Сопряженные точки в обобщенной задаче Дидоны

Ю. Л. Сачков

Ключевые слова: Субриманова геометрия, обобщенная задача Дидоны, группа Картана, сопряженные точки, локальная оптимальность.

Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5)$ [1, 2]. Эта задача возникает на группе Картана — связной односвязной свободной нильпотентной группе Ли ранга 2 глубины 3. Алгебра Ли группы Картана есть 5-мерная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ с таблицей умножения

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad \operatorname{ad} X_4 = \operatorname{ad} X_5 = 0.$$

Исследуется субриманова задача на группе Картана G для левоинвариантной субримановой структуры, порожденной ортонормированным репером X_1, X_2:

$$\dot{g} = u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g), \qquad g \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$g(0) = \mathrm{Id}, \quad g(t_1) = g_1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) имеет следующую геометрическую модель, называемую обобщенной задачей Дидоны. Даны две точки (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, число $S \in \mathbb{R}$, и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), такую, что область, ограниченная кривыми γ_0 и γ, имеет алгебраическую площадь S и центр масс c.

Данная работа продолжает исследование задачи (1)–(3), начатое в работах [3–7]. Основной результат этих работ — теорема 1, дающая верхнюю оценку времени разреза t_{cut}, т.е. времени потери глобальной оптимальности на геодезических.

Обозначим $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*G$. Пусть $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $C = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid H(\lambda) = 1/2\}$. В силу принципа максимума Понтрягина [8, 9], нормальные экстремали в задаче (1)–(3) удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$. В работах [3–7] была описана группа симметрий задачи (1)–(3), а также соответствующее первое время Максвелла t^1_{Max} — первое время, когда пересекаются симметричные геодезические одинаковой длины. Была также построена стратификация цилиндра $C = \sqcup_{i=1}^7 C_i$ в зависимости от разных качественных типов поведения геодезических. Первое время Максвелла t^1_{Max}, соответствующее симметриям задачи (1)–(3), задается на разных стратах C_i следующим образом:

$$\lambda \in C_1 \quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) = \min\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^z(k), \frac{2}{\sqrt{\alpha}} p_1^V(k)\right),$$

$$\lambda \in C_2 \quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}} p_1^V(k),$$

$$\lambda \in C_6 \quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) = \frac{4}{|c|} p_1^V(0),$$

$$\lambda \in C_i,\ i = 3, 4, 5, 7 \quad \Rightarrow \quad t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda) = +\infty.$$

Исследование Ю.Л. Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Здесь k, α, c — координаты на цилиндре C, $p_1^z(k)$ есть первый положительный корень уравнения $f_z(p,k) = \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p - (2\operatorname{E}(p) - p)\operatorname{cn} p = 0$, $p_1^V(k)$ есть первый положительный корень уравнения $f_V(p,k) = 0$, где

$$
\begin{aligned}
f_V(p) = \frac{4}{3} &\operatorname{sn} p \operatorname{dn} p\,(-p - 2(1-2k^2+6k^2\operatorname{cn} p^2)(2\operatorname{E}(p)-p) + (2\operatorname{E}(p)-p)^3 \\
&+ 8k^2\operatorname{cn} p \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p) + 4\operatorname{cn} p\,(1-2k^2\operatorname{sn} p^2)(2\operatorname{E}(p)-p)^2 \quad \text{для } \lambda \in C_1,\\
f_V(p) = \frac{4}{3} &\{3 \operatorname{dn} p\,(2\operatorname{E}(p) - (2-k^2)p)^2 + \operatorname{cn} p\,[8\operatorname{E}^3(p) - 4\operatorname{E}(p)(4+k^2) \\
&- 12\operatorname{E}^2(p)(2-k^2)p + 6\operatorname{E}(p)(2-k^2)^2p^2 \\
&+ p(16 - 4k^2 - 3k^4 - (2-k^2)^3p^2)]\operatorname{sn} p - \\
&- 2\operatorname{dn} p\,(-4k^2 + 3(2\operatorname{E}(p) - (2-k^2)p)^2)\operatorname{sn} p^2 + \\
&+ 12k^2\operatorname{cn} p(2\operatorname{E}(p) - (2-k^2)p)\operatorname{sn} p^3 - 8k^2\operatorname{sn} p^4\operatorname{dn} p\} \quad \text{для } \lambda \in C_2
\end{aligned}
$$

и $p_1^V(0)$ есть первый положительный корень уравнения $f_V^0(p) = (32p^2-1)\cos 2p - 8p\sin 2p + \cos 6p = 0$. Здесь sn, cn, dn, E суть эллиптические функции Якоби [10].

Основной результат работ [3–7] — следующая верхняя оценка времени разреза на геодезических.

Теорема 1 ([7], Теорема 6.1). *Для любого* $\lambda \in C$

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leqslant t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda).$$

Доказана следующая нижняя оценка первого сопряженного времени вдоль геодезических.

Теорема 2. *Для любого* $\lambda \in C$

$$t^1_{\mathrm{conj}}(\lambda) \geqslant t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda). \tag{4}$$

Теорема 2 интересна с двух точек зрения. Во-первых, она характеризует локальную оптимальность геодезических точным образом; имеется ряд случаев, когда неравенство (4) превращается в равенство. Во-вторых, Теорема 2 является важным шагом к описанию глобальной оптимальности геодезических, а именно, к доказательству высказанной в работе [7] гипотезы:

Гипотеза 1. *Для любого* $\lambda \in C$

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) = t^1_{\mathrm{Max}}(\lambda).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, Providence, 2002. **[2]** A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry*, Cambridge University Press, 2019. **[3]** Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Математический сборник*, **194**:9 (2003), 63–90. **[4]** Yu. L. Sachkov, “Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**:2 (2004), 457–494. **[5]** Ю. Л. Сачков, “Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны”, *Математический сборник*, **197**:2 (2006), 95–116. **[6]** Ю. Л. Сачков, “Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Математический сборник*, **197**:4 (2006), 123–150. **[7]** Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Математический сборник*, **197**:6 (2006), 111–160.

[8] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1961. **[9]** А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005. **[10]** Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002.

Ю. Л. Сачков
Институт программных систем им.
А. К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
E-mail: yusachkov@gmail.com

Поступило
07.06.2020
Исправленный вариант