r}{(1-r)^2}$.

Если $\lambda_1 \in C_3$, то

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t + \frac{\sqrt{M}k(1-r^2)}{8r^{3/2}}(I(\sqrt{r}(\varphi+t), a) - I(\sqrt{r}\varphi, a)),$$

$$I(v, a) = \int_0^v \frac{dt}{a^2 + \operatorname{th}^2 t} = \frac{at - \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(e^t(a^2 \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)/a)}{a + a^3},$$

где $a = (1-r)/(2\sqrt{r})$.

Если $\lambda_1 \in C_6$, то $\varphi_1(t) = \sqrt{1+c^2}t$.

Если $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$, то $\theta_t \equiv \operatorname{const} = \theta$, $\Omega = \sin(\alpha + \theta)A_1 - \cos(\alpha + \theta)A_2 \equiv \operatorname{const}$, $R(t) = e^{t\Omega}$.

Управляемая система в терминах кватернионов Для описания ориентации катящейся сферы удобно, наряду с матрицей вращения R , использовать кватернионы.

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}\}$ есть алгебра кватернионов, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$ — единичная сфера, $I = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = q_0 = 0\}$ — подпространство чисто мнимых кватернионов. Любой кватернион $q \in S^3$ задает вращение евклидова пространства I :

$$q \in S^3 \Rightarrow R_q(a) = qaq^{-1}, \quad a \in I, \quad R_q \in \operatorname{SO}(3) \cong \operatorname{SO}(I).$$

Соответствие между кватернионом $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$ и матрицей $R \in \operatorname{SO}(3)$ имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ -2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Управляемая система (2.47) в терминах кватернионов принимает форму

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_2u_1 - q_1u_2), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_3u_1 + q_0u_2), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-q_0u_1 + q_3u_2), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_1u_1 - q_2u_2), \end{cases} \quad q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.85)$$

Управляемая система на $\mathbb{R}^2 \times \operatorname{SO}(3)$ (2.46), (2.47) с начальным условием $g(0) = \operatorname{Id}$ имеет лифт на $\mathbb{R}^2 \times S^3$ вида (2.46), (2.85) с начальным условием $(x, y)(0) = (0, 0)$, $q(0) = 1$.

2.8.4 Симметрии

Симметрии семейства экстремальных траекторий Вращения эластик (x_s, y_s) вокруг начала координат в плоскости (x, y) порождают однопараметрическую группу симметрий траекторий гамильтоновой системы (2.68)–(2.73):

$$\{\Phi^\beta \mid \beta \in S^1\},$$

где вращение Φ^β определяется следующим образом:

$$\Phi^\beta : \{\lambda_s \mid s \in [0, t]\} \rightarrow \{\lambda_s^\beta \mid s \in [0, t]\}, \quad (2.86)$$

$$\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s), \quad Q_s = (x_s, y_s, R_s), \quad (2.87)$$

$$\lambda_s^\beta = (\theta_s^\beta, c_s^\beta, \alpha^\beta, r, Q_s^\beta), \quad Q_s^\beta = (x_s^\beta, y_s^\beta, R_s^\beta), \quad (2.88)$$

$$\theta_s^\beta = \theta_s, \quad c_s^\beta = c_s, \quad \alpha^\beta = \alpha + \beta, \quad (2.89)$$

$$\begin{pmatrix} x_s^\beta \\ y_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

$$R_s^\beta = e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3}, \quad \Omega_s^\beta = e^{\beta A_3} \Omega_s e^{-\beta A_3}. \quad (2.91)$$

Предложение 2.8. Если $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$ есть траектория системы (2.68)–(2.73), то для любого $\beta \in S^1$ кривая $\{\lambda_s^\beta \mid s \in [0, t]\}$ есть также траектория этой системы.

Отражения траекторий (θ_s, c_s) маятника (2.68), (2.69) в осях координат θ , c и в начале координат продолжаются до дискретных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ семейства траекторий гамильтоновой системы (2.68)–(2.73):

$$\varepsilon^i : \{\lambda_s \mid s \in [0, t]\} \rightarrow \{\lambda_s^i \mid s \in [0, t]\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s), \quad Q_s = (x_s, y_s, R_s),$$

$$\lambda_s^i = (\theta_s^i, c_s^i, \alpha^i, r, Q_s^i), \quad Q_s^i = (x_s^i, y_s^i, R_s^i).$$

Отражению траекторий (θ_s, c_s) маятника (2.68), (2.69) в оси координат θ соответствует дискретная симметрия ε^1 семейства экстремальных траекторий:

$$\theta_s^1 = \theta_{t-s}, \quad c_s^1 = -c_{t-s}, \quad \alpha^1 = \alpha + \pi,$$

$$x_s^1 = x_{t-s} - x_t, \quad y_s^1 = y_{t-s} - y_t,$$

$$R_s^1 = (R_t)^{-1} R_{t-s}, \quad \Omega_s^1 = -\Omega_{t-s}.$$

Отражение траекторий маятника (θ_s, c_s) в оси координат c порождает симметрию ε^2 экстремальных траекторий:

$$\theta_s^2 = -\theta_{t-s}, \quad c_s^2 = c_{t-s}, \quad \alpha^2 = \pi - \alpha,$$

$$x_s^2 = x_{t-s} - x_t, \quad y_s^2 = y_t - y_{t-s},$$

$$R_s^2 = I_2 (R_t)^{-1} R_{t-s} I_2, \quad \Omega_s^2 = -I_2 \Omega_{t-s} I_2,$$

$$I_2 = I_2^{-1} = e^{\pi A_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отражение траекторий маятника (θ_s, c_s) в начале координат $(\theta, c) = (0, 0)$ продолжается до симметрии ε^3 экстремальных траекторий:

$$\theta_s^3 = -\theta_s, \quad c_s^3 = -c_s, \quad \alpha^3 = -\alpha,$$

$$x_s^3 = x_s, \quad y_s^3 = -y_s,$$

$$R_s^3 = I_2 R_s I_2, \quad \Omega_s^3 = I_2 \Omega_s I_2.$$

Предложение 2.9. Если $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$ есть траектория системы (2.68)–(2.73), то кривые $\{\lambda_s^i \mid s \in [0, t]\}$, $i = 1, 2, 3$, суть также траектории этой системы.

Симметрии экспоненциального отображения Действие вращений Φ^β и отражений ε^i в прообразе и образе экспоненциального отображения определяется так, чтобы они коммутировали с действием экспоненциального отображения.

Вращения $\Phi^\beta : \lambda \mapsto \lambda^\beta$ (2.86)–(2.91) являются симметриями гамильтоновой системы, поэтому их действие в T^*G естественно распадается в прямую сумму действий в $N = \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+$ (на (λ, t) , где λ — начало экстремали) и в G (на Q_t — конец соответствующей экстремальной траектории):

$$\begin{aligned}\Phi^\beta : N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^\beta, t), \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha, r), & \lambda^\beta &= (\theta, c, \alpha^\beta, r), \\ \alpha^\beta &= \alpha + \beta,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi^\beta : G &\rightarrow G, & Q &\mapsto Q^\beta, \\ Q &= (x, y, R), & Q^\beta &= (x^\beta, y^\beta, R^\beta), \\ \begin{pmatrix} x^\beta \\ y^\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & R^\beta &= e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3}.\end{aligned}$$

Действие отражений ε^i в N определяется ограничением их действия на вертикальные составляющие экстремальных траекторий в начальный момент времени $s = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^i : N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^i, t), & i &= 1, 2, 3, \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha, r), & \lambda^i &= (\theta^i, c^i, \alpha^i, r),\end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_s|_{s=0}$, $\lambda^i = \lambda_s^i|_{s=0}$. Явные выражения для действия ε^i в N :

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : (\theta, c, \alpha, r, t) &\mapsto (\theta^1, c^1, \alpha^1, r, t) = (\theta_t, -c_t, \alpha + \pi, r, t), \\ \varepsilon^2 : (\theta, c, \alpha, r, t) &\mapsto (\theta^2, c^2, \alpha^2, r, t) = (-\theta_t, c_t, \pi - \alpha, r, t), \\ \varepsilon^3 : (\theta, c, \alpha, r, t) &\mapsto (\theta^3, c^3, \alpha^3, r, t) = (-\theta, -c, -\alpha, r, t).\end{aligned}$$

Действие отражений в G определяется их действием на экстремальные траектории в конечный момент времени $s = t$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^i : G &\rightarrow G, & Q &\mapsto Q^i, & i &= 1, 2, 3, \\ Q &= (x, y, R), & Q^i &= (x^i, y^i, R^i),\end{aligned}$$

где $Q = Q_s|_{s=t}$, $Q^i = Q_s^i|_{s=t}$. Явные формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : (x, y, R) &\mapsto (x^1, y^1, R^1) = (-x, -y, (R)^{-1}), \\ \varepsilon^2 : (x, y, R) &\mapsto (x^2, y^2, R^2) = (-x, y, I_2(R)^{-1} I_2), \\ \varepsilon^3 : (x, y, R) &\mapsto (x^3, y^3, R^3) = (x, -y, I_2 R I_2).\end{aligned}$$

Итак, определено действие вращений и отражений в прообразе и образе экспоненциального отображения:

$$\Phi^\beta, \varepsilon^i : N \rightarrow N, \quad (\lambda, t) \mapsto (\lambda^\beta, t), (\lambda^i, t), \quad (2.92)$$

$$\Phi^\beta, \varepsilon^i : G \rightarrow G, \quad Q \mapsto Q^\beta, Q^i. \quad (2.93)$$

Существенно, что образ $Q^i = \varepsilon^i(Q)$ зависит лишь от прообраза Q , но не от момента времени t .

Предложение 2.10. *Отображения $\Phi^\beta, \varepsilon^i$ являются симметриями экспоненциального отображения.*

Рассмотрим группу симметрий экспоненциального отображения, порожденную вращениями и отражениями:

$$\text{Sym} = \langle \Phi^\beta, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \rangle.$$

Таблица умножения в этой группе имеет следующий вид:

$\cdot \circ \cdot$	ε^1	ε^2	ε^3	Φ^β
ε^1	Id	ε^3	ε^2	$\Phi^\beta \circ \varepsilon^1$
ε^2	ε^3	Id	ε^1	$\Phi^{-\beta} \circ \varepsilon^2$
ε^3	ε^2	ε^1	Id	$\Phi^{-\beta} \circ \varepsilon^3$
Φ^γ	$\varepsilon^1 \circ \Phi^\gamma$	$\varepsilon^2 \circ \Phi^{-\gamma}$	$\varepsilon^3 \circ \Phi^{-\gamma}$	$\Phi^{\beta+\gamma}$

Отсюда получаем явное описание группы симметрий экспоненциального отображения:

$$\text{Sym} = \{ \Phi^\beta, \Phi^\beta \circ \varepsilon^i \mid \beta \in S^1, i = 1, 2, 3 \} \cong \text{SO}(2) \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Определим множество Максвелла, соответствующее группе $\langle \varepsilon^i, \Phi^\beta \rangle$, $i = 1, 2, 3$:

$$\text{MAX}^i = \{ (\lambda, t) \in N \mid \exists \beta \in S^1 : (\tilde{\lambda}, t) = \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t), \text{Exp}(\lambda, s) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t) \}.$$

2.8.5 Условия оптимальности

Теорема 2.36. Пусть $t > 0$ и $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$ есть такая экстремальная траектория, что:

$$(1) \quad q_3(t) = 0,$$

(2) эластика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ невырождена и не центрирована в точке перегиба.

Тогда $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$, поэтому для любого $t_1 > t$ траектория $Q_s, s \in [0, t_1]$, неоптимальна.

Теорема 2.37. Пусть $t > 0$ и $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$ есть такая экстремальная траектория, что:

$$(1) \quad (xq_1 + yq_2)(t) = 0,$$

(2) эластика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ невырождена и не центрирована в вершине.

Тогда $(\lambda, t) \in \text{MAX}^2$, поэтому для любого $t_1 > t$ траектория $Q_s, s \in [0, t_1]$, неоптимальна.

Теорема 2.38. Пусть $t > 0$ и $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$ есть такая экстремальная траектория, что:

$$(1) \quad (xq_1 + yq_2)(t) = q_3(t) = 0 \text{ или } (yq_1 - xq_2)(t) = q_0(t) = 0.$$

(2) эластика $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ невырождена.

Тогда $(\lambda, t) \in \text{MAX}^3$, поэтому для любого $t_1 > t$ траектория $Q_s, s \in [0, t_1]$, неоптимальна.

Замечание. Учитывая то, что для любого кватерниона $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$, соответствующее движение $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть вращение вокруг вектора $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, можно дать следующую наглядную интерпретацию условию (1) теорем 2.36–2.38:

1. Условие (1) теоремы 2.36 означает, что вращение сферы R_t есть поворот вокруг некоторой горизонтальной оси;
2. Условие (1) теоремы 2.37 означает, что вращение R_t есть поворот вокруг некоторой оси, ортогональной вектору перемещения точки контакта сферы и плоскости $(x_t, y_t, 0)$;
3. Условие (1) теоремы 2.38 означает, что вращение R_t есть поворот вокруг горизонтальной оси, ортогональной вектору $(x_t, y_t, 0)$, или что R_t есть поворот на угол π вокруг некоторой оси, лежащей в вертикальной плоскости, которая содержит вектор $(x_t, y_t, 0)$.

2.8.6 Библиографические комментарии

Раздел 2.8.1 опирается на работы [95, 97, 98, 112], раздел 2.8.2 — на [94], раздел 2.8.3 — на [93, 94], раздел 2.8.4 — на [94].

2.9 Субриманова задача на группе Энгеля

2.9.1 Постановка задачи

Геометрическая постановка Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и прямая $L \subset \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S с центром масс, принадлежащим прямой L . Таким образом, это некоторое обобщение (усложнение) задачи Дидоны, см. [5, 42].

Задача оптимального управления Поставленную геометрическую задачу можно переформулировать как задачу оптимального управления

$$\dot{g} = u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g), \quad g = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4, \quad (2.94)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.95)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \quad (2.96)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (2.97)$$

Эта задача — субриманова для субримановой структуры на \mathbb{R}^4 , заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером.

Алгебра Энгеля и группа Энгеля Алгеброй Энгеля называется алгебра Ли \mathfrak{g} , в которой существует базис (X_1, \dots, X_4) , в котором ненулевые коммутаторы суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$

см. Рис. 37.

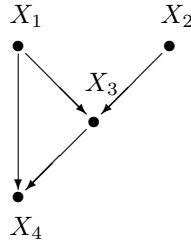


Рис. 37: Алгебра Энгеля

Алгебра Энгеля есть нильпотентная алгебра Ли с градуировкой $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}(X_1, X_2)$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3$, $\mathfrak{g}^{(3)} = \mathbb{R}X_4$, $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}$, $\mathfrak{g}^{(4)} = \{0\}$, поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется *группой Энгеля*.

Группа Энгеля имеет линейное представление:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

На пространстве $\mathbb{R}_{x,y,z,v}^4$ можно ввести закон умножения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2 \\ v_1 + v_2 + y_1 y_2 (y_1 + y_2)/2 + x_1 z_2 + x_1 y_2 (x_1 + x_2)/2 \end{pmatrix},$$

превращающий это пространство в группу Энгеля: $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v}^4$, а поля (2.97) в левоинвариантные поля на этой группе. Таким образом, задача (2.94)–(2.96) есть левоинвариантная субриманова задача на группе Энгеля. Поэтому можно считать, что начальная точка в (2.95) есть единица группы Энгеля: $g_0 = \text{Id} = (0, 0, 0, 0)$.

Все вполне неголономные левоинвариантные субримановы задачи ранга 2 на группе Энгеля переводятся друг в друга изоморфизмом этой группы [113].

Особенности задачи Субриманова задача на группе Энгеля есть простейшая левоинвариантная субриманова задача со следующими свойствами:

- она имеет глубину 3, ее вектор роста равен $(2, 3, 4)$,
- она имеет нетривиальные аномальные кратчайшие,
- ее геодезические параметризуются неэлементарными функциями (эллиптическими функциями Якоби),
- ее субриманова сфера несубаналитична.

Эта задача доставляет нильпотентную аппроксимацию любой *субримановой задачи энгелева типа* (то есть с вектором роста $(2, 3, 4)$, см. [42, 46]), в частности, для мобильного робота с прицепом.

2.9.2 Симметрии распределения и субримановой структуры

Теорема 2.39. Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий распределения $\text{span}(X_1, X_2)$ на группе Энгеля параметризуется гладкими функциями на этой группе, постоянными вдоль поля X_2 .

Теорема 2.40. Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий нильпотентной субримановой структуры на группе Энгеля изоморфна алгебре Энгеля и состоит из правоинвариантных векторных полей на этой группе.

2.9.3 Геодезические

Существование оптимальных управлений в задаче (2.94)–(2.96) следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

Принцип максимума Понтрягина Перейдем от задачи минимизации длины (2.96) к эквивалентной задаче минимизации энергии

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \quad (2.98)$$

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, \dots, 4$. Тогда принцип максимума Понтрягина для задачи (2.94), (2.95), (2.98) принимает форму:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= u_1 h_4, \\ \dot{h}_4 &= 0, \\ \dot{g} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, \\ u_1 h_1 + u_2 h_2 + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) &\rightarrow \max_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2}, \\ \nu &\leq 0, \\ (h_1, \dots, h_4, \nu) &\neq 0. \end{aligned}$$

Аномальные экстремали Аномальные экстремали постоянной скорости могут быть параметризованы как

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 = h_3 &\equiv 0, \quad h_4 \equiv \text{const} \neq 0, \\ u_1 &\equiv 0, \quad u_2 \equiv \pm 1, \\ x = z &\equiv 0, \quad y = \pm t, \quad v = \pm \frac{t^3}{6}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Аномальные траектории (2.99) суть однопараметрические подгруппы $g(t) = e^{\pm t X_2}$. Они проецируются на плоскость (x, y) в прямые, потому являются субримановыми кратчайшими. Аномальное множество есть одномерное гладкое многообразие, диффеоморфное прямой:

$$\text{Abn} = \{g \in G \mid x = z = v - y^3/6 = 0\}.$$

Нормальные экстремали Нормальные экстремали являются траекториями нормальной гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*G, \quad (2.100)$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Введем на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ координаты (θ, c, α) :

$$h_1 = -\sin \theta, \quad h_2 = \cos \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha,$$

тогда гамильтонова система (2.100) примет форму

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad (2.101)$$

$$\dot{g} = -\sin \theta X_1 + \cos \theta X_2. \quad (2.102)$$

Вертикальная подсистема (2.101) есть уравнение маятника в поле силы тяжести с ускорением свободного падения $g = \alpha l$, где l — длина маятника. Таким образом, при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) сила тяжести направлена вниз (вверх) относительно оси, от которой отсчитывается угол θ , а при $\alpha = 0$ маятник движется в невесомости.

Проекции нормальных экстремалей на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластики, см. раздел 2.6.

Аномальные кратчайшие удовлетворяют нормальной гамильтоновой системе (2.101), (2.102) при $\theta = \pi + 2\pi n$, $c = 0$, поэтому они нестрого аномальны.

Симплектическое слоение и функции Казимира На коалгебре Ли \mathfrak{g}^* существуют 2 независимые функции Казимира:

$$h_4, \quad E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4,$$

где E есть полная энергия маятника (2.101).

Симплектическое слоение на \mathfrak{g}^* состоит из:

- параболических цилиндров

$$\{E = \text{const}, \quad h_4 = \text{const} \neq 0, \quad h_3^2 + h_4^2 \neq 0\},$$

- пар плоскостей

$$\{E = \text{const}, \quad h_4 = 0, \quad h_3 \neq 0\},$$

- точек

$$\{h_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad h_3^2 + h_4^2 = 0\}.$$

Симплектические листы 2-мерны и 0-мерны, потому вертикальная подсистема (2.101) интегрируема по Лиувиллю. Фазовый портрет гамильтоновой системы (2.100) на цилиндре $C \cap \{h_4 = \text{const}\}$, где $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$, получается пересечением этого цилиндра с поверхностью уровня энергии E .

Параметризация нормальных геодезических Семейство нормальных экстремалей на поверхности уровня $\{H = \frac{1}{2}\}$ параметризуется начальными точками, принадлежащими цилиндру C .

Рассмотрим стратификацию цилиндра C на подмногообразия, соответствующие разным типам траекторий маятника (2.101):

$$\begin{aligned} C &= \bigsqcup_{i=1}^7 C_i, \\ C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (-|\alpha|, |\alpha|)\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (|\alpha|, +\infty)\}, \\ C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = |\alpha|, c \neq 0\}, \\ C_4 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -|\alpha|\}, \\ C_5 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = |\alpha|, c = 0\}, \\ C_6 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, c \neq 0\}, \\ C_7 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = c = 0\}. \end{aligned}$$

Далее, множества C_i , $i = 1, \dots, 5$, разбиваются на подмножества в зависимости от знака переменной α :

$$C_i^+ = C_i \cap \{\alpha > 0\}, \quad C_i^- = C_i \cap \{\alpha < 0\}, \quad i \in \{1, \dots, 5\}.$$

Более того, подмножества C_6 , C_2^\pm, C_3^\pm разбиваются на связные компоненты в зависимости от знака переменной c :

$$\begin{aligned} C_{6+} &= C_6 \cap \{c > 0\}, \quad C_{6-} = C_6 \cap \{c < 0\}, \\ C_{i+}^\pm &= C_i^\pm \cap \{c > 0\}, \quad C_{i-}^\pm = C_i^\pm \cap \{c < 0\}, \quad i \in \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Для нормализации нормальных геодезических введем на стратах C_1, C_2, C_3 эллиптические координаты (φ, k, α) , в которых уравнение маятника (2.101) выпрямляется.

В области C_1^+

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{c^2}{4\alpha} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \in (0, 1), \\ \sin \frac{\theta}{2} &= k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi), & \cos \frac{\theta}{2} &= \operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} &= k\sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi), & \varphi &\in [0, 4K]. \end{aligned}$$

В области C_2^+

$$k = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{4\alpha} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \in (0, 1),$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} c \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k},$$

$$\frac{c}{2} = \operatorname{sgn} c \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \quad \varphi \in [0, 2kK],$$

$$\psi = \frac{\varphi}{k}.$$

На множестве C_3^+

$$k = 1,$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} c \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}\varphi), \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)},$$

$$\frac{c}{2} = \operatorname{sgn} c \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}, \quad \varphi \in (-\infty, +\infty).$$

На множествах C_1^-, C_2^-, C_3^- определим новые координаты следующим образом:

$$\varphi(\theta, c, \alpha) = \varphi(\theta - \pi, c, -\alpha), \quad (2.103)$$

$$k(\theta, c, \alpha) = k(\theta - \pi, c, -\alpha). \quad (2.104)$$

Вертикальная подсистема (2.101) принимает в новых координатах следующую форму:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

поэтому ее решения имеют вид

$$\varphi_t = \varphi + t, \quad k = \operatorname{const}, \quad \alpha = \operatorname{const}. \quad (2.105)$$

Задача инвариантна относительно левых сдвигов на группе Энгеля, а также дилатаций

$$\delta_s : (t, x, y, z, v) \mapsto (e^s t, e^s x, e^s y, e^{2s} z, e^{3s} v), \quad (2.106)$$

$$(\theta, c, \alpha) \mapsto (\theta, e^{-s} c, e^{-2s} \alpha), \quad (\varphi, k, \alpha) \mapsto (e^s \varphi, k, e^{-2s} \alpha), \quad (2.107)$$

и отражений

$$(t, x, y, z, v) \mapsto (t, -x, -y, z, -v),$$

$$(\theta, c, \alpha) \mapsto (\theta - \pi, c, -\alpha), \quad (\varphi, k, \alpha) \mapsto (\varphi, k, -\alpha).$$

Дилатации на группе Энгеля задают поток векторного поля

$$Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v}.$$

При $\lambda = (\varphi, k, \alpha) \in \cup_{i=1}^3 C_i$, $\alpha = 1$, геодезические параметризуются следующим образом. Если $\lambda \in C_1$, то

$$x_t = 2k(\operatorname{cn} \varphi_t - \operatorname{cn} \varphi),$$

$$y_t = 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - t,$$

$$z_t = 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - \frac{y_t}{2}(\operatorname{cn} \varphi_t + \operatorname{cn} \varphi)),$$

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi y_t - 4k^2 \operatorname{cn} \varphi (\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) +$$

$$+ 2k^2 \left(\frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t \operatorname{sn} \varphi_t - \frac{2}{3} \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi + \frac{1 - k^2}{3k^2} t + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} (E(\varphi_t) - E(\varphi)) \right). \quad (2.108)$$

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{2 \operatorname{sgn} c}{k} (\operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi), \\
y_t &= \frac{k^2 - 2}{k^2} t + \frac{2}{k} (E(\psi_t) - E(\psi)), \\
z_t &= -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2 \operatorname{sgn} c \operatorname{dn} \psi}{k} y_t + 2 \operatorname{sgn} c (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi \operatorname{sn} \psi), \\
v_t &= \frac{4}{k} \left(\frac{1}{3} \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \frac{1}{3} \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi \operatorname{sn} \psi - \frac{1 - k^2}{3k^3} t - \frac{k^2 - 2}{6k^2} (E(\psi_t) - E(\psi)) \right) + \\
&\quad + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{k^2} \operatorname{dn}^2 \psi - \frac{4}{k} \operatorname{dn} \psi (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi \operatorname{sn} \psi), \\
\psi &= \frac{\varphi}{k}, \quad \psi_t = \psi + \frac{t}{k}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\begin{aligned}
x_t &= 2 \operatorname{sgn} c \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \right), \\
y_t &= 2(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi) - t, \\
z_t &= -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2 \operatorname{sgn} c}{\operatorname{ch} \varphi} y_t + 2 \operatorname{sgn} c \left(\frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} \right), \\
v_t &= \frac{2}{3} \left(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi + 2 \frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - 2 \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi} - \frac{4}{\operatorname{ch} \varphi} \left(\frac{\operatorname{th} \varphi_t}{\operatorname{ch} \varphi_t} - \frac{\operatorname{th} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} \right).
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Параметризация геодезических для произвольных $\lambda = (\varphi, k, \alpha) \in \cup_{i=1}^3 C_i$ получается из случая $\alpha = 1$ с помощью дилатаций и отражения:

- если $\alpha > 0$, то

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = \left(\frac{x_{t'}}{\alpha^{1/2}}, \frac{y_{t'}}{\alpha^{1/2}}, \frac{z_{t'}}{\alpha}, \frac{v_{t'}}{\alpha^{3/2}} \right) (\sqrt{\alpha} \varphi, k, 1), \quad t' = t\sqrt{\alpha},$$

- если $\alpha < 0$, то

$$(x_t, y_t, z_t, v_t)(\varphi, k, \alpha) = (-x_t, -y_t, z_t, -v_t)(\varphi, k, -\alpha).$$

В оставшихся случаях $\lambda \in \cup_{i=4}^7 C_i$ геодезические параметризуются элементарными функциями.

Если $\lambda \in C_4$, то

$$x_t = 0, \quad y_t = t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

Если $\lambda \in C_5$, то

$$x_t = 0, \quad y_t = -t \operatorname{sgn} \alpha, \quad z_t = 0, \quad v_t = -\frac{t^3}{6} \operatorname{sgn} \alpha.$$

Если $\lambda \in C_6$, то

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{\cos(ct + \theta) - \cos \theta}{c}, & y_t &= \frac{\sin(ct + \theta) - \sin \theta}{c}, \\
z_t &= \frac{ct - \sin ct}{2c^2}, & v_t &= \frac{3 \cos \theta - 2ct \sin \theta - 4 \cos(ct + \theta) + \cos(2ct + \theta)}{4c^3}.
\end{aligned}$$

Если $\lambda \in C_7$, то

$$x_t = -t \sin \theta, \quad y_t = t \cos \theta, \quad z_t = 0, \quad v_t = \frac{t^3}{6} \cos \theta.$$

Проекции геодезических на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластичности (см. раздел 2.6): инфлексионные при $\lambda \in C_1$, неинфлексионные при $\lambda \in C_2$, критические при $\lambda \in C_3$, прямые при $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$, и окружности при $\lambda \in C_6$.

Семейство всех геодезических параметризуется экспоненциальным отображением

$$\begin{aligned}
\operatorname{Exp}: N = C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow M, \\
\operatorname{Exp}(\lambda, t) &= g_t = (x_t, y_t, z_t, v_t).
\end{aligned}$$

2.9.4 Симметрии экспоненциального отображения и время Максвелла

Дилатации (2.106), (2.107) образуют однопараметрическую группу симметрий экспоненциального отображения. Имеется также дискретная группа симметрий, образованная отражениями:

$$\text{Sym} = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Обозначим через $\vec{H}_v = c \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \sin \theta \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec}(C)$ вертикальную часть нормального гамильтонова поля \vec{H} . Следующие отображения $\varepsilon^i : C \rightarrow C$ сохраняют поле направлений векторного поля \vec{H}_v :

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta, -c, \alpha), & \varepsilon^2 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta, c, \alpha), \\ \varepsilon^3 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta, -c, \alpha), & \varepsilon^4 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta + \pi, c, -\alpha), \\ \varepsilon^5 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (\theta + \pi, -c, -\alpha), & \varepsilon^6 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta + \pi, c, -\alpha), \\ \varepsilon^7 : (\theta, c, \alpha) &\mapsto (-\theta + \pi, -c, -\alpha). \end{aligned}$$

А именно: $\varepsilon_*^i \vec{H}_v = \vec{H}_v$ при $i = 3, 4, 7$, и $\varepsilon_*^i \vec{H}_v = -\vec{H}_v$ при $i = 1, 2, 5, 6$. Действие отражений $\varepsilon^i : C \rightarrow C$ продолжается до симметрий экспоненциального отображения следующим образом.

Действие $\varepsilon^i : N \rightarrow N$, $N = C \times \mathbb{R}_+$, определяется как

$$\varepsilon^i(\lambda, t) = \begin{cases} (\varepsilon^i(\lambda), t), & \text{если } \varepsilon_*^i \vec{H}_v = \vec{H}_v, \\ (\varepsilon^i \circ e^{t\vec{H}_v}(\lambda), t), & \text{если } \varepsilon_*^i \vec{H}_v = -\vec{H}_v. \end{cases}$$

Действие $\varepsilon^i : G \rightarrow G$ определяется как

$$\begin{aligned} \varepsilon^i(q) &= \varepsilon^i(x, y, z, v) = g^i = (x^i, y^i, z^i, v^i), \\ (x^1, y^1, z^1, v^1) &= (x, y, -z, v - xz), \\ (x^2, y^2, z^2, v^2) &= (-x, y, z, v - xz), \\ (x^3, y^3, z^3, v^3) &= (-x, y, -z, v), \\ (x^4, y^4, z^4, v^4) &= (-x, -y, z, -v), \\ (x^5, y^5, z^5, v^5) &= (-x, -y, -z, -v + xz), \\ (x^6, y^6, z^6, v^6) &= (x, -y, z, -v + xz), \\ (x^7, y^7, z^7, v^7) &= (x, -y, -z, -v). \end{aligned}$$

Предложение 2.11. *Группа Sym есть подгруппа группы симметрий экспоненциального отображения.*

Теорема 2.41. *Первое время Максвелла, соответствующее группе симметрий Sym, для почти всех геодезических выражается следующим образом:*

$$\lambda \in C_1 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = \min(2p_z^1(k), 4K(k))/\sigma, \quad (2.111)$$

$$\lambda \in C_2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = 2kK(k)/\sigma, \quad (2.112)$$

$$\lambda \in C_6 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = 2\pi/|c|, \quad (2.113)$$

$$\lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{MAX}}^1 = +\infty, \quad (2.114)$$

где $\sigma = \sqrt{|\alpha|}$, $p_z^1(k) \in (K(k), 3K(k))$ есть первый положительный корень функции $f_z(p, k) = \text{dn } p \text{ sn } p + (p - 2E(p)) \text{ cn } p$.

Замечание. Для тех геодезических, для которых первое время Максвелла не равно t_{MAX}^1 , оно больше этого значения, а t_{MAX}^1 есть первое сопряженное время.

Теорема 2.42. *Функция $t_{\text{MAX}}^1 : C \rightarrow (0, +\infty]$ имеет следующие свойства инвариантности:*

- (1) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ зависит только от значений E и $|\alpha|$,
- (2) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ есть первый интеграл поля \vec{H}_v ,
- (3) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ инвариантно относительно отражений: если $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $(\lambda^i, t) = \varepsilon^i(\lambda, t)$, то $t_{\text{MAX}}^1(\lambda^i) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$,
- (4) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ однородна относительно дилатаций: если $\lambda \in C$, $\lambda_s = \delta_s(\lambda) \in C$, то $t_{\text{MAX}}^1(\lambda_s) = e^s t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$, $s \in \mathbb{R}$.

2.9.5 Нижняя оценка сопряженного времени

Теорема 2.43. Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

2.9.6 Диффеоморфная структура экспоненциального отображения

Рассмотрим подмножество в пространстве состояний, не содержащее неподвижных точек симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\tilde{G} = \{g \in G \mid \varepsilon^1(g) \neq g \neq \varepsilon^2(g)\} = \{g \in G \mid xz \neq 0\},$$

и его связные компоненты:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{g \in G \mid x < 0, z > 0\}, \\ G_2 &= \{g \in G \mid x < 0, z < 0\}, \\ G_3 &= \{g \in G \mid x > 0, z < 0\}, \\ G_4 &= \{g \in G \mid x > 0, z > 0\}. \end{aligned}$$

Также рассмотрим открытое плотное подмножество в пространстве всех потенциально оптимальных геодезических:

$$\tilde{N} = \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{MAX}}^1(\lambda), c_{t/2} \sin \theta_{t/2} \neq 0\},$$

и его связные компоненты:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda)), \sin \theta_{t/2} > 0, c_{t/2} > 0\}, \\ D_2 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda)), \sin \theta_{t/2} > 0, c_{t/2} < 0\}, \\ D_3 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda)), \sin \theta_{t/2} < 0, c_{t/2} < 0\}, \\ D_4 &= \{(\lambda, t) \in N \mid t \in (0, t_{\text{MAX}}^1(\lambda)), \sin \theta_{t/2} < 0, c_{t/2} > 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.44. Следующие отображения являются диффеоморфизмами:

$$\begin{aligned} \text{Exp} : D_i &\rightarrow G_i, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \text{Exp} : \tilde{N} &\rightarrow \tilde{G}. \end{aligned}$$

2.9.7 Время разреза

Теорема 2.45. Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

2.9.8 Множество разреза и его стратификация

Теорема 2.46. Множество разреза Cut содержится в объединении координатных подпространств $\{x = 0\}$ и $\{z = 0\}$. Оно инвариантно относительно дилатаций и дискретных симметрий:

$$\begin{aligned} e^{tY}(\text{Cut}) &= \text{Cut}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon^i(\text{Cut}) &= \text{Cut}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Теорема 2.47. Множество разреза имеет стратификацию

$$\begin{aligned} \text{Cut} &= (\mathcal{I}_{x+} \sqcup \mathcal{I}_{x-}) \sqcup (\mathcal{N}_{x+} \sqcup \mathcal{N}_{x-}) \sqcup (\mathcal{I}_{z+} \sqcup \mathcal{I}_{z-}) \sqcup \\ &\sqcup (\mathcal{CI}_{x+}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{x+}^- \sqcup \mathcal{CI}_{x-}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{x-}^-) \sqcup (\mathcal{CN}_{x+}^+ \sqcup \mathcal{CN}_{x+}^- \sqcup \mathcal{CN}_{x-}^+ \sqcup \mathcal{CN}_{x-}^-) \sqcup \\ &\sqcup (\mathcal{CI}_{z+}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{z+}^- \sqcup \mathcal{CI}_{z-}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{z-}^-) \sqcup \\ &\sqcup (\mathcal{E}_+ \sqcup \mathcal{E}_-). \end{aligned}$$

Пересечения множества разреза с координатными подпространствами имеют стратификации

$$\begin{aligned} \text{Cut} \cap \{z = 0\} &= (\mathcal{I}_{z+} \sqcup \mathcal{I}_{z-}) \sqcup (\mathcal{CI}_{z+}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{z+}^- \sqcup \mathcal{CI}_{z-}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{z-}^-) \\ &\sqcup (\mathcal{I}_{x+}^0 \sqcup \mathcal{I}_{x-}^0) \sqcup (\mathcal{E}_+ \sqcup \mathcal{E}_-), \\ \text{Cut} \cap \{x = 0\} &= (\mathcal{I}_{x+} \sqcup \mathcal{I}_{x-}) \sqcup (\mathcal{CI}_{x+}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{x+}^- \sqcup \mathcal{CI}_{x-}^+ \sqcup \mathcal{CI}_{x-}^-) \\ &\sqcup (\mathcal{N}_{x+} \sqcup \mathcal{N}_{x-}) \sqcup (\mathcal{CN}_{x+}^+ \sqcup \mathcal{CN}_{x+}^- \sqcup \mathcal{CN}_{x-}^+ \sqcup \mathcal{CN}_{x-}^-) \\ &\sqcup (\mathcal{I}_{z+}^0 \sqcup \mathcal{I}_{z-}^0) \sqcup (\mathcal{E}_+ \sqcup \mathcal{E}_-), \\ \text{Cut} \cap \{x = z = 0\} &= (\mathcal{I}_{z+}^0 \sqcup \mathcal{I}_{z-}^0) \sqcup (\mathcal{I}_{x+}^0 \sqcup \mathcal{I}_{x-}^0) \sqcup (\mathcal{E}_+ \sqcup \mathcal{E}_-). \end{aligned}$$

При этом $\mathcal{I}_{x\pm}^0 \subset \mathcal{I}_{x\pm}$, $\mathcal{I}_{z\pm}^0 \subset \mathcal{I}_{z\pm}$, а также

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{z+} &= \{g \in G \mid z = 0, y > Y_0^1|x|, w < G_1(x, y)\} \simeq \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{I}_{x+} &= \{g \in G \mid x = 0, y > 0, w > G_2(z, y)\} \simeq \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{N}_{x\pm} &= \{g \in G \mid x = 0, \operatorname{sgn} z = \pm 1, -G_3(z, -y) < w < G_3(z, y)\} \simeq \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{CI}_{z+}^\pm &= \{g \in G \mid z = 0, y > Y_0^1|x|, w = G_1(x, y), \operatorname{sgn} x = \pm 1\} \simeq \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{CI}_{x+}^\pm &= \{g \in G \mid z = 0, y > 0, w = G_2(x, y), \operatorname{sgn} z = \pm 1\} \simeq \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{CN}_{x\pm}^\pm &= \{g \in G \mid x = 0, \operatorname{sgn} z = \pm 1, w = G_3(z, y)\} \simeq \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{I}_{z\pm}^0 &= \{g \in G \mid x = z = 0, yw < 0, \operatorname{sgn} y = \pm 1\} \simeq \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{I}_{x\pm}^0 &= \{g \in G \mid x = z = 0, yw > 0, \operatorname{sgn} y = \pm 1\} \simeq \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{E}_\pm &= \{g \in G \mid x = y = z = 0, \operatorname{sgn} w = \pm 1\} \simeq \mathbb{R}^1, \\ \mathcal{I}_{z-} &= \varepsilon^4(\mathcal{I}_{z+}), \quad \mathcal{I}_{x-} = \varepsilon^4(\mathcal{I}_{x+}), \\ \mathcal{CI}_{z-}^\pm &= \varepsilon^4(\mathcal{CI}_{z+}^\pm), \quad \mathcal{CI}_{x-}^\pm = \varepsilon^4(\mathcal{CI}_{x+}^\pm), \quad \mathcal{CN}_{x\pm}^- = \varepsilon^4(\mathcal{CN}_{x\pm}^+),\end{aligned}$$

где $Y_0^1 < 0$, а G_i , $i = 1, 2, 3$, — некоторые гладкие функции, удовлетворяющие свойствам:

$$\begin{aligned}G_1(0, y) &= 0, \quad G_1(-x, y) = G_1(x, y), \quad G_1(\rho x, \rho y) = \rho^3 G_1(x, y), \quad \rho > 0, \\ G_2(0, y) &= 0, \quad G_2(-z, y) = G_2(z, y), \quad G_2(\rho^2 z, \rho y) = \rho^3 G_2(z, y), \quad \rho > 0, \\ G_3(-z, y) &= G_3(z, y), \quad G_3(\rho^2 z, \rho y) = \rho^3 G_3(z, y), \quad \rho > 0.\end{aligned}$$

Трёхмерные страты $\mathcal{I}_{x\pm}$, $\mathcal{I}_{z\pm}$ (соотв. $\mathcal{N}_{x\pm}$) состоят из точек, для которых проекции кратчайших на плоскость (x, y) суть инфлекссионные, т.е. имеющие точки перегиба (соотв. неинфлекссионные, т.е. не имеющие точек перегиба) эластики, см. раздел 2.6. Для одномерных стратов \mathcal{E}_\pm соответствующие эластики замкнуты (имеют форму восьмерки, «figure-of-eight elastica»).

На Рис. 38, 39 изображены стратификации множества разреза и его пересечения с координатными подпространствами. На Рис. 38 показана топология примыкания стратов множества разреза в факторе по дилатациям Y . На Рис. 39 представлено пересечение $\operatorname{Cut} \cap \{x = z = 0\}$.

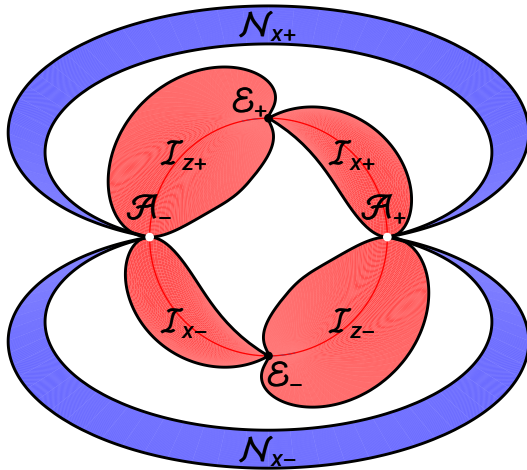


Рис. 38: Стратификация множества разреза: глобальная структура

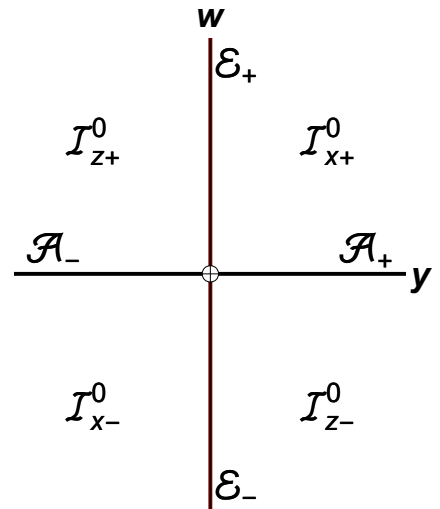


Рис. 39: Пересечение множества разреза с подпространством $\{x = z = 0\}$

На Рис. 40 изображено множество $\operatorname{Cut} \cap \{z = 0\}$ после факторизации по дилатациям Y ; фактор $\{z = 0\}/e^{\mathbb{R}Y}$ представлен топологической сферой $\{g \in G \mid x^6 + y^6 + w^2 = 1\}$. Аналогично на Рис. 41 изображен фактор $(\operatorname{Cut} \cap \{x = 0\})/e^{\mathbb{R}Y}$ на топологической сфере $\{g \in G \mid y^6 + |z|^3 + w^2 = 1\}$.

Очевидно, что в каждую точку $g_1 \in G \setminus \operatorname{Cut}$ приходит ровно одна субриманова кратчайшая. Ниже аналогичное свойство описано для точек $g_1 \in \operatorname{Cut}$.

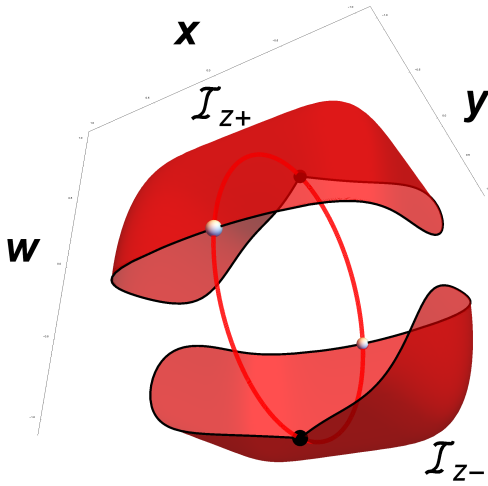


Рис. 40: Пересечение $\text{Cut} \cap \{z = 0\}$

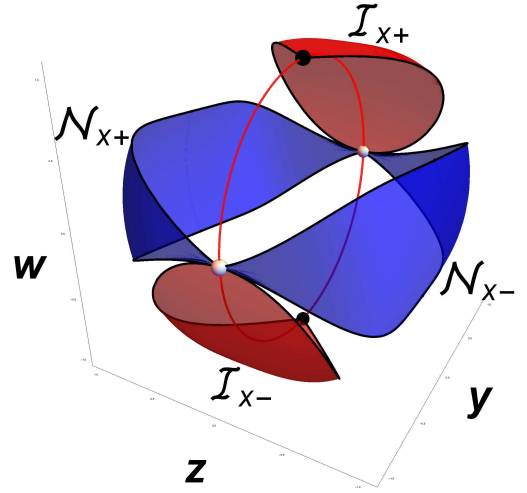


Рис. 41: Пересечение $\text{Cut} \cap \{x = 0\}$

- Теорема 2.48.** (1) В каждую точку трехмерных стратов множества разреза приходят ровно две кратчайшие (эти страты состоят из точек Максвелла, не являющихся сопряженными).
- (2) В каждую точку двумерных стратов приходит единственная кратчайшая (эти страты состоят из сопряженных точек, не являющихся точками Максвелла).
- (3) В каждую точку одномерных стратов приходит однопараметрическое семейство кратчайших (эти страты состоят из точек Максвелла, являющихся одновременно сопряженными точками).

Множество разреза незамкнуто т.к. оно содержит точки, сколь угодно близкие к начальной точке g_0 , но не саму эту точку (это общий факт субримановой геометрии). Замыкание множества разреза в субримановой задаче на группе Энгеля допускает следующее простое описание.

Теорема 2.49. $\text{cl}(\text{Cut}) = \text{Cut} \sqcup \mathcal{A}_+ \sqcup \mathcal{A}_- \sqcup \{g_0\}$.

Примыкание аномальных траекторий \mathcal{A}_\pm к стратам множества разреза изображено на Рис. 38 слева.

Теорема 2.50. Имеют место стратификации

$$\text{Cut} \cap \text{Conj} = \bigsqcup_{i \in \{+, -\}, j \in \{+, -\}} \left(\text{CT}_{zi}^j \sqcup \text{CT}_{xi}^j \sqcup \text{CN}_{xi}^j \right) \sqcup \mathcal{E}_+ \sqcup \mathcal{E}_-,$$

$$\text{Cut} \cap \text{Max} = \bigsqcup_{i \in \{+, -\}} \left(\mathcal{I}_{zi} \sqcup \mathcal{I}_{xi} \sqcup \mathcal{N}_x^i \sqcup \mathcal{E}_i \right).$$

2.9.9 Сфера

Субримановы сферы переходят друг в друга при левых сдвигах

$$L_g(S_R(g_0)) = S_R(gg_0)$$

и дилатациях

$$\delta_s(S_R(\text{Id})) = S_{R'}(\text{Id}), \quad R' = e^s R,$$

поэтому достаточно исследовать единичную сферу $S = S_1(\text{Id})$.

Единичная сфера инвариантна относительно отражений:

$$\varepsilon^i(S) = S, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Рассмотрим сечение единичной сферы двумерным инвариантным многообразием основных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\tilde{S} = \{g \in S \mid \varepsilon^1(g) = \varepsilon^2(g) = g\} = S \cap \{x = z = 0\},$$

см. Рис. 42.

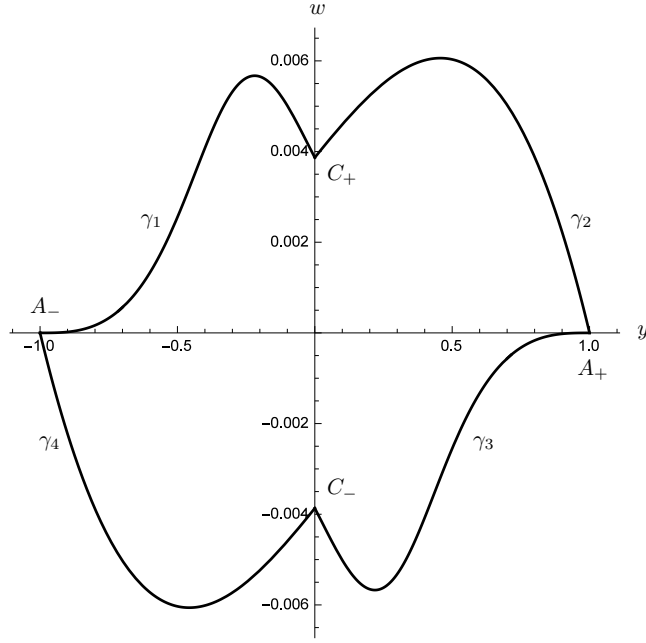


Рис. 42: Сечение сферы $\tilde{S} = S \cap \{x = z = 0\}$

Сечение \tilde{S} центрально-симметрично в силу отражения ε^4 :

$$\begin{aligned}\varepsilon^4(\gamma_i) &= \gamma_{i+2}, & i = 1, 2, \\ \varepsilon^4(A_+) &= A_-, & \varepsilon^4(C_+) = C_-.\end{aligned}$$

Различные точки сечения \tilde{S} можно охарактеризовать следующим образом:

- A_{\pm} — точки на аномальных кратчайших,
- C_{\pm} — сопряженные точки, точки Максвелла, точки разреза,
- $g \in \gamma_i$ — точки Максвелла, точки разреза.

Точки сечения \tilde{S} имеют следующую кратность μ (количество кратчайших, приходящих из Id в эту точку):

- $\mu(A_{\pm}) = 1$,
- $\mu(C_{\pm}) = \mathfrak{c}$ (континуум $\cong S^1$),
- $g \in \gamma_i \Rightarrow \mu(g) = 2$.

Теорема 2.51. *Сечение \tilde{S} имеет следующую регулярность в различных своих точках:*

- (1) кривые γ_i аналитичны и регулярны,
- (2) A_{\pm}, C_{\pm} — особые точки, в них \tilde{S} негладкая, но липшицева,
- (3) $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_+, A_+\}$ гладкая класса C^∞ ,
- (4) $\gamma_1 \cup \{C_+\}$ гладкая класса C^∞ ,
- (5) $\gamma_1 \cup \{A_-\}$ гладкая класса C^1 .

Теорема 2.52. (1) Множество $\tilde{S} \setminus \{A_+, A_-\}$ полуаналитично, потому субаналитично.

- (2) В окрестности точки A_- кривая γ_1 есть график неаналитической функции

$$w = \frac{1}{6}Y^3 - 4Y^3 \exp(-2/Y)(1 + o(1)), \quad Y = (y + 1)/2 \rightarrow 0.$$

- (3) Поэтому множество \tilde{S} неполуаналитично, следовательно, несубаналитично.

(4) Следовательно, сфера S несубаналитична.

Замечание. Утверждение о несубаналитичности сферы Энгеля S следует также из проекции сферы Энгеля на (несубаналитическую) сферу Мартине (см. раздел 2.3).

Теорема 2.53. В окрестности точки A_- кривая γ_1 есть график функции из exp-log категории:

$$w = F\left(Y, \frac{e^{-1/Y}}{Y}\right), \quad Y = (y+1)/2 \rightarrow 0,$$

где $F(\xi, \eta)$ есть аналитическая функция в окрестности точки $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Поэтому множество \tilde{S} принадлежит exp-log категории.

Теорема 2.54. Разбиение

$$\tilde{S} = \cup_{i=1}^4 \gamma_i \cup \{A_+, A_-, C_+, C_-\}$$

есть стратификация Уитни.

2.9.10 Явные выражения для субриманова расстояния

Для некоторых точек группы Энгеля известно их субриманово расстояние до единичного элемента:

- Анормальная кратчайшая $g(t) = e^{\pm t X_2}$, $x = z = w = 0$, $y = \pm t$:

$$d(\text{Id}, g(t)) = t.$$

- Центральный элемент группы $g(t) = e^{\pm t X_4}$, $x = y = z = 0$, $w = \pm t$:

$$d(\text{Id}, g(t)) = C \sqrt[3]{t},$$

$$C = \sqrt[3]{48K^2(k_0)} \approx 6,37, \quad K(k_0) - 2E(k_0) = 0, \quad k_0 \approx 0,91.$$

2.9.11 Метрические прямые

Теорема 2.55. Натурально параметризованными метрическими прямыми на группе Энгеля являются следующие геодезические (и только они):

(1) однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения:

$$e^{(u_1 X_1 + u_2 X_2)t} = \text{Exp}(\lambda, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.115)$$

$$u_1 = -\sin \theta, \quad u_2 = \cos \theta, \quad \lambda = (\theta, c = 0, \alpha) \in C_4 \cup C_5,$$

(2) критические геодезические:

$$\text{Exp}(\lambda, t), \quad \lambda \in C_3, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.116)$$

Замечание. Геодезические (2.115) проецируются на плоскость (x, y) в евклидовы прямые, из них анормальными являются только кривые

$$e^{X_2 t} = \text{Exp}(\lambda, t), \quad \lambda = (\theta = 0, c = 0, \alpha) \in C_4 \cup C_5.$$

Геодезические (2.115) проецируются на плоскость (x, y) в критические эйлеровы эластики (см. Рис. 24), так называемые солитоны Эйлера.

2.9.12 Библиографические комментарии

Разделы 2.9.1, 2.9.3, 2.9.4 опираются на [101]; раздел 2.9.2 — на [113]; раздел 2.9.5 — на [103]; разделы 2.9.6, 2.9.11 — на [104]; раздел 2.9.8 — на [105]; раздел 2.9.9 — на [106].

Параметризация субримановых геодезических на группе Энгеля впервые получена в работе [100].

2.10 Субриманова задача на группе Картана

2.10.1 Постановка задачи

Геометрическая постановка Рассмотрим следующее обобщение (усложнение) задач на группе Гейзенберга [5, 42] и группе Энгеля (раздел 2.9) — *обобщенную задачу Дидоны*. Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S , с центром масс c .

Задача оптимального управления Эту геометрическую задачу можно переформулировать как задачу оптимального управления

$$\dot{g} = u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g), \quad g = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, \quad (2.117)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.118)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \quad (2.119)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}. \quad (2.120)$$

Это субриманова задача для субримановой структуры на \mathbb{R}^5 , заданной векторными полями X_1, X_2 как ортонормированным репером.

Алгебра Картана и группа Картана Алгеброй Картана называется пятимерная свободная нильпотентная алгебра Ли \mathfrak{g} с двумя образующими, глубины 3. Существует базис $\mathfrak{g} = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$, в котором ненулевые скобки Ли суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$

см. Рис. 43.

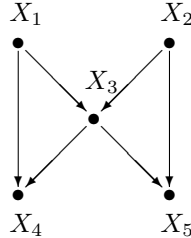


Рис. 43: Алгебра Картана

Алгебра Картана имеет градуировку $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}(X_1, X_2)$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3$, $\mathfrak{g}^{(3)} = \text{span}(X_4, X_5)$, $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}$, $\mathfrak{g}^{(4)} = \mathfrak{g}^{(5)} = \{0\}$, поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$ можно ввести закон умножения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) y_2 + x_1 z_2 \\ w_1 + w_2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) x_2 + y_1 z_2 \end{pmatrix},$$

превращающий это пространство в группу Картана: $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$, а поля (2.120) в левоинвариантные поля на этой группе. Поэтому задача (2.117)–(2.119) есть левоинвариантная субриманова задача на группе Картана. Следовательно, можно считать, что $g_0 = \text{Id} = (0, \dots, 0)$.

Помимо модели (2.120), известны и другие модели субримановой задачи на группе Картана [112, 113, 187].

Левоинвариантная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5) на группе Картана единственна, с точностью до изоморфизма этой группы [113].

Особенности задачи Субриманова задача на группе Картана есть простейшая левоинвариантная задача со следующими свойствами:

- она имеет аномальные кратчайшие, касающиеся каждого вектора распределения,
- это следующая по сложности после задачи Дидоны задача на свободной группе Карно максимального роста (ее вектор роста равен (2, 3, 5)).

Эта задача — единственная свободная нильпотентная субриманова задача глубины 3 с интегрируемым по Лиувиллю нормальным гамильтоновым полем принципа максимума Понтрягина (неинтегрируемые по Лиувиллю являются свободные нильпотентные задачи глубины 3, ранга более 2 [122], а также глубины более 3, ранга не менее 2 [119]).

Распределение $\Delta = \text{span}(X_1, X_2)$ имеет 14-мерную алгебру инфинитезимальных симметрий — особую алгебру \mathfrak{g}_2 , этот факт восходит к знаменитой пятимерной работе Эли Картана [107], см. также далее п. 2.10.2.

Наконец, субриманова задача на группе Картана доставляет нильпотентную аппроксимацию любой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$, в частности:

- задачи о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [188–190],
- машины с двумя прицепами [158],
- задачи о движении электрического заряда в плоскости под действием магнитного поля [187].

Любой из этих причин достаточно для детального исследования субримановой задачи на группе Картана.

2.10.2 Симметрии распределения и субримановой структуры

Теорема 2.56. *Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий распределения Δ на группе Картана есть 14-мерная алгебра \mathfrak{g}_2 — некомпактная вещественная форма комплексной особой алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$.*

Теорема 2.57. *Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий нильпотентной субримановой структуры на группе Картана есть 6-мерная алгебра Ли, в которой можно выбрать базис X_0, Y_1, \dots, Y_5 с ненулевыми скобками*

$$\begin{aligned} [X_0, Y_1] &= -Y_2, & [X_0, Y_2] &= Y_1, \\ [X_0, Y_4] &= -Y_5, & [X_0, Y_5] &= Y_4, \\ [Y_1, Y_2] &= Y_3, \\ [Y_1, Y_3] &= Y_4, & [Y_2, Y_3] &= Y_5. \end{aligned}$$

Векторные поля Y_1, \dots, Y_5 — правоинвариантные поля на группе G , а поле X_0 обращается в нуль в единице этой группы. Коммутаторы симметрий с базисными полями субримановой структуры имеют вид:

$$\begin{aligned} [Y_i, X_j] &= 0, \quad i, j = 1, \dots, 5, \\ [X_0, X_1] &= -X_2, & [X_0, X_2] &= X_1, & [X_0, X_3] &= 0, \\ [X_0, X_4] &= -X_5, & [X_0, X_5] &= X_4. \end{aligned}$$

В модели (2.120)

$$X_0 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}.$$

Представление алгебры Ли симметрий распределения и субримановой структуры векторными полями в \mathbb{R}^5 приведено в работе [113].

2.10.3 Геодезические

Существование оптимальных управлений в задаче (2.117)–(2.119) следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

Принцип максимума Понтрягина Переходя от минимизации длины (2.119) к минимизации энергии $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt$ и используя линейные на слоях T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, \dots, 5$,

получаем условия принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -u_2 h_3, \\
\dot{h}_2 &= u_1 h_3, \\
\dot{h}_3 &= u_1 h_4 + u_2 h_5, \\
\dot{h}_4 &= 0, \\
\dot{h}_5 &= 0, \\
\dot{g} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, \\
u_1 h_1 + u_2 h_2 + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) &\rightarrow \max_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2}, \\
\nu &\leq 0, \\
(h_1, \dots, h_5, \nu) &\neq 0.
\end{aligned}$$

Аномальные экстремали Аномальные экстремали постоянной скорости могут быть параметризованы как

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0, \quad (h_4, h_5) \equiv \text{const} \neq 0,$$

$$(u_1, u_2) \equiv \text{const},$$

$$x = u_1 t, \tag{2.121}$$

$$y = u_2 t, \tag{2.122}$$

$$z = 0, \tag{2.123}$$

$$v = (u_1^2 + u_2^2)u_1 t^3 / 6, \tag{2.124}$$

$$w = -(u_1^2 + u_2^2)u_2 t^3 / 6. \tag{2.125}$$

Аномальные траектории (2.121)–(2.125) суть однопараметрические подгруппы $g_t = e^{t(u_1 X_1 + u_2 X_2)}$, касающиеся распределения Δ . Они проецируются на плоскость (x, y) в прямые, потому являются кратчайшими.

Аномальное множество есть двумерное гладкое многообразие, диффеоморфное \mathbb{R}^2 :

$$\text{Abn} = \{g \in G \mid z = v - (x^2 + y^2)x/6 = w + (x^2 + y^2)y/6 = 0\}.$$

Нормальные экстремали Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*G, \tag{2.126}$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Введем на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ координаты $(\theta, c, \alpha, \beta) \in S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times S^1$:

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha \sin \beta, \quad h_5 = -\alpha \cos \beta, \tag{2.127}$$

тогда гамильтонова система (2.126) примет форму

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0, \tag{2.128}$$

$$\dot{g} = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2. \tag{2.129}$$

Вертикальная подсистема (2.128) есть уравнение маятника.

Проекция нормальных геодезических на плоскость (x, y) суть эйлеровы эластики, см. раздел 2.6.

Аномальные кратчайшие (2.121)–(2.125) удовлетворяют нормальной гамильтоновой системе (2.128), (2.129) при $\theta = \beta, c = 0$, поэтому они нестрого аномальны.

Симплектическое слоение и функции Казимира На коалгебре Ли \mathfrak{g}^* существуют 3 независимые функции Казимира:

$$h_4, \quad h_5, \quad E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4.$$

Симплектическое слоение на \mathfrak{g}^* состоит из:

- 2-мерных параболических цилиндров

$$\{h_4 = \text{const}, \quad h_5 = \text{const}, \quad E = \text{const}, \quad h_4^2 + h_5^2 \neq 0\},$$

- 2-мерных аффинных плоскостей

$$\{h_4 = h_5 = 0, \quad h_3 = \text{const} \neq 0\},$$

- точек

$$\{h_1 = \text{const}, \quad h_2 = \text{const}, \quad h_3 = h_4 = h_5 = 0\}.$$

Размерность симплектических листов не больше 2, поэтому вертикальная подсистема (2.128) интегрируема по Лиувиллю.

Параметризация нормальных геодезических Семейство нормальных экстремалей на поверхности уровня $\{H = \frac{1}{2}\}$ параметризуется начальными точками, принадлежащими цилиндру

$$C = \mathfrak{g}^* \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\}.$$

Этот цилиндр стратифицируется в зависимости от разных типов траекторий маятника (2.128):

$$C = \bigsqcup_{i=1}^7 C_i,$$

$$C_1 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, \quad E \in (-\alpha, \alpha)\},$$

$$C_2 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, \quad E \in (\alpha, +\infty)\},$$

$$C_3 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, \quad E = \alpha, \quad \theta - \beta \neq \pi\},$$

$$C_4 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, \quad E = -\alpha\},$$

$$C_5 = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, \quad E = \alpha, \quad \theta - \beta = \pi\},$$

$$C_6 = \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, \quad c \neq 0\},$$

$$C_7 = \{\lambda \in C \mid \alpha = c = 0\}.$$

Для параметризации нормальных геодезических введем на стратах C_1, C_2, C_3 эллиптические координаты $(\varphi, k, \alpha, \beta)$, в которых уравнение маятника (2.128) выпрямляется: если $\lambda \in C_1$, то

$$k = \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \in (0, 1),$$

$$\varphi \in [0, 4K],$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = k\sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \end{cases}$$

если $\lambda \in C_2$, то

$$k = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}}} \in (0, 1),$$

$$\varphi \in [0, 2kK],$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \end{cases}$$

$$\pm = \operatorname{sgn} c,$$

$$\psi = \frac{\varphi}{k},$$

если $\lambda \in C_3$, то

$$k = 1,$$

$$\varphi \in (-\infty, +\infty),$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}, \end{cases}$$

$$\pm = \operatorname{sgn} c.$$

Тогда

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0.$$

Задача инвариантна относительно левых сдвигов на группе Картана, дилатаций

$$\begin{aligned} e^{sY} : (t, x, y, z, v, w) &\mapsto (e^s t, e^s x, e^s y, e^{2s} z, e^{3s} v, e^{3s} w), \\ (\theta, c, \alpha, \beta) &\mapsto (\theta, e^{-s} c, e^{-2s} \alpha, \beta), \\ (\varphi, k, \alpha, \beta) &\mapsto (e^s \varphi, k, e^{-2s} \alpha, \beta), \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned}$$

и вращений

$$e^{rX_0} : (x, y, z, v, w) \mapsto (x \cos r - y \sin r, x \sin r + y \cos r, z, v \cos r - w \sin r, v \sin r + w \cos r). \quad (2.130)$$

С помощью вращений и дилатаций любой ковектор $\lambda = (\varphi, k, \alpha, \beta) \in \cup_{i=1}^3 C_i$ переводится в фундаментальное множество $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$. При $\alpha = 1, \beta = 0, \lambda \in \cup_{i=1}^3 C_i$, геодезические $g_t = (x_t, y_t, z_t, v_t, w_t)$ параметризуются следующим образом.

Если $\lambda \in C_1$, то

$$\begin{aligned} x_t &= 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - (\varphi_t - \varphi), \\ y_t &= 2k(\operatorname{cn} \varphi - \operatorname{cn} \varphi_t), \\ z_t &= 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) - k(\operatorname{cn} \varphi + \operatorname{cn} \varphi_t)x_t, \\ v_t &= 2k \operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t x_t - k \operatorname{cn} \varphi_t x_t^2 - (1 - 2k^2 + 2k^2 \operatorname{cn} \varphi \operatorname{cn} \varphi_t)y_t, \\ w_t &= -\frac{1}{6} (x_t^3 + 2(2k^2 - 1 + 6k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi)x_t + 2(\varphi_t - \varphi) \\ &\quad + 8k^2(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) \\ &\quad - 24k^2 \operatorname{cn} \varphi(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi)), \end{aligned}$$

где $\varphi_t = \varphi + t$.

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2}{k} \left(E(\psi_t) - E(\psi) - \frac{2 - k^2}{2} (\psi_t - \psi) \right), \\ y_t &= \pm \frac{2}{k} (\operatorname{dn} \psi - \operatorname{dn} \psi_t), \\ z_t &= \pm \left(2(\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) - \frac{1}{k} (\operatorname{dn} \psi + \operatorname{dn} \psi_t)x_t \right), \\ v_t &= \pm \left(2 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t x_t - \frac{1}{k} \operatorname{dn} \psi_t x_t^2 \right) + \frac{1}{k^2} (2 - k^2 - 2 \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t)y_t, \\ w_t &= -\frac{1}{6} \left(x_t^3 + \frac{2}{k^2} (2 - k^2 + 6 \operatorname{dn}^2 \psi)x_t + 2k(\psi_t - \psi) \right. \\ &\quad + \frac{8}{k} (\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi) \\ &\quad \left. - \frac{24}{k} \operatorname{dn} \psi (\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) \right), \\ \pm &= \operatorname{sgn} c, \end{aligned}$$

где $\psi_t = \psi + \frac{t}{k}$.

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\begin{aligned}
x_t &= 2(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi) - (\varphi_t - \varphi), \\
y_t &= \pm 2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right), \\
z_t &= \pm \left(2 \left(\frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right) x_t \right), \\
v_t &= \pm \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \varphi_t} x_t - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} x_t^2 \right) + \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_t} \right) y_t, \\
w_t &= -\frac{1}{6} \left(x_t^3 + 6 \frac{2 + \operatorname{ch}^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} x_t + 6(\varphi_t - \varphi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{24}{\operatorname{ch} \varphi} \left(\frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - 8(\operatorname{th}^3 \varphi_t - \operatorname{th}^3 \varphi) \right), \\
\pm &= \operatorname{sgn} c,
\end{aligned}$$

где $\varphi_t = \varphi + t$.

Параметризация геодезических при произвольных $\lambda = (\varphi, k, \alpha, \beta) \in \cup_{i=1}^3 C_i$ получается из случая $\alpha = 1$, $\beta = 0$ с помощью вращений и дилатаций:

$$\begin{aligned}
g_t(\varphi, k, \alpha, \beta) &= e^{-rX_0} \circ e^{-sY} (g_{t'}(\varphi', k, \alpha' = 1, \beta' = 0)), \\
t' &= t\sqrt{\alpha}, \quad \varphi' = \varphi\sqrt{\alpha}, \quad r = -\beta, \quad s = \frac{1}{2} \ln \alpha.
\end{aligned}$$

В оставшихся случаях $\lambda = (\theta, c, \alpha, \beta) \in \cup_{i=4}^7 C_i$ геодезические параметризуются элементарными функциями.

Если $\lambda = (\theta, c, \alpha, \beta) \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$ и $\beta = 0$, то

$$(x_t, y_t, z_t, v_t, w_t) = (t, 0, 0, 0, -t^3/6).$$

В общем случае $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$

$$g_t(\theta, c, \alpha, \beta) = e^{-rX_0} (g_t(\theta', c, \alpha, \beta' = 0)), \quad \theta' = \theta - \beta, \quad r = -\beta.$$

Если $\lambda = (\theta = 0, c, \alpha = 0) \in C_6$, то

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{\sin \tau}{c}, \\
y_t &= \frac{1 - \cos \tau}{c}, \\
z_t &= \frac{\tau - \sin \tau}{2c^2}, \\
v_t &= \frac{\cos 2\tau - 4 \cos \tau + 3}{4c^3}, \\
w_t &= \frac{\sin 2\tau - 4 \sin \tau + 2\tau}{4c^3}, \\
\tau &= ct.
\end{aligned}$$

В общем случае $\lambda \in C_6$

$$g_t(\theta, c, \alpha = 0, t) = e^{\theta X_0} (g_t(\theta' = 0, c, \alpha = 0, t)).$$

Семейство всех геодезических параметризуется экспоненциальным отображением

$$\operatorname{Exp} : (\lambda, t) \mapsto g_t = \pi \circ e^{t\bar{H}}(\lambda), \quad C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G.$$

2.10.4 Симметрии и страты Максвелла

Непрерывные симметрии Дилатации и вращения образуют двухпараметрическую группу непрерывных симметрий экспоненциального отображения.

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы

$$h_0(\lambda) = \langle \lambda, X_0(g) \rangle, \quad h_Y(\lambda) = \langle \lambda, Y(g) \rangle, \quad \lambda \in T^*G,$$

и соответствующие гамильтоновы векторные поля:

$$\vec{h}_0, \vec{h}_Y \in \text{Vec}(T^*G).$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{h}_0, \vec{H}] &= 0, & \vec{h}_0 H &= 0, \\ [\vec{h}_Y, \vec{H}] &= -2\vec{H}, & \vec{h}_Y H &= -2H. \end{aligned}$$

Обозначим также вертикальное эйлерово поле на T^*G : $e = \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}$. Так как гамильтониан H квадратичен на слоях, гамильтоново поле \vec{H} линейно на слоях, поэтому

$$[e, \vec{H}] = \vec{H}, \quad eH = 2H.$$

Следовательно, векторное поле $Z = \vec{h}_Y + e$ удовлетворяет равенствам

$$[Z, \vec{H}] = -\vec{H}, \quad ZH = 0.$$

Более того,

$$[\vec{h}_0, Z] = 0.$$

Предложение 2.12. Для любых $t, s, r \in \mathbb{R}$, $\lambda \in T^*G$

$$e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t'\vec{H}} \circ e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda), \quad \text{где } t' = te^r.$$

Дискретные симметрии Вертикальная подсистема (2.128) факторизуется по вращениям X_0 и дилатациям Y в стандартное уравнение маятника

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\sin \theta, \quad (\theta, c) \in S^1 \times \mathbb{R}.$$

Поле направлений этого уравнения имеет очевидные дискретные симметрии — отражения в координатных осях и в начале координат

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 &: (\theta, c) \mapsto (\theta, -c), \\ \varepsilon^2 &: (\theta, c) \mapsto (-\theta, c), \\ \varepsilon^3 &: (\theta, c) \mapsto (-\theta, -c). \end{aligned}$$

Эти отражения порождают группу диэдра

$$D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Действие отражений естественно продолжается на эйлеровы эластички (x_t, y_t) , так что по модулю вращений в плоскости (x, y) :

- ε^1 есть отражение эластички в центре ее хорды,
- ε^2 есть отражение эластички в серединном перпендикуляре ее хорды,
- ε^3 есть отражение эластички в ее хорде.

Действие отражений также естественно продолжается в прообраз экспоненциального отображения:

$$\varepsilon^i : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, 3,$$

и в его образ:

$$\varepsilon^i : G \rightarrow G, \quad i = 1, 2, 3,$$

так что

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, 3.$$

В явном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 &: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^1, c^1, \alpha, \beta^1, t) = (\theta_t, -c_t, \alpha, \beta, t), \\ \varepsilon^2 &: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t) = (-\theta_t, c_t, \alpha, -\beta, t), \\ \varepsilon^3 &: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^3, c^3, \alpha, \beta^3, t) = (-\theta, -c, \alpha, -\beta, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz), \\
\varepsilon^2 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz), \\
\varepsilon^3 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w).
\end{aligned}$$

Группа Sym симметрий экспоненциального отображения состоит из вращений, отражений и их композиций:

$$\begin{aligned}
e^{s\vec{h}_0}, \quad e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^i &: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \\
e^{sX_0}, \quad e^{sX_0} \circ \varepsilon^i &: G \rightarrow G.
\end{aligned}$$

Теорема 2.58. Пусть $\lambda \in C$. Первое время Максвелла, соответствующее группе Sym симметрий экспоненциального отображения, для почти всех геодезических $\text{Exp}(\lambda, t)$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda \in C_1 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = \min\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}}p_1^z(k), \frac{2}{\sqrt{\alpha}}p_1^V(k)\right), \\
\lambda \in C_2 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}}p_1^V(k), \\
\lambda \in C_6 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = \frac{4}{|c|}p_1^V(0), \\
\lambda \in C_i, \quad i = 3, 4, 5, 7 &\Rightarrow t_{\text{MAX}}^1(\lambda) = +\infty.
\end{aligned}$$

Здесь $p = p_1^z(k) \in (K, 3K)$ есть первый положительный корень функции

$$f_z(p, k) = \text{sn } p \text{ dn } p - (2E(p) - p) \text{ cn } p,$$

$p = p_1^V(k)$ есть первый положительный корень функции

$$\begin{aligned}
f_V(p) &= \frac{4}{3} \text{sn } p \text{ dn } p (-p - 2(1 - 2k^2 + 6k^2 \text{cn } p^2)(2E(p) - p) + (2E(p) - p)^3 \\
&\quad + 8k^2 \text{cn } p \text{ sn } p \text{ dn } p) + 4 \text{cn } p (1 - 2k^2 \text{sn } p^2)(2E(p) - p)^2, \\
p_1^V(k) &\in [2K, 4K) \quad \text{при } \lambda \in C_1,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
f_V(p) &= \frac{4}{3} \{3 \text{dn } p (2E(p) - (2 - k^2)p)^2 + \text{cn } p [8E^3(p) - 4E(p)(4 + k^2) \\
&\quad - 12E^2(p)(2 - k^2)p + 6E(p)(2 - k^2)^2p^2 \\
&\quad + p(16 - 4k^2 - 3k^4 - (2 - k^2)^3p^2)] \text{sn } p - \\
&\quad - 2 \text{dn } p (-4k^2 + 3(2E(p) - (2 - k^2)p)^2) \text{sn } p^2 + \\
&\quad + 12k^2 \text{cn } p (2E(p) - (2 - k^2)p) \text{sn } p^3 - 8k^2 \text{sn } p^4 \text{dn } p\}, \\
p_1^V(k) &\in (K, 2K) \quad \text{при } \lambda \in C_2,
\end{aligned}$$

а $p = p_1^V(0) \in (\pi/2, \pi)$ есть первый положительный корень функции

$$f_V^0(p) = [(32p^2 - 1) \cos 2p - 8p \sin 2p + \cos 6p]/512.$$

Замечание. Для тех геодезических, для которых первое время Максвелла, соответствующее группе симметрий Sym, не равно t_{MAX}^1 , оно больше этого значения, а t_{MAX}^1 есть первое сопряженное время.

Теорема 2.59. Функция $t_{\text{MAX}}^1 : C \rightarrow (0, +\infty]$ имеет следующие свойства инвариантности:

- (1) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ зависит только от значений E и $|\alpha|$,
- (2) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ есть первый интеграл поля \vec{H}_v ,
- (3) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ инвариантна относительно отражений: если $(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+$, $(\lambda^i, t) = \varepsilon^i(\lambda, t)$, то $t_{\text{MAX}}^1(\lambda^i) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$,
- (4) $t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ однородна относительно дилатаций: если $\lambda \in C$, $\lambda_s = \delta_s(\lambda) \in C$, то $t_{\text{MAX}}^1(\lambda_s) = e^s t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$, $s \in \mathbb{R}$.

2.10.5 Нижняя оценка сопряженного времени

Теорема 2.60. Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

2.10.6 Время разреза и кратчайшие

Теорема 2.61. Для любого $\lambda \in C$

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda).$$

Теорема 2.62. Пусть $g_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1, w_1) \in G$. Если $z_1 \neq 0$ и $x_1 v_1 + y_1 w_1 - (x_1^2 + y_1^2) z_1 / 2 \neq 0$, то существует единственная кратчайшая, соединяющая $g_0 = \text{Id}$ с g_1 .

2.10.7 Метрические прямые

Теорема 2.63. Натурально параметризованными метрическими прямыми на группе Картана являются следующие геодезические (и только они):

(1) однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения:

$$\begin{aligned} e^{t(u_1 X_1 + u_2 X_2)} &= \text{Exp}(\lambda, t), \\ u_1 &= \cos \theta, \quad u_2 = \sin \theta, \quad \lambda = (\theta, c = 0, \alpha, \beta) \in C_4 \cup C_5 \cup C_7, \end{aligned} \tag{2.131}$$

(2) критические геодезические

$$\text{Exp}(\lambda, t), \quad \lambda \in C_3. \tag{2.132}$$

Замечание. Геодезические (2.131) проецируются на плоскость (x, y) в евклидовы прямые, а геодезические (2.132) — в критические эйлеровы эластики (см. Рис. 24), так называемые солитоны Эйлера.

2.10.8 Библиографические комментарии

Субриманова задача на группе Картана впервые рассматривалась в работе Р. Брокетта и Л. Даи [112], где показана интегрируемость геодезических в эллиптических функциях.

Разделы 2.10.1, 2.10.3 опираются на [108]; раздел 2.10.2 — на [113]; раздел 2.10.4 — на [109–111]; раздел 2.10.5 — на [114]; разделы 2.10.6, 2.10.7 — на [115].

3 Вместо заключения: некоторые неохваченные вопросы

Некоторые вопросы, близкие к рассмотренным выше, остались неохваченными из-за большого объема обзора. Перечислим их здесь:

1. левоинвариантные субфинслеровы задачи [123–137],
2. левоинвариантные сублоренцевы задачи [138–142],
3. левоинвариантные субримановы задачи с неинтегрируемым геодезическим потоком [118–122],
4. приложения левоинвариантных задач к нильпотентной аппроксимации и конструктивному решению двухточечной задачи управления [145–164],
5. приложения левоинвариантных задач к обработке изображений и моделям зрения [165–181],
6. приложения левоинвариантных задач к робототехнике [182–186].

Список иллюстраций

1	Сфера в плоском случае Мартине	9
2	Пересечение сферы с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$	10
3	Неинфлексионная кривая $(x_t, y_t): \lambda \in C_1$	14
4	Инфлексионная кривая $(x_t, y_t): \lambda \in C_2$	14
5	Трактриса $(x_t, y_t): \lambda \in C_3$	14
6	Множество разреза в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)	17
7	Множество разреза в $SE(2)$	17
8	Субриманова сфера $S_{\pi/2} \subset SE(2)$	17
9	Субриманова сфера $S_{\pi} \subset SE(2)$	18
10	Субриманова сфера $S_{3\pi/2} \subset SE(2)$	18
11	Множество разреза на $SH(2)$	24
12	Первая каустика и множество разреза на $SH(2)$	25
13	Сфера $S_{\pi} \subset SH(2)$	25
14	Сфера $S_{2\pi} \subset SH(2)$	25
15	Пересечение полусферы $S_{\pi} \cap \{z < 0\}$ со множеством разреза	26
16	Пересечение полусферы $S_{2\pi} \cap \{z < 0\}$ со множеством разреза	26
17	Эластики Эйлера	28
18	Постановка задачи об эластике Эйлера	29
19	Инфлексионная эластика	33
20	Прямоугольная эластика	33
21	Инфлексионная эластика	33
22	Эластика-восьмерка	33
23	Инфлексионная эластика	33
24	Критическая эластика	33
25	Неинфлексионная эластика	34
26	Эластики, центрированные в вершине	35
27	Эластики, центрированные в вершине	35
28	Эластики, центрированные в точке перегиба	36
29	Две оптимальные несимметричные эластики с одинаковыми граничными условиями	37
30	Оптимальные эластики для $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$	37
31	Оптимальные эластики для $x_1 < 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$	37
32	Оптимальная эластика -«капля» для $x_1 = 0, y_1 = 0, \theta_1 = \pi$	37
33	Оптимальные эластики для $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0, x_1 \in (0, x_*)$	38
34	Оптимальные эластики для $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0, x_1 \in (x_*, 1)$	38
35	Оптимальные эластики для $x_1 > 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0, x_1 = x_*$	38
36	Оптимальные эластики для $x_1 < 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0$	39
37	Алгебра Энгеля	52
38	Стратификация множества разреза: глобальная структура	59
39	Пересечение множества разреза с подпространством $\{x = z = 0\}$	59
40	Пересечение $Cut \cap \{z = 0\}$	60
41	Пересечение $Cut \cap \{x = 0\}$	60
42	Сечение сферы $\tilde{S} = S \cap \{x = z = 0\}$	61
43	Алгебра Картана	63

Список литературы

- [1] А.А. Аграчев, Некоторые вопросы субримановой геометрии, *Успехи математических наук*, 71:6 (432), 2016, 3–36.
- [2] А.А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.
- [3] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, *Оптимальное управление*, Физматлит, 2005.
- [4] Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, М.: Мир, 1986.
- [5] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНТИ, Москва, 1987, 5–85.
- [6] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные задачи и геометрия распределений*. Добавление к книге [4], с. 318–349.
- [7] М.И. Зеликин, *Оптимальное управление и вариационное исчисление*, М.: URSS, 2014.
- [8] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [9] Сачков Ю.Л. Теория управления на группах Ли, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007, т. 27, 5–59.
- [10] Сачков Ю.Л. *Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах*. —М.: Физматлит, 2007.
- [11] Сачков Ю.Л. *Введение в геометрическую теорию управления*, М.: URSS, 2021, 160 С.
- [12] Agrachev A.A., Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems. In: *Nonlinear and Optimal Control Theory, Lecture Notes in Mathematics*. CIME, 1932, Springer Verlag, 2008, 1-59.
- [13] A. A. Agrachev. *Some open problems*, pp. 1–13. Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [14] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019
- [15] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze, Symplectic geometry for optimal control, Nonlinear controllability and optimal control, *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, vol. 133, Dekker, New York, 1990, pp. 263–277.
- [16] A. Bellaïche, J. Risler, Eds., *Sub-Riemannian geometry*. Birkhäuser, Progress in Math., 1996, v.144
- [17] A. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Volume 24, Springer, 2003.
- [18] U. Boscain, B. Piccoli, Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. Springer SMAI, v.43, 2004.
- [19] R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Eds., *Differential geometric control theory*. Birkhäuser Boston, 1983
- [20] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [21] Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne, Geneva, 1744.
- [22] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [23] B. Jakubczyk, W. Respondek, Eds., *Geometry of feedback and optimal control*. Marcel Dekker, 1998
- [24] Frédéric Jean. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.
- [25] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.

- [26] Velimir Jurdjevic. Optimal control and geometry: integrable systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [27] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002
- [28] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [29] L. Rifford. *Sub-Riemannian geometry and Optimal Transport*. SpringerBriefs in Mathematics, 2014.
- [30] E. D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [31] H. J. Sussmann, Ed., Nonlinear controllability and optimal control. Marcel Dekker, 1990
- [32] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Basel: Birkhauser, 1994.
- [33] В.М. Тихомиров, *Рассказы о максимумах и минимумах*, М.: МЦНМО, 2006
- [34] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.: УРСС, 2002.
- [35] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, М.: Мир, 1987.
- [36] Krantz S. G., Parks H. R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkhauser, 2001.
- [37] D. F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Springer, 1989
- [38] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М.: Наука, 1970.
- [39] Н.Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, М.: Мир, 1965.
- [40] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с.
- [41] А.Ф. Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, *Вестник Московского университета, Сер. мат., мех., астрон., физ., хим.*, 1959, No. 2, 25–32.
- [42] Ю.Л. Сачков, Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях, *УМН*, 77:1(463) (2022), 109–176.
- [43] A.Agrachev, D. Barilari, Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups. *J. Dynamical and Control Systems*, 2012, v.18, 21–44
- [44] U. Boscain, F. Rossi. “Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces”, *SIAM J. Control Optim.*, 47 (2008), pp. 1851–1878
- [45] И. Ю. Бесчастный, Ю. Л. Сачков, “Геодезические в субримановой задаче на группе $SO(3)$ ”, *Матем. сб.*, 207:7 (2016), 29–56
- [46] I. Beschastnyi, A. Medvedev, Left-invariant Sub-Riemannian Engel structures: abnormal geodesics and integrability, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2018, 56 (5), 3524–3537.
- [47] A.Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. *J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1997, v.2, 377–448
- [48] В. Н. Берестовский, “Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости”, *Сиб. матем. журн.*, 35:6 (1994), 1223–1229
- [49] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399.
- [50] Yu. L. Sachkov, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039.
- [51] Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.
- [52] A. Ardentov, G. Bor, E. Le Donne, R. Montgomery, Yu. Sachkov, Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry, *Nonlinearity*, 34 (2021) 4661–4683.

- [53] Ю.Л. Сачков, Однородные субримановы геодезические на группе движений плоскости, *Дифференциальные уравнения*, 2021, том 57, No. 11, с. 1568–1572.
- [54] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Parametrization of Extremal Trajectories in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 3 (July), 341–364.
- [55] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata and conjugate points in sub-Riemannian problem on the group SH(2), *Journal of Dynamical and Control Systems*, 22 (2016), 747–770
- [56] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2), *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23 (2017), 155–195
- [57] А.А.Ардентов, Ю.Л.Сачков. Решение задачи Эйлера об эластиках. *Автоматика и телемеханика*, 2009, No. 4, 78–88.
- [58] Ляв А. Математическая теория упругости. Москва-Ленинград: ОНТИ, 1935.
- [59] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик, *Доклады Академии Наук*, том 417, No. 1, ноябрь 2007, С. 23–25.
- [60] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии Наук. Приложение I. «Об упругих кривых». Москва-Ленинград: ГТТИ, 1934. С. 447-572.
- [61] Сачков Ю.Л., Левяков С.В. Устойчивость инфлекссионных эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба, *Труды МИАН*, 2010, Т. 271, 187–203.
- [62] S.S.Antman, The influence of elasticity on analysis: Modern developments, *Bulletin American Math. Society*, 1983, v. 9, No. 3, 267–291.
- [63] D.Bernoulli, 26th letter to L. Euler (October, 1742), In: Fuss, *Correspondance mathématique et physique*, t.2, St. Petersburg, 1843.
- [64] J.Bernoulli, Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la demonstration de la corbure des corps qui font ressort, In: *Collected works*, t.2, Geneva, 1744.
- [65] Birkhoff G., de Boor C.R. Piecewise polynomial interpolation and approximation // Approximation of Functions. Proc. Sympos. General Motors Res. Lab., 1964. Elsevier. Amsterdam: 1965. P. 164-190.
- [66] Max Born. Stabilitat der elastischen Linie in Ebene und Raum. Preisschrift Und Dissertation, 1: 5–101, 1906.
- [67] V.Jurdjevic, Non-Euclidean elastica, *Am. J. Math.*, v. 117 (1995), 93–125.
- [68] Levien R. The elastica: a mathematical history // Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, 2008, P. 1–25.
- [69] R.S.Manning, J.H.Maddocks, J.D.Kahn, A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure, *J. Chem. Phys.* v. 105 (1996), 5626–5646.
- [70] R.S.Manning, K.A.Rogers, J.H.Maddocks, Isoperimetric conjugate points with application to the stability of DNA minicircles, *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 454 (1998), 3047–3074.
- [71] A. Mashtakov, A. Ardentov, Yu. Sachkov, Relation between Euler’s elasticae and sub-Riemannian geodesics on SE(2), *Regular and Chaotic Dynamics*, December 2016, Volume 21, Issue 7, pp 832–839.
- [72] D.Mumford, Elastica and computer vision, In: *Algebraic geometry and its applications*, C.L.Bajaj, Ed., Springer-Verlag, New-York, 1994, 491–506.
- [73] L.Saalschütz, *Der belastete Stab*, Leipzig, 1880.
- [74] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler’s elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), pp. 169–234.
- [75] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler’s elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 14 (2008), No. 3 (July).

- [76] Yu. Sachkov, Closed Euler Elasticae, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, V. 278 (2012), 218–232.
- [77] Yu. L. Sachkov, E.Sachkova, Exponential mapping in Euler’s elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 4, 443–464.
- [78] S.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New-York, 1953.
- [79] C.Truesdell, The Influence of Elasticity on Analysis: The Classic Heritage, *Bulletin American Math. Society*, 1983, v. 9, No. 3, 293–310.
- [80] A. G. Greenhill, *The applications of elliptic functions* (New York, Macmillan, 1892).
- [81] R. Frisch Fay, *Flexible Bars*, Butterworths, London (1962).
- [82] K.E. Bisshopp, D.C. Drucker, Large deflection of cantilever beams. *Quart. Appl. Math.* 3 (1945) 272-275.
- [83] T. J. Lardner, A note on the elastica with large loads, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 21. No. 1. pp. 21-26, 1985.
- [84] C. Y. Wang, Post-buckling of a clamped-simply supported elastica, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 32. No. 6, pp. I 115-l 122, 1997.
- [85] D. E. Panayotounakos, P. S. Theocaris, Analytic solutions for nonlinear differential equations describing the elastica of straight bars : Theory, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 325, No. 5, pp. 621-633, 1988.
- [86] P. Seide. Large deflections of a simply supported beam subjected to moment at one end, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 51, 519-525, 1984.
- [87] M. S. El Naschie, Thermal initial post buckling of the extensional elastica, *Int. J. Mechanical Science*, 1976, Vol. 18, pp. 321-324.
- [88] I. H. Stampouloglou, E. E. Theotokoglou, P. N. Andriotaki , Asymptotic solutions to the non-linear cantilever elastica, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 40 (2005) 1252 - 1262.
- [89] N. J. Glassmaker, C. Y. Hui, Elastica solution for a nanotube formed by self-adhesion of a folded thin film, *J. Appl. Physics*, V. 96, N. 6, 3429-3434.
- [90] T. Tang, N. J. Glassmaker, On the inextensible elastica model for the collapse of nanotubes, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2009, doi:10.1177/1081286509105923.
- [91] Y. Mikata, Complete solution of elastica for a clamped-hinged beam, and its applications to a carbon nanotube, *Acta Mechanica* 190, 133-150 (2007).
- [92] Van der Heijden, G.H.M., Neukirch, S., Goss, V.G.A., Thompson, J.M.T.: Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. *Int. J. Mech. Sci.* 45, 161-196 (2003).
- [93] Маштаков А.П., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Математический сборник* (2011), Т. 202, No. 9, С. 97–120.
- [94] Сачков Ю.Л. Симметрии и страты Максвелла и симметрии в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Мат. Сборник*, 2010, Т. 201, N 7, С. 99–120.
- [95] A.M. Arthurs, G.R.Walsh, On the Hammersley’s minimum problem for a rolling sphere, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 99 (1986), 529–534.
- [96] Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry S., Planning motions of rolling surfaces// IEEE Conf. on Decision and Control, 1995
- [97] J.M. Hammersley, Oxford commemoration ball, *Probability, Statistics and Analysis* (London Math. Soc. lecture notes), 79 (1983), 112–142.
- [98] V. Jurdjevic, The geometry of the plate-ball problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 124 (1993), 305–328.
- [99] И. Ю. Бесчастный, Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания, *Матем. сб.*, 205:2 (2014), 3–38
- [100] Вершик А.М., Граничина О.А., Редукция неголономных вариационных задач к изопериметрическим и связности в главных расслоениях, *Мат. заметки* (1991), Т. 202, No. 11, С. 37–44.

- [101] Ардентов А. А., Сачков Ю. Л., Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, *Мат. сборник* (2011), Т. 49, No. 5, С. 31–54.
- [102] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Множество разреза в субримановой задаче на группе Энгеля, *Доклады Академии Наук*, Выпуск 6, 2018, Том 478, 623–626.
- [103] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 195, no. 3, pp. 369–390.
- [104] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 958–988.
- [105] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group, *Regular and Chaotic Dynamics*, December 2017, Vol. 22, Issue 8, pp 909–936.
- [106] Ю. Л. Сачков, А. Ю. Попов, Субриманова сфера Энгеля, *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2021, том 500, с. 97–101
- [107] E. Cartan, Les systemes de Pfaff a cinque variables et les equations aux derivees partielles du second ordre, *Ann. Sci. École Normale* **27** (1910), 3: 109–192.
- [108] Сачков Ю. Л., Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Математический сборник*, 2003, 194 (9), 63–90.
- [109] Сачков Ю. Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 2, S. 95–116.
- [110] Сачков Ю. Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, № 4, С. 123–150.
- [111] Сачков Ю. Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.
- [112] Brockett R., Dai L. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability// In: Nonholonomic Motion Planning, Z. Li and J. Canny, Eds., Kluwer, Boston, 1993, 1–21.
- [113] Yu. L. Sachkov, Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures, *Transactions of the AMS*, 2004, 2, 457-494
- [114] Yu. L. Sachkov, Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27, 709–751 (2021).
- [115] A. Ardentov, E. Hakavuori, Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, *ESAIM:COCV*, 28 (2022) 12.
- [116] L.V.D. Dries, A. Macintyre, D. Marker, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, *Annals of Mathematics*, 140, 1994, 183–205.
- [117] J.M. Lion, J.P. Rolin, Théorèmes de préparation pur les fonctions logarithmo-exponentielles, *Annales de l'Institut Fourier*, 47, 1997, 859–884.
- [118] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, Неинтегрируемость по Лиувиллю субримановых задач на свободных группах Карно глубины 4, *Доклады Академии Наук*, 2017, т. 95, no. 3, С. 211–213.
- [119] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше, *Матем. сб.*, 209:5 (2018), 74–119
- [120] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2,3,5,8), *Дифференциальные уравнения*, 2017, 3, 362–374.
- [121] Golé, C., Karidi, R. A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie groups. *Journal of Dynamical and Control Systems* 1, 535–549 (1995).
- [122] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 759-774

- [123] Ардентов А.А., Э. Ле Донне, Сачков Ю.Л., Субфинслеровы геодезические на группе Картана, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 36-60
- [124] Ардентов А.А., Э. Ле Донне, Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории в субфинслеровой задаче на группе Картана, *Труды МИАН*, т. 304 (2019), 49–67.
- [125] Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Субфинслерова задача на группе Картана, *Доклады Академии Наук*, 2019, 484, No. 2, 138-141
- [126] Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Субфинслеровы структуры на группе Энгеля, *Доклады Академии Наук*, 2019, 485, No. 4, 395–398
- [127] Берестовский В.Н., *Однородные многообразия с внутренней метрикой. II*, Сибирский математический журнал, **30** (1989), no. 2, 14–28, 225.
- [128] Берестовский В.Н., *О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой*, Сибирский математический журнал, **30** (1989), no. 1, 23–34.
- [129] В. Н. Берестовский, “Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметрики плоскости Минковского”, *Сиб. матем. журн.*, 35:1 (1994), 3–11
- [130] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Экстремали левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля”, *Сиб. матем. журн.*, 61:4 (2020), 735–751
- [131] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “ПМП, (ко)присоединённое представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли”, *Чебышевский сб.*, 21:2 (2020), 43–64
- [132] Локуциевский Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // *Матем. сб.* 2019. Т. 210. № 8. С. 120–148.
- [133] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, and Mario Sigalotti, *Sub-Finsler structures from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions*, *J. Dyn. Control Syst.* **23** (2017), no. 3, 547–575.
- [134] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, and Grégoire Charlot, *Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **5** (2005), no. 4, 957–990 (electronic).
- [135] H. Busemann, The Isoperimetric Problem in the Minkowski Plane, *American Journal of Mathematics*, Vol. 69, No. 4 (Oct., 1947), pp. 863–871
- [136] Yu. L. Sachkov, Optimal bang-bang trajectories in sub-Finsler problem on the Cartan group, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol.4, n.4, 583-593.
- [137] Yu. L. Sachkov, Periodic controls in step 2 strictly convex sub-Finsler problems, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, Vol. 25, No. 1, pp. 33–39.
- [138] M. Grochowski, Reachable Sets for the Heisenberg sub-Lorentzian Metric on \mathbb{R}^3 . An Estimate for the Distance Function, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 12, No. 2, 2006.
- [139] Grong E., Vasil'ev A. Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover, *J. Geom. Mech.* **3** (2011), no. 2, 225-260.
- [140] A. Korolko, I. Markina, Nonholonomic Lorentzian Geometry on Some H -type Groups, *Journal of Geometric Analysis*, Vol. 19, No. 4, 2009.
- [141] Qihui Cai, Tiren Huang, Yu. Sachkov, Xiaoping Yang, Geodesics in the Engel group with a sub-Lorentzian metric, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 22 (2016), 465–484.
- [142] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Т. Хуанг, К. Янг, “Экстремальные траектории в сублоренцевой задаче на группе Энгеля”, *Матем. сб.*, 209:11 (2018), 3–31
- [143] В. Н. Берестовский, “Геодезические и кривизны специальных субримановых метрик на группах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, 59:1 (2018), 41–55
- [144] А.П. Маштаков, Ю.Л. Сачков, Суперинтегрируемость левоинвариантных субримановых структур на унимодулярных трехмерных группах Ли, *Дифференциальные уравнения*, 2015, 11, 1482–1488.

- [145] Аграчев А.А., Сарычев А.А. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295, No. 4, С. 777–781
- [146] А. П. Маштаков, Алгоритмическое и программное обеспечение решения конструктивной задачи управления неголономными пятимерными системами, Программные системы: теория и приложения, 3:1 (2012), с. 3–29
- [147] A. Agrachev and A. Marigo. Nonholonomic tangent spaces: intrinsic construction and rigid dimensions. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 9: 111–120, 2003.
- [148] Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry // In: Sub-Riemannian geometry, A. Bellaïche and J.-J. Risler, Eds., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1996, 1–78.
- [149] *Bellaïche A., Laumond J. P., Chyba M.* Canonical nilpotent approximation of control systems: application to nonholonomic motion planning. 32nd IEEE CDC, 1993.
- [150] *Bellaïche A., Laumond J.P., Risler J.J.* Nilpotent infinitesimal approximations to a control Lie algebra. IFAC NCSDS, Bordeaux, 1992. P. 174–181.
- [151] Rosa Maria Bianchini and Gianna Stefani. Graded approximations and controllability along a trajectory. SIAM J. Control Optim., 28(4): 903–924, 1990.
- [152] *Chitour Y., Jean F., Long R.* A Global Steering Method for Nonholonomic Systems, Journal of Differential Equations, 2013, V. 254, P. 1903–1956.
- [153] *Fernandes C., Gurfvits L., Li Z.X.* A variational approach to optimal nonholonomic motion planning. IEEE ICRA, Sacramento, 1991. P. 680–685.
- [154] Mikhael Gromov. Carnot–Carathéodory spaces seen from within. In Sub-Riemannian geometry, volume 144 of Progress in Mathematics, pp. 79–323. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [155] *Hermes H.* Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems // SIAM. 1991. V. 33. P. 238–264.
- [156] *Lafferriere G., Sussmann H.J.* A differential geometric approach to motion planning. Nonholonomic Motion Planing. 1992. Editors: Zexiang Li, J.F. Canny.
- [157] Lafferriere, G. and Sussmann, H.J., A differential geometric approach to motion planning, *Nonholonomic motion planning*, Kluwer, 1993, pp. 235–270.
- [158] Laumond J.P. Nonholonomic motion planning for mobile robots // Preprint No. 98211. Toulouse, France: LAAS-CNRS, 1998.
- [159] Murray R. M., *Nilpotent bases for a class on nonintegrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems* // Math. Control Signal Syst., university of California, Berkeley, 1990.
- [160] *Stefani G.* Polynomial approximations to control systems and local controllability // Proc. 24th. I.E.E.E. Conference on Decision and Control, Ft. Lauderdale, Fla., 1985, P. 33–38.
- [161] Tilbury D., Murray R., Sastry S., *Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form* // IEEE TAC, 1995, V. 40, No. 5, P. 802–819.
- [162] Vendittelli M., Laumond J.P., Oriolo G. Steering nonholonomic systems via nilpotent approximations: The general two- trailer system // 1999 IEEE International Confer. on Robotics and Automation, May 10–15, 1999, Detroit, MI.
- [163] *Venditelli M., Oriolo G., Jea F., Laumond J.P.* Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonomic systems with singularities // Transactions on Automatic Control. 2004. P. 261–266.
- [164] Walsh, G.C., Montgomery, R., and Sastry, S.S., Optimal path planning on matrix Lie group, in *Proc. of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, vol. 2, pp. 1258–1263.
- [165] А. П. Маштаков, Р. Дайтс, Ю. Л. Сачков, Е. Беккерс, И. Ю. Бесчастный, Субримановы геодезические на группе $SO(3)$ в задаче поиска кровеносных сосудов на сферических изображениях сетчатки, Доклады Академии Наук, 2017, 473, № 5, с. 521–524
- [166] G. Ben-Yosef and O. Ben-Shahar, *A tangent bundle theory for visual curve completion*. PAMI 34(7), pp.1263–1280, 2012.

- [167] E. J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov, G. R. Sanguinetti. “A PDE approach to data-driven sub-Riemannian geodesics in $SE(2)$ ”, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8:4 (2015), pp. 2740–2770
- [168] E. J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov, Y. Sachkov. “Vessel tracking via sub-Riemannian geodesics on the projective line bundle”, *Geometric Science of Information, GSI 2017, LNCS*, vol. 10589, eds. F. Nielsen, F. Barbaresco, Springer, Cham, 2017, pp. 773–781.
- [169] U. Boscain, R. Duits, F. Rossi and Y. L. Sachkov, Curve Cuspless Reconstruction via sub-Riemannian Geometry, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 20 (2014), 748–770, doi:10.1051/cocv/2013082
- [170] U. Boscain, J.-P. Gauthier, R. Chertovskih, A. Remizov Hypoelliptic diffusion and human vision: a semidiscrete new twist // *SIAM J. Imaging Sci.*, 7 (2), 2014, pp. 669–695.
- [171] G. Citti, A. Sarti. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24:3 (2006), pp. 307–326.
- [172] R. Duits, U. Boscain, F. Rossi and Y. L. Sachkov, Association Fields via Cuspless Sub-Riemannian Geodesics in $SE(2)$ // *JMIV*, 49 (2), 2014, pp. 384–417, doi: 10.1007/s10851-013-0475-y
- [173] R. Duits, M. Felsberg, G. Granlund, B.H. Romeny, *Image Analysis and Reconstruction using a Wavelet Transform Constructed from a Reducible Representation of the Euclidean Motion Group*. *IJCV*, vol.72 (1), pp. 79–102, 2007.
- [174] R. Duits, A. Ghosh, T. C. J. Dela Haije, A. Mashtakov, On Sub-Riemannian Geodesics in $SE(3)$ Whose Spatial Projections do not Have Cusps // *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2016, 22(4), pp:771–805, doi:10.1007/s10883-016-9329-4
- [175] B. Franceschiello, A. Mashtakov, G. Citti, A. Sarti. “Modelling of the Poggendorff illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation group”, *New Trends in Image Analysis and Processing, ICIAP 2017, LNCS*, vol. 10590, eds. S. Battiato, G. M. Farinella, M. Leo, G. Gallo, Springer, 2017, pp. 37–47.
- [176] B. Franceschiello, A. Mashtakov, G. Citti, A. Sarti, Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation group // *Differential Geometry and its Applications*, Volume 65, 2019, pp. 55–77, doi:10.1016/j.difgeo.2019.03.007
- [177] E. Franken and R. Duits, *Crossing-Preserving Coherence-Enhancing Diffusion on Invertible Orientation Scores*. *IJCV*, 85(3), pp. 253-278, 2009.
- [178] A. P. Mashtakov, A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Parallel algorithm and software for image inpainting via sub-Riemannian minimizers on the group of rototranslations”, *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 6:1 (2013), pp. 95–115.
- [179] A. Mashtakov, R. Duits, Y. Sachkov, E. J. Bekkers, I. Beschastnyi. “Tracking of lines in spherical images via sub-Riemannian geodesics in $SO(3)$ ”, *JMIV*, 58:2 (2017), pp. 239–264
- [180] J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, *J. Physiology - Paris* 97 (2003), 265–309.
- [181] J. Petitot, *Neurogeometrie de la vision — Modeles mathematiques et physiques des architectures fonctionnelles*, 2008, Editions de l’Ecole Polytechnique.
- [182] А. А. Ардентов, А. В. Смирнов, Управление мобильным роботом вдоль эластик Эйлера, Программные системы: теория и приложения, 2017, том 8, выпуск 4, 163–178
- [183] А. А. Ардентов, И. С. Губанов. Моделирование парковки автомобиля с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса-Шеппа. *Программные системы: теория и приложения*, 2019, 10:4(43), с. 97–110.
- [184] Ardentov A.A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. V. 21. No. 7–8, P. 775–791.
- [185] Ardentov A.A., Karavaev Y.L., Yefremov K.S. Euler Elastics for Optimal Control of the Motion of Mobile Wheeled Robots: the Problem of Experimental Realization // *RCD*. 2019. V. 24. No. 3. P. 312–328.
- [186] Laumond, J.-P., *Nonholonomic motion planning for mobile robots*, Tutorial notes, 1998.

- [187] Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F. Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics// Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications. Singapore: World Scientific, 2002. P. 183–202.
- [188] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint// IEEE Trans. Robot. Automat. (1). 1990. V. 6. P. 62–72.
- [189] Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. An intrinsic approach to the control of rolling bodies// Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999. V. 1. P. 431–435.
- [190] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: the holonomic case// Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control, Univ. Colorado, Boulder, June 29–July 19, 1997, / ed. G. Ferreyra et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 241–256 (Proc. Sympos. Pure Math. V. 64).