Приложение субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ к задаче об упругости однородной балки

Сачкова Е.Ф., Сачков Ю.Л., Панин Д.А.
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН,
Научно-технологический университет «Сириус»
E-mail: efsachkova@mail.ru,
yusachkov@gmail.com, dany.panin99@gmail.com

13 июля 2021 г.

Содержание

1 Введение

В данной статье мы ставим себе целью исследовать прочность при изгибе однородных балок, профили сечения которых суть круговые сегменты, заданные не полностью, а частично: известны длина хорды и площадь кругового сегмента. Для достижения поставленной цели мы исследуем те траектории задачи (2.1)–(2.6), которые проецируются на плоскость Ox_1x_2 в дуги окружностей, выходящих из начала координат. Используя механические свойства задачи и сведения из теории сопротивления материалов, мы получаем алгоритм вычисления максимального момента сопротивления сечения при изгибе.

Статья состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ в частном случае анормальных круговых управлений [1]. Получена параметризация анормальных круговых траекторий, проведено исследование этих траекторий на оптимальность, описана круговая поверхность, решена двухточечная задача оптимального управления в классе круговых управлений.

Вторая часть статьи посвящена приложению полученных теоретических сведений к исследованию задачи об упругости однородной балки. Построен алгоритм, вычисляющий по длине хорды и площади контур кругового сегмента и максимальный момент сопротивления сечения при изгибе.

2 Постановка задачи

Рассматривается левоинвариантная нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5,8)$ [1, 3]:

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{2.2}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{2.3}$$

$$x(0) = x^0 = 0, \tag{2.4}$$

$$x(T) = x^1 \in \mathbb{R}^8, \quad T > 0, \tag{2.5}$$

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{2.6}$$

3 Механический смысл задачи

В этом разделе раскрывается механический смысл задачи (2.1)–(2.5).

Рассмотрим двухточечную задачу конструктивного управления (2.1)–(2.5). Предположим, что $x(t,\lambda^0)$ суть решения этой задачи: $x(T,\lambda^0) = x^1$. Выбираются решения $x(t,\lambda^0)$, проекции которых $\gamma = (x_1(t,\lambda^0),\, x_2(t,\lambda^0))$ вместе с хордой $\gamma_0 = \{(x_1^1(1-t),\, x_2^1(1-t)), t \in [0,1]\}$ образуют замкнутый контур $\gamma\gamma_0 = \partial D$, ограничивающий плоскую область D. Потребуем, чтобы граница области ∂D была положительно ориентирована.

Теорема 3.1. *Пусть D есть область с положительно ориентированной границей ∂D. Тогда плоской области D соответствуют следующие статические величины, выражающиеся через граничную точку $x(T) =$*

$x^1 = (x_1^1,\, x_2^1, \dots, x_8^1)$*:*

$$S = x_3^1, \tag{3.1}$$

$$M_1 = x_5^1 + \frac{1}{6}x_1^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2), \tag{3.2}$$

$$M_2 = x_4^1 - \frac{1}{6}x_2^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2), \tag{3.3}$$

$$J_1 = 2x_8^1 + \frac{1}{12}x_1^1(x_2^1)^3, \tag{3.4}$$

$$J_2 = 2x_6^1 - \frac{1}{12}(x_1^1)^3 x_2^1, \tag{3.5}$$

$$K_{12} = x_7^1, \tag{3.6}$$

где S *— площадь области* D*;* M_1, M_2, J_1, J_2 *— статические моменты и моменты инерции второго порядка области* D *относительно осей* Ox_1 *и* Ox_2 *соответственно;* K_{12}*— центробежный момент,* $O(0,0)$ *— полюс.*

Доказательство. Проинтегрируем уравнения системы (2.1)–(2.4) по положительно ориентированному контуру ∂D^+. Заметим, что все производные $\dot{x}_i(t,\lambda^0)$, $i = 3,\dots,8$, выражаются через $x_1(t,\lambda^0)$, $x_2(t,\lambda^0)$, $\dot{x}_1(t,\lambda^0)$, $\dot{x}_2(t,\lambda^0)$. Применяя непосредственное интегрирование криволинейных интегралов и формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned}
x_3(T) &= \int_0^T \dot{x}_3(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T (-x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2)\,dt = \frac{1}{2}\int_\gamma x_1dx_2 - x_2dx_1 = \\
&= \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x_1dx_2 - x_2dx_1 = \iint_D dx_1dx_2 = S,\\
x_4(T) &= \frac{1}{2}\int_\gamma (x_1^2 + x_2^2)dx_2 = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(x_1^2 + x_2^2)dx_2 - \frac{1}{2}\int_{\gamma_0}(x_1^2 + x_2^2)dx_2 = \\
&= \iint_D x_1dx_1dx_2 + \frac{1}{6}x_2(T)(x_1^2(T) + x_2^2(T)) = M_2 + \frac{1}{6}x_2(T)(x_1^2(T) + x_2^2(T)),\\
x_5(T) &= -\frac{1}{2}\int_\gamma (x_1^2 + x_2^2)dx_1 = -\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(x_1^2 + x_2^2)dx_1 + \frac{1}{2}\oint_{\gamma_0}(x_1^2 + x_2^2)dx_1 = \\
&= \iint_D x_2dx_1dx_2 - \frac{1}{6}x_1(T)(x_1^2(T) + x_2^2(T)) = M_1 - \frac{1}{6}x_1(T)(x_1^2(T) + x_2^2(T));
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_6(T) &= \frac{1}{6}\int_\gamma x_1^3 dx_2 = \frac{1}{6}\oint_{\partial D} x_1^3 dx_2 - \frac{1}{6}\int_{\gamma_0} x_1^3 dx_2 = \\
&= \frac{1}{2}\iint_D x_1^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{24}x_1^3(T)x_2(T) = \frac{1}{2}J_2 + \frac{1}{24}x_1^3(T)x_2(T); \\
x_8(T) &= -\frac{1}{6}\int_\gamma x_2^3 dx_1 = -\frac{1}{6}\oint_{\partial D} x_2^3 dx_1 + \frac{1}{6}\int_{\gamma_0} x_2^3 dx_1 = \\
&= \frac{1}{2}\iint_D x_2^2 dx_1 dx_2 - \frac{1}{24}x_1(T)x_2^3(T) = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{24}x_1(T)x_2^3(T); \\
x_7(T) &= \frac{1}{4}\int_\gamma -x_1x_2^2 dx_1 + x_1^2 x_2 dx_2 = \\
&= \frac{1}{4}\oint_{\partial D} -x_1x_2^2 dx_1 + x_1^2x_2dx_2 - \frac{1}{4}\int_{\gamma_0} -x_1x_2^2dx_1 + x_1^2x_2dx_2 = \\
&= \iint_D x_1x_2 dx_1 dx_2 = K_{12}.
\end{aligned}
$$

Отсюда вытекают соотношения (3.1)–(3.6). □

Замечание 3.1. *С помощью соотношений* (3.1)–(3.6) *можно получить:*

1. *Формулы для центра масс области D:*

$$
c_1 = \frac{M_2}{S}, \qquad c_2 = \frac{M_1}{S}. \tag{3.7}
$$

2. *Тензор инерции плоской области D относительно полюса $O(0,0)$:*

$$
A = \begin{pmatrix} J_1 & -K_{12} \\ -K_{12} & J_2 \end{pmatrix}. \tag{3.8}
$$

   Так как масса равномерно распределена по области D, то $J_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$, и, согласно неравенству Коши-Буняковского, $\det A > 0$.

3. *Уравнение эллипса ($\det A > 0$) инерции плоской области D с центром в полюсе $O(0,0)$:*

$$
J_1\omega_1^2 - 2K_{12}\omega_1\omega_2 + J_2\omega_2^2 = 1, \tag{3.9}
$$

   где $\bar\omega = |\bar\omega|(\cos\theta, \sin\theta)$ — постоянная угловая скорость вращения области D вокруг оси $L = (\cos\theta, \sin\theta)$ с постоянной кинетической энергией, равной $1/2$ [6].

Замечание 3.2. *Поскольку тензор инерции* (3.8) *есть симметрическая матрица, то существуют два взаимно ортогональных собственных направления f_1, f_2; оси f_1, f_2 называются осями инерции области D в точке O. Действительные собственные значения I_1, I_2 матрицы A суть главные моменты инерции области D относительно осей инерции f_1, f_2 соответственно.*

*В собственном базисе $(f_1, f_2\ )$ эллипс инерции (*3.9*) имеет каноническое уравнение ($K_{12} = 0$)*

$$\frac{\omega_1^2}{(1/I_1)} + \frac{\omega_2^2}{(1/I_2)} = 1. \tag{3.10}$$

Главные оси эллипса инерции направлены по осям инерции. Если $I_1 > I_2$, то I_1 есть максимальный момент инерции области D, а I_2 — минимальный. Если $I_1 = I_2$, то главные оси эллипса инерции определяются неоднозначно [6, 10].

Замечание 3.3. *«Эллипс инерции играет большую роль в механике, и особенно важное применение его имеет место в сопротивлении материалов. В сопротивлении материалов доказывается, что если мы имеем балку с каким-нибудь заданным сечением, то сопротивление ее изгибу будет пропорционально моменту инерции ее сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной к направлению изгибающей силы.»*[4]

Если перенести центр эллипса инерции (3.9) *в центр тяжести* (3.7) *фигуры D и по теореме Гюйгенса-Штейнера (*[10]*, с. 52.) пересчитать моменты инерции относительно новых осей , то, интерпретировав область D как сечение некоторой балки, полученный эллипс инерции фигуры D можно использовать для изучения прочности этой балки при изгибе. К этому вопросу мы вернемся во второй части статьи.*

4 Круговые анормальные траектории

В этом разделе приводятся формулы частного вида для анормальных управлений и соответствующие явные параметризации анормальных траекторий, а именно, круговые.

Обозначим линейные на слоях гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, \dots, 8$, $\lambda \in T^*\mathbb{R}^8$. В работе [1] исследована анормальная гамильтонова система принципа максимума Понтрягина [2, 3]. Анормальные траектории, являющиеся решениями задачи Коши (2.1) –(2.4), параметризованы начальным сопряженным вектором

$$\lambda^0 = (0, 0, 0, h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8), \quad (h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \neq 0.$$

Круговые анормальные управления параметризуются анормальным сопряженным вектором $\lambda^0 = (0, 0, 0, h_4^0, h_5^0, h_6, 0, h_6) \in T^*\mathbb{R}^8$, $(h_4^0)^2+(h_5^0)^2 \neq 0$, $h_6 \neq 0$. Построим проекцию

$$\pi(\lambda^0) = (h_4^0, h_5^0, h_6) = (p_1, p_2, p_3) = \psi. \tag{4.1}$$

Тогда имеем новый вектор параметров $\psi = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, $\quad p_1^2 + p_2^2 \neq 0$, $\quad p_3 \neq 0$ и круговые анормальные управления принимают вид [1]:

$$u_1(t, \psi) = -(p_2 \cos p_3 t + p_1 \sin p_3 t), \tag{4.2}$$
$$u_2(t, \psi) = p_1 \cos p_3 t - p_2 \sin p_3 t. \tag{4.3}$$

Чтобы применить механические свойства задачи, рассмотрим положительно ориентированные контуры $\gamma\gamma_0$, которые задаются параметрами $p_3 > 0$. Поэтому в этой статье круговые управления рассматриваются на множестве параметров

$$P = (\psi = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 > 0, \quad p_3 > 0). \tag{4.4}$$

Приведем явные формулы для круговых анормальных траекторий $x(t, \psi)$, полученные с помощью интегрирования системы (2.1)–(2.3) с начальным условием (2.4) и анормальными управлениями (4.2), (4.3) при условии (4.4).

$$x_1(t) = \frac{1}{p_3}(-p_1 + p_1\cos(p_3t) - p_2\sin(p_3t)); \tag{4.5}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{p_3}(-p_2 + p_2\cos(p_3t) + p_1\sin(p_3t)); \tag{4.6}$$

$$x_3(t) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_3^2}(p_3t - \sin(p_3t)); \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = -\frac{(p_1^2 + p_2^2)}{4p_3^3}(&3p_2 + 2p_1p_3t - 4p_2\cos(p_3t) + p_2\cos(2p_3t) - \\ &- 4p_1\sin(p_3t) + p_1\sin(2p_3t)); \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} x_5(t) = \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{4p_3^3}(&3p_1 - 2p_2p_3t - 4p_1\cos(p_3t) + p_1\cos(2p_3t) + \\ &+ 4p_2\sin(p_3t) - p_2\sin(2p_3t)); \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} x_6(t) = \frac{1}{192p_3^4}(&4p_1p_2(15p_1^2 + 13p_2^2) + 12(5p_1^4 + 6p_1^2p_2^2 + p_2^4)p_3t - \\ &- 8p_1p_2(13p_1^2 + 9p_2^2)\cos(p_3t) + 16p_1p_2(4p_1^2 + p_2^2)\cos(2p_3t) - \\ &- 8p_1p_2(3p_1^2 - p_2^2)\cos(3p_3t) + 4p_1p_2(p_1^2 - p_2^2)\cos(4p_3t) - \\ &- 8p_1^2(13p_1^2 + 9p_2^2)\sin(p_3t) + 8(4p_1^4 - 3p_1^2p_2^2 - p_2^4)\sin(2p_3t) - \\ &- 8p_1^2(p_1^2 - 3p_2^2)\sin(3p_3t) + (p_1^4 - 6p_1^2p_2^2 + p_2^4)\sin(4p_3t)); \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$
\begin{aligned}
x_7(t) = \frac{1}{384p_3^4}&((-25p_1^4 - 20p_1^3p_2 + 54p_1^2p_2^2 + 4p_1p_2^3 + 55p_2^4)+\\
&+ 12(5p_1^4 + 8p_1^3p_2 + 6p_1^2p_2^2 + 8p_1p_2^3 + p_2^4)p_3t+\\
&+ 24(2p_1^4 + 3p_1^3p_2 - 5p_1^2p_2^2 - p_1p_2^3 - 3p_2^4)\cos(p_3t)-\\
&- 12(3p_1^4 + 8p_1^3p_2 - 10p_1^2p_2^2 - 4p_1p_2^3 - p_2^4)\cos(2p_3t)+\\
&+ 8(2p_1^4 + 7p_1^3p_2 - 9p_1^2p_2^2 - 5p_1p_2^3 + p_2^4)\cos(3p_3t)+\\
&- 3(p_1^4 + 4p_1^3p_2 - 6p_1^2p_2^2 - 4p_1p_2^3 + p_2^4)\cos(4p_3t)-\\
&- 24(2p_1^4 + 9p_1^3p_2 + 7p_1^2p_2^2 + 5p_1p_2^3 + p_2^4)\sin(p_3t)-\\
&- 24(p_1^4 - 5p_1^3p_2 - 5p_1^2p_2^2 + p_1p_2^3)\sin(2p_3t)+\\
&+ 8(2p_1^4 - 7p_1^3p_2 - 9p_1^2p_2^2 + 5p_1p_2^3 + p_2^4)\sin(3p_3t)-\\
&- 3(p_1^4 - 4p_1^3p_2 - 6p_1^2p_2^2 + 4p_1p_2^3 + p_2^4)\sin(4p_3t)); \qquad (4.11)\\
x_8(t) = \frac{1}{192p_3^4}&(-4p_1p_2(13p_1^2 + 15p_2^2) + 12(p_1^4 + 6p_1^2p_2^2 + 5p_2^4)p_3t+\\
&+ 8p_1p_2(9p_1^2 + 13p_2^2)\cos(p_3t) - 16p_1p_2(p_1^2 + 4p_2^2)\cos(2p_3t)-\\
&- 8p_1p_2(p_1^2 - 3p_2^2)\cos(3p_3t) + 4p_1p_2(p_1^2 - p_2^2)\cos(4p_3t)-\\
&- 8p_2^2(9p_1^2 + 13p_2^2)\sin(p_3t) - 8(p_1^4 + 3p_1^2p_2^2 - 4p_2^4)\sin(2p_3t)+\\
&+ 8p_2^2(3p_1^2 - p_2^2)\sin(3p_3t) + (p_1^4 - 6p_1^2p_2^2 + p_2^4)\sin(4p_3t)). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Итак, имеем выходящий из начала координат пучок анормальных круговых траекторий (4.5)–(4.12), полученный в результате интегрирования горизонтальной подсистемы принципа максимума Понтрягина в анормальном случае.

5 Оптимальность круговых траекторий

В этом разделе круговые анормальные траектории исследуются на оптимальность в смысле функционала субримановой длины (2.6).

Теорема 5.1. *Круговые траектории $x(t,\psi)$, $\psi \in P$, оптимальны на отрезке* $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{p_3}\right]$.

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$\pi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^3, \quad x = (x_1, \ldots, x_8) \mapsto \bar{x} = (x_1, x_2, x_3),$$

спроецированные векторные поля

$$\bar{X}_i = \pi_* X_i \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^3), \quad i = 1, 2,$$
$$\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}, \quad \bar{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\bar{x}_1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3},$$

и спроецированную субриманову задачу

$$\dot{\bar{x}} = u_1 \bar{X}_1(\bar{x}) + u_2 \bar{X}_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{5.1}$$
$$\bar{x}(0) = \pi(x^0) = (0,0,0), \quad \bar{x}(T) = \bar{x}^1 = \pi(x^1), \tag{5.2}$$
$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{5.3}$$

Задача (5.1)–(5.3) — это известная субриманова задача на группе Гейзенберга [11]. Геодезические $\bar{x}(t,\psi) = \pi(x(t,\psi))$ в этой задаче задаются формулами (4.5)–(4.7), они оптимальны на отрезке $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{p_3}\right]$. Допустим, от противного, что круговая траектория $x(t,\psi)$, $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{p_3}\right]$, с управлением $u(t)$ неоптимальна в задаче (2.1)–(2.6). Тогда существует траектория $y(t)$ системы (2.1)–(2.3) с граничными условиями (2.4), (2.5) и управлением $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, для которого $\int_0^T \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\, dt < \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt$. Но тогда проекция $\bar{y}(t) = \pi(y(t))$ удовлетворяет условиям (5.1)–(5.2) и имеет меньшее значение функционала качества, чем $\bar{x}(t) = \pi(x(t,\psi))$. Это противоречит оптимальности кривой $\bar{x}(t)$ в задаче (5.1)–(5.3). $\square$

6 Круговая поверхность

В этом разделе описывается круговая поверхность (6.1), заметаемая оптимальными траекториями $x(t,\psi)$, $t \in \left(0, \dfrac{2\pi}{p_3}\right)$.

Обозначим через

$$F : (\psi, t) \mapsto x, \quad \psi \in P, \quad t > 0,$$

отображение, заданное формулами (4.5) – (4.12). Рассмотрим множество в $\mathbb{R}^8$, заполненное круговыми траекториями на максимальном интервале их оптимальности:

$$C = \{F(\psi, t) \mid \psi \in P, \quad t \in (0,\, 2\pi/p_3)\}, \tag{6.1}$$

будем называть это множество круговой поверхностью.

Теорема 6.1. *Круговая поверхность C есть трехмерное аналитическое неособое многообразие, график аналитического отображения*

$$G : O \to \mathbb{R}^8, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, \dots, x_8),$$
$$O = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad x_3 > 0\}.$$

Доказательство. Отображение F имеет симметрию

$$F\left(\frac{\psi}{k}, k\, t\right) = F(\psi, t), \quad k > 0,$$

поэтому $C = F(D)$, где

$$D = \{(\psi,\, t) \in \mathbb{R}^4) \mid p_1^2 + p_2^2 = 1, \quad p_3 > 0, \quad t \in (0, 2\pi/p_3)\}.$$

Введем угол θ:

$$p_1 = \cos\theta, \quad p_2 = \sin\theta,$$

тогда равенства (4.5), (4.6) перепишутся как

$$x_1 = (\cos(p_3 t + \theta) - \cos\theta)/p_3 = -\frac{2}{p_3} \sin\left(\theta + \frac{p_3 t}{2}\right) \sin\frac{p_3 t}{2}, \tag{6.2}$$

$$x_2 = (\sin(p_3 t + \theta) - \sin\theta)/p_3 = \frac{2}{p_3} \cos\left(\theta + \frac{p_3 t}{2}\right) \sin\frac{p_3 t}{2}, \tag{6.3}$$

откуда

$$x_1^2 + x_2^2 = 2(1 - \cos p_3 t)/p_3^2,$$

а из (4.7) получаем

$$x_3 = (p_3 t - \sin p_3 t)/(2p_3^2). \tag{6.4}$$

Обозначая $\tau = p_3 t \in (0,\, 2\pi)$, получаем

$$\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\tau - \sin\tau}{4(1 - \cos\tau)} =: f(\tau). \tag{6.5}$$

Функция $f(\tau)$ строго возрастает и аналитична на интервале $(0,\, 2\pi)$ и переводит его в луч $(0,\, +\infty)$. Поэтому существует аналитическая строго возрастающая обратная функция $g = f^{-1}: \quad (0, +\infty) \to (0, 2\pi)$. Из (6.5) получаем

$$\tau = g(x_3/(x_1^2 + x_2^2)), \tag{6.6}$$

а из (6.4)

$$p_3 = \sqrt{\frac{\tau - \sin\tau}{2x_3}}, \tag{6.7}$$

что является аналитической функцией переменных $(x_1, x_2, x_3) \in O$. Поэтому

$$t = \frac{\tau}{p_3} \tag{6.8}$$

есть также аналитическая функция от $(x_1, x_2, x_3) \in O$.

Для нахождения $\theta(x_1, x_2, x_3)$ введем полярные координаты: $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, тогда из (6.2), (6.3) получаем

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{2} - \frac{p_3 t}{2},$$

откуда

$$p_1 = \sin\left(\varphi - \frac{p_3 t}{2}\right) = \sin\varphi\cos\frac{p_3 t}{2} - \cos\varphi\sin\frac{p_3 t}{2}, \tag{6.9}$$

$$p_2 = -\cos\left(\varphi - \frac{p_3 t}{2}\right) = -\cos\varphi\cos\frac{p_3 t}{2} - \sin\varphi\sin\frac{p_3 t}{2}, \tag{6.10}$$

и p_1, p_2 суть аналитические функции от $(x_1, x_2, x_3) \in O$.

Итак, формулы (6.6)–(6.10) задают аналитическое отображение

$$\Phi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (p_1, p_2, p_3, t), \quad O \to D,$$

являющееся обратным к отображению, заданному формулами (4.5)–(4.7).

Поэтому круговая поверхность C задается условиями:

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, x_3) \in O, \\ &x_i = x_i \circ \Phi(x_1, x_2, x_3), \quad i = 4, \dots, 8, \end{aligned} \tag{6.11}$$

то есть C есть график аналитического отображения

$$G : O \to \mathbb{R}^8, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, \dots, x_8),$$

где функции x_i в правой части (6.11) вычисляются согласно формулам (4.8)–(4.12). $\square$

7 Двухточечная граничная задача

В этом разделе рассматривается двухточечная граничная задача оптимального управления (2.1)–(2.6).

Введем обозначения для траекторий, перепараметризованных новым временем $\tau = p_3 t$: $\tilde{x}(\tau) = x(p_3 t)$, тогда $\tilde{x}(\bar{t}) = x(p_3 T) = x^1$. Обозначим $x_1^1 = a_1$, $x_2^1 = a_2$, $x_3^1 = a_3$, $r^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2$. Тогда $\pi(x^1) = \bar{x}^1 = (a_1, a_2, a_3)$.

Предложение 7.1. *Пусть круговая траектория $x(t, \bar{\psi})$, $t \in [0, T]$, $\bar{\psi} \in P$, есть решение двухточечной граничной задачи оптимального управления* (2.1)– (2.6). *Тогда, если граничная точка x^1 в условии* (2.5) *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *$\bar{x}^1 = (a_1, a_2, a_3) \in O$, тогда справедливы следующие аналитические зависимости $\bar{t}(\bar{x}^1)$, $\bar{\psi}(\bar{x}^1)$:*

$$\frac{\bar{t} - \sin \bar{t}}{\sin^2 \dfrac{\bar{t}}{2}} = \frac{8a_3}{r^2}, \tag{7.1}$$

$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{t}}{2T}\left(a_2 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} - a_1\right), \tag{7.2}$$

$$\bar{p}_2 = -\frac{\bar{t}}{2T}\left(a_1 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} + a_2\right), \tag{7.3}$$

$$\bar{p}_3 = \frac{\bar{t}}{T}; \tag{7.4}$$

2. *$\bar{x}^1 = (0, 0, a_3 > 0)$, тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\bar{t} = 2\pi, \tag{7.5}$$

$$\bar{p}_1 = \frac{2}{T}\sqrt{\pi a_3}\cos\varphi, \quad \bar{p}_2 = \frac{2}{T}\sqrt{\pi a_3}\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \tag{7.6}$$

$$\bar{p}_3 = \frac{2\pi}{T}. \tag{7.7}$$

Доказательство. Докажем первый пункт предложения.

Формула (7.1) приведена в работе [7], аналитическая зависимость $\bar{t}(\bar{x}^1)$ при $\bar{x}^1 \in O$ следует из теоремы 6.1.

Перейдем к доказательству формул (7.2)–(7.4).

Из уравнений (4.5), (4.6) получаем систему

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\bar p_1}{\bar p_3}(1-\cos\bar t)-\dfrac{\bar p_2}{\bar p_3}\sin\bar t = a_1,\\
-\dfrac{\bar p_2}{\bar p_3}(1-\cos\bar t)+\dfrac{\bar p_1}{\bar p_3}\sin\bar t = a_2.
\end{cases} \tag{7.8}
$$

Наша цель — выразить $\bar p_i$, $i=1,2,3$, через $\bar x^1$. Поэтому обозначим неизвестные величины $\dfrac{\bar p_1}{\bar p_3}=y_1$, $\dfrac{\bar p_2}{\bar p_3}=y_2$, а известные величины $1-\cos\bar t=c$, $\sin\bar t=d$, где $\bar t\in(0,2\pi)$ есть решение уравнения (7.1). Тогда система (7.8) есть система линейных уравнений относительно переменных y_1, y_2:

$$
\begin{cases}
cy_1+dy_2=-a_1,\\
dy_1-cy_2=a_2.
\end{cases} \tag{7.9}
$$

Определитель системы (7.9) равен, после упрощения, $\delta=-4\sin^2\bar t/2\neq 0$ при $\bar t\in(0,2\pi)$. Тогда существует решение системы (7.9). Подставляя тригонометрические выражения для коэффициентов, получаем решение системы (7.8)

$$
\frac{\bar p_1}{\bar p_3}=\frac{1}{2}\Big(a_2\operatorname{ctg}\frac{\bar t}{2}-a_1\Big), \tag{7.10}
$$

$$
\frac{\bar p_2}{\bar p_3}=-\frac{1}{2}\Big(a_1\operatorname{ctg}\frac{\bar t}{2}+a_2\Big). \tag{7.11}
$$

Из $\bar t=p_3T$ получаем $\bar p_3=\dfrac{\bar t}{T}$, то есть формулу (7.4). Подставляя последнее равенство в найденные выражения (7.10), (7.11), получаем искомые формулы (7.2), (7.3). Сопряженные переменные $\bar p_1,\bar p_2,\bar p_3$ суть аналитические функции переменных $(a_1,a_2,a_3)\in O$ как композиции аналитических функций. Первый пункт доказан.

Докажем второй пункт предложения.

В работе [7] для случая Гейзенберга доказано, что $\bar t=2\pi$, если конечная точка лежит на оси Ox_3. В этом случае решение задачи оптимального управления неоднозначно: соответствующие траектории $\tilde x(\tau)$, $\tau\in[0,2\pi]$, приходящие в заданную точку оси Ox_3, симметричны относительно вращения вокруг оси Ox_3. Очевидно, равенство (7.5) справедливо и для $(2,3,5,8)$-задачи, если $\bar x^1=(0,0,a_3>0)$. Так как $\bar t=\bar p_3T=2\pi$, то $\bar p_3=\dfrac{2\pi}{T}$ (формула (7.7)).

Из формул (4.5), (4.6) следует, что при $\bar{t} = 2\pi$ параметры p_1, p_2 произвольны. Пусть $p_1 = \rho\cos\varphi$, $p_2 = \rho\sin\varphi$, $\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Из (4.7) получаем $\dfrac{\bar{\rho}^2}{2\bar{p_3}^2}2\pi = a_3$, откуда

$$\bar{\rho} = \frac{2}{T}\sqrt{\pi a_3}. \tag{7.12}$$

В работе [8] доказано, что симметрия вращения круговых траекторий $x(t, \lambda^0)$ задается вращением вектора (h_4^0, h_5^0) в плоскости Oh_4h_5 вокруг точки $(0, 0, 0, 0, 0, h_6, 0, h_6)$, $h_6 = \mathrm{const} > 0$. Формула (4.1) показывает соответствие между вращением кругового сопряженного вектора (h_4^0, h_5^0) в плоскости Oh_4h_5 и вращением вектора (p_1, p_2) в плоскости Op_1p_2 вокруг точки $(0, 0, p_3)$, $p_3 = \mathrm{const} > 0$:

$$\begin{aligned}\pi(\lambda^0) = \pi(0, 0, 0, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h_6, 0, h_6) = \\ = \psi_\varphi = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, p_3),\end{aligned} \tag{7.13}$$

где $\rho = \sqrt{(h_4^0)^2 + (h_5^0)^2} = \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2} > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi), h_6 = p_3 = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, если $x(t, \bar{\psi}_{\varphi_0})$ есть решение задачи (2.1)–(2.6) для некоторого $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, то для произвольного $\varphi \in [0, 2\pi)$ траектории $x(t, \bar{\psi}_\varphi)$ также суть решения этой задачи. Подставляя формулу (7.12) в (7.13), получим формулы (7.6). □

Замечание 7.1. *Круговая поверхность C задается следующими образом:*

$$C = \{(a_1, a_2, a_3, \tilde{x}_4(\bar{t}, \bar{\psi}), \ldots, \tilde{x}_8(\bar{t}, \bar{\psi})) \mid (a_1, a_2, a_3) \in O\}. \tag{7.14}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.1. *Решением двухточечной граничной задачи оптимального управления* (2.1)–(2.6) *в классе круговых управлений* (4.2), (4.3), *при условии* (4.4), *являются круговые траектории* (4.5)–(4.12), *параметризованные временем и сопряженными векторами* (7.1)–(7.4) *и* (7.5)–(7.7).

8 Момент сопротивления

В данном разделе статьи рассматривается следующая оригинальная задача.

Задача. Построить сечение однородной балки в форме кругового сегмента, у которого известны только длина l хорды γ_0, площадь S, а дуга окружности γ неизвестна. Балку с полученным сечением подвергнуть нагружению силой, изгибающей ее. Рассмотреть случай чистого прямого изгиба. Вычислить максимальный момент сопротивления построенного сечения при изгибе.

Поставленная задача отличается от известной в теории сопротивления материалов [9] тем, что сечение балки задано частично. Эта ситуация неопределенности успешно разрешается с помощью теоретических сведений, полученных в первой части статьи.

Приведем известные факты из теории сопротивления материалов, необходимые для решения Задачи.

Замечание 8.1. *Все сечения при чистом изгибе остаются плоскими* [5, 9].

Замечание 8.2. *Из теории сопротивления материалов известна формула для момента сопротивления сечения при чистом прямом изгибе (*[9]*, с. 172). Форма сечения задана полностью. Плоская фигура сечения расположена в осях координат $Oxyz$ так, что центр тяжести ее находится в начале координат, горизонтальная ось Ox совпадает с главной центральной осью сечения и перпендикулярна плоскости Oyz изгибающего момента $M = \mathrm{const}$ (ось Ox является нейтральной), ось Oy совпадает со второй главной центральной осью сечения и ортогональна оси Ox. Изгибающая сила направлена вдоль оси Oy вверх. Тогда момент сопротивления сечения при изгибе имеет вид:*

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, \tag{8.1}$$

где I_x есть главный момент инерции сечения относительно главной центральной оси Ox, $y_{max} > 0$ есть наибольшее расстояние точек сечения, лежащих в полуплоскости $\{y > 0\}$, от нейтральной оси $\{y = 0\}$.

Так как круговой сегмент имеет ось симметрии, то она необходимо проходит через центр тяжести сегмента и является главной центральной осью и сегмента, и его эллипса инерции. Вторая главная центральная ось и сегмента, и его эллипса инерции перпендикулярна оси симметрии. Если сегмент отличен от круга, то эллипс инерции сегмента вытянут вдоль хорды сегмента, в этом случае главный момент инерции сегмента относительно оси симметрии будет максимальным. Если сегмент есть круг, то все моменты инерции главные и равны между собой.

Пусть сегмент D отличен от круга, то есть хорда γ_0 есть отрезок. Из формулы (8.1) следует, что момент сопротивления сечения при изгибе пропорционален главному моменту инерции сечения. Поэтому, чтобы найти максимальный момент сопротивления, расположим искомый круговой сегмент D в осях координат Ox_1x_2 так, чтобы площадь сегмента D была вытянута вдоль оси Ox_2, то есть так, чтобы хорда γ_0 имела начало в точке $O(0,0)$ и лежала на оси Ox_2 в полуплоскости $x_2 > 0$. Тогда ось Ox_1 параллельна оси симметрии, то есть главной центральной оси $\left\{x_2 = \dfrac{a_2}{2}\right\}$ искомого сегмента D. Искомую дугу γ будем моделировать как проекцию круговой траектории $(x_1(\bar{t},\bar{\psi}), x_2(\bar{t},\bar{\psi}))$, выходящую из нуля и приходящую в точку $(a_1, a_2) = (0, l)$. Тогда соответствующие восьмимерные траектории $x(\bar{t},\bar{\psi})$ выходят из нуля и приходят в граничные точки $x^1 \in \mathbb{R}^8$ такие, что $\pi(x^1) = (0, a_2, a_3)$, $a_2 = l \geqslant 0$, $a_3 = S > 0$. Опираясь на теорему 3.1, построим алгоритм решения поставленной Задачи.

Алгоритм вычисления максимального момента сопротивления кругового сегмента при изгибе, если дуга сегмента неизвестна
Алгоритм-1

Входные данные: длина хорды сегмента $a_2 = l > 0$, площадь сегмента $a_3 = S > 0$;

Начало Алгоритма-1:

1. По формулам (7.1) вычисляется величина $\bar{t}$;
2. По формулам (7.2)–(7.4) вычисляется сопряженный вектор $\bar{\psi}(0, a_2, a_3)$;
3. По формулам (4.5), (4.6) вычисляется оптимальная дуга
$$\gamma = \{(\tilde{x}_1(\tau,\bar{\psi}), \tilde{x}_2(\tau,\bar{\psi})), \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_2(0) = 0,\ \tau \in (0, \bar{t}\ ]\},$$
такая, что $(\tilde{x}_1(\bar{t},\bar{\psi}), \tilde{x}_2(\bar{t},\bar{\psi})) = (0, a_2)$;
4. Вычисляется искомый контур кругового сегмента $\gamma\gamma_0 = \partial D$, где $\gamma_0 = \{(0,\ l(1-t)), t \in [0,1]\}$;
5. Вычисляется ордината центра тяжести $c_2 = \dfrac{a_2}{2}$;

6. По формуле (4.12) вычисляется момент инерции кругового сегмента относительно оси Ox_1: $I_1 = 2\tilde{x}_8(\bar{t}) = 2a_8$;

7. По теореме Гюйгенса-Штейнера ([10], с. 52.) вычисляется
$$\widehat{I}_1 = I_1 - a_3 c_2^2 = 2a_8 - \frac{a_2^2 a_3}{4}$$
— главный момент инерции фигуры D относительно нейтральной оси $\{x_2 = a_2/2\}$;

8. Из параметрического задания дуги γ с использованием формул (7.10), (7.11) выводится соответствующее уравнение окружности:
$$\left(x_1 + \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_3}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_3}\right)^2 = \frac{a_2^2}{4\sin^2\dfrac{\bar{t}}{2}}.$$
Вычисляются величины
$$(\widehat{x}_2)^{max} = \begin{cases} a_2/2, & \bar{t} \in (0, \pi], \\ \dfrac{a_2}{2\sin \bar{t}/2}, & \bar{t} \in (\pi, 2\pi); \end{cases}$$

9. По формуле (8.1) вычисляется минимальный момент сопротивления при изгибе построенного сегмента D относительно его нейтральной оси $\{x_2 = a_2/2\}$:
$$\widehat{W}_1 = \frac{\widehat{I}_1}{(\widehat{x}_2)^{max}} = \begin{cases} \dfrac{8a_8 - a_2^2 a_3}{2a_2}, & \bar{t} \in (0, \pi], \\ \dfrac{8a_8 - a_2^2 a_3}{2a_2} \sin \bar{t}/2, & \bar{t} \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Выходные данные: ∂D; $\widehat{W}_1$.

Конец Алгоритма-1.

Если хорда γ_0 стягивается в точку, то сегмент D разворачивается в круг площади $a_3 = S$, ∂D проходит через ноль. Модифицируя Алгоритм-1 для этого случая, построим

Алгоритм-2

Входные данные: длина хорды сегмента $a_2 = 0$, площадь круга $a_3 = S > 0$;

Начало Алгоритма-2:

1. Вычисляется $\bar{t} = 2\pi$;

2. Строится окружность $\gamma = \partial D$:

$$\left(x_1 - \sqrt{\frac{a_3}{\pi}}\right)^2 + x_2^2 = \frac{a_3}{\pi};$$

3. Вычисляется момент инерции круга I_1 относительно нейтральной оси круга $\{x_2 = 0\}$;

4. По формуле (8.1) вычисляется минимальный момент сопротивления при изгибе построенного круга D относительно его нейтральной оси:

$$W_1 = \frac{a_3^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}.$$

Этот результат совпадает с известным, приведенным в [9], с. 172.

Конец Алгоритма-2.

Выходные данные: ∂D; $\widehat{W}_1$.

Замечание 8.3. *Максимальное напряжение в построенном сечении D, возникающее при чистом прямом изгибе, если изгибающий момент равен постоянному значению M [9], есть величина*

$$\sigma_{max} = \frac{M}{\widehat{W}_1}. \tag{8.2}$$

Заметим, что на основе полученного Алгоритма-1 можно построить Алгоритм-3, вычисляющий эллипс инерции (3.10) полученного кругового сегмента D, центрированный в центре тяжести сечения (c_1, c_2). Это позволит применить полученный результат к изучению вращательных свойств однородных плоских круговых сегментов массы $m = a_3$ в зависимости от длины хорды l. А именно, позволит вычислять модуль угловой скорости вращения ω_θ таких сегментов D вокруг оси $L = (\cos\theta, \sin\theta)$, проходящей через центр тяжести сегмента, с кинетической энергией вращения для любого $\theta \in [0, 2\pi)$, равной $V = 1/2$ [6]:

$$\omega_\theta^2 = \frac{1}{\widehat{I}_1 \cos^2\theta + \widehat{I}_2 \sin^2\theta}. \tag{8.3}$$

Благодаря теореме Гюйгенса-Штейнера можно вычислять эллипс инерции относительно произвольного полюса, лежащего в плоскости Ox_1x_2.

В случае чистого прямого изгиба предполагается, что плоские поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга вокруг центра кривизны нейтральной оси стержня. В рассмотренном случае круговых сегментов, не являющихся кругами, угловая скорость ω_0 минимальна, так как $\widehat{I}_1$ максимальный, и кривизна оси балки $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{E\widehat{I}_1} = \dfrac{M}{E}\omega_0^2$ минимальна (E постоянная величина)[9]. Это значит, что деформации балки минимальны, если изгибающая сила направлена перпендикулярно оси симметрии сегмента.

В случае только лишь чистого изгиба величина $|\omega_\theta|$ коррелирует с деформациями балки, если нагружающая сила направлена по оси $L^\perp = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

9 Заключение

В заключение сделаем краткий обзор полученных результатов. Итак, в данной статье было продолжено [1, 7, 8] исследование субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Были исследованы механические свойства двухточечной граничной задачи конструктивного управления для траекторий, проецирующихся на плоскость распределения в положительно ориентированные контуры. Далее была полностью исследована задача оптимального управления с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ в частном случае круговых управлений. В предшествующей работе [1] круговые управления были найдены с помощью интегрирования вертикальной подсистемы гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина в анормальном случае. В этой работе в результате интегрирования горизонтальной подсистемы гамильтоновой системы в специальном круговом случае были получены явные параметризации анормальных круговых траекторий, проекции которых на трехмерное подпространство $Ox_1x_2x_3$ лежат в верхнем полупространстве $x_3 > 0$. Была исследована оптимальность полученного пучка круговых траекторий, выходящих из нуля. Затем была описана заметаемая оптимальными траекториями круговая поверхность как график функции первых трех переменных и исследованы ее свойства. В заключение была решена двухточечная граничная задача оптимального управления в классе круговых управлений с помощью сведения к случаю Гейзенберга и использования параметрического задания круговой поверхности.

Во второй части статьи полученные теоретические сведения были применены к моделированию профиля однородной балки в виде кругового сегмента по неполным данным о сегменте. Благодаря явным параметризациям восьмимерных круговых траекторий, имеющим параметрами заданные длину хорды и площадь сегмента, удалось построить кратчайшую дугу сегмента и восьмимерную точку, в которую входит круговая траектория в конечный момент времени. И, как следствие, удалось получить все статические характеристики искомого однородного кругового сегмента, опираясь на механические свойства конечной точки исходной задачи управления.

Затем балка с теоретически построенным сечением теоретически подвергалась чистому прямому изгибу. На основе известных сведений из теории сопротивления материалов и полученных статических величин была получена формула для максимального момента сопротивления сегмента-сечения при чистом прямом изгибе, если нагружающая сила направлена перпендикулярно оси симметрии сегмента. Последовательность вычисления максимального момента сопротивления сегмента при изгибе была оформлена в виде двух алгоритмов: Алгоритма-1 и Алгоритма-2.

Следствием из теоремы о механических свойствах конечной точки стал Алгоритм-3, который вычисляет эллипс инерции плоского кругового сегмента с заданными хордой и массой относительно заданного полюса в плоскости пластины. Если полюс находится в центре тяжести сегмента, алгоритм вычисляет угловую скорость вращения кругового сегмента относительно произвольной оси, проходящей через центр тяжести, и косвенно характеризует деформации балки при чистых изгибах: чем больше угловая скорость, перпендикулярная нагружающей силе, тем больше кривизна оси стержня.

Полученные алгоритмы позволяют создать интерактивный программный комплекс для построения круговых сегментов и вычисления величины максимального момента сопротивления сегмента при изгибе по длине хорды и площади искомого кругового сегмента. Это позволит, например, в интерактивном режиме сравнивать по прочности балки с сечениями-сегментами одинаковой площади или имеющими одинаковые хорды, не прибегая к вычислению таблиц.

Список литературы

[1] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ // Математический сборник, 2020, Том 211, № 10, с. 112 – 138.

[2] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1961.

[3] *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

[4] Математика, ее содержание, методы и значение. Под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. М.: Изд. Академии наук СССР, 1956; т.1 - 296с.

[5] Геккелер И.В. Статика упругого тела: Пер. с нем. под ред. А. И. Лурье. Изд. 2-е, стереотипное.— М.: КомКнига, 2005. — 288 с.

[6] В.И.Арнольд Математические методы классической механики. — М.: Наука. 1989.

[7] Сачкова Е.Ф. Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифференциальные уравнения, 2008, том 44, № 12, с. 1704–1707.

[8] Yu.L.Sachkov, E.F.Sachkova, Symmetries and Parameterization of Abnormal Extremals in the Sub-Riemannian Problem with the Growth Vector (2; 3; 5; 8), //Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 15 (2019), 4: 577 – 585.

[9] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учеб. для вузов.– 10-е издание, перераб. и доп.–М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 1999.– 599с.

[10] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2 изд., перераб.и дополн.— М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.

[11] А.М.Вершик, В.Я.Гершкович. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 16. 1987. с.5–85.