Периодические оптимальные по быстродействию управления на двухступенных свободных нильпотентных группах Ли

Ю.Л. Сачков* †

31 марта 2020 г.

УДК 517.977

Аннотация

Для двухступенных свободных нильпотентных групп Ли описаны симплектические слоения и функции Казимира.

Рассмотрена левоинвариантная задача быстродействия, для которой множество допустимых скоростей есть строго выпуклый компакт в первом слое алгебры Ли, содержащий начало координат внутри себя. Для вертикальной подсистемы гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина описаны интегралы. Описаны свойства решений этой подсистемы для малых рангов бивектора Пуассона.

1 Введение

Рассматриваются двухступенные свободные нильпотентные группы Ли. Для соответствующих коалгебр Ли описаны симплектические слоения и функции Казимира.

Далее, рассмотрена левоинвариантная задача быстродействия, для которой множество допустимых скоростей есть строго выпуклый компакт в первом слое алгебры Ли, содержащий начало координат внутри себя. К этой задаче применен принцип максимума Понтрягина, для вертикальной подсистемы соответствующей гамильтоновой системы описаны интегралы. Описаны свойства решений этой подсистемы (типа постоянства и периодичности) для малых рангов бивектора Пуассона.

2 Задача оптимального управления

Пусть $\mathfrak{g}$ есть двухступенная свободная нильпотентная алгебра Ли с $k \geq 2$ образующими:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} + \mathfrak{g}^{(2)}, \\
&\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{span}\{X_i \mid i = 1, \dots, k\}, \\
&\mathfrak{g}^{(2)} = \operatorname{span}\{X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq k\}, \\
&[X_i, X_j] = X_{ij}, \quad \operatorname{ad} X_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq k, \\
&\dim \mathfrak{g} = k(k+1)/2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

*Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

†Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Институт программных систем им. А.К.Айламазяна РАН, yusachkov@gmail.com

Пусть G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Будем считать X_i, X_{ij} левоинвариантными векторными полями на G.

Модель для векторных полей X_i, X_{ij} на $G \cong \mathbb{R}^{k(k+1)/2} = \{(x_1, \dots, x_k;\ x_{12}, \dots, x_{(k-1)k})\}$ можно выбрать в следующем виде [11]:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j>i} \frac{x_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \sum_{j<i} \frac{x_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ji}}, \quad i = 1, \dots, k,$$
$$X_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \quad 1 \le i < j \le k.$$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ есть выпуклый компакт, содержащий начало координат внутри себя. Рассмотрим следующую задачу быстродействия [2]:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i X_i, \quad q \in G, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in U, \tag{2.2}$$
$$q(0) = \mathrm{id}, \quad q(t_1) = q_1, \tag{2.3}$$
$$t_1 \to \min. \tag{2.4}$$

При $U = -U$ получаем субфинслерову задачу [4–7], а если U есть эллипсоид с центром в нуле, то задача субриманова [1–3].

В случае $k = 2$, G есть группа Гейзенберга, и решение задачи (2.2)–(2.4) было получено Х.Буземаном [12] и В.Н.Берестовским [5].

Субриманов случай $U = \{\sum_{i=1}^{k} u_i^2 \le 1\}$ был впервые рассмотрен Р.Брокеттом [8], и был полностью исследован для $k = 3$ О.Мясниченко [9]. Некоторые результаты для $k = 4$ были получены Л.Рицци и У.Серресом [10].

Существование оптимальных управлений в задаче (2.2)–(2.4) следует стандартным образом из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова [2].

3 Симплектическое слоение

Перед началом исследования экстремалей в задаче (2.2)–(2.4), рассмотрим функции Казимира и *симплектическое слоение* (разбиение на коприсоединенные орбиты) коалгебры Ли $\mathfrak{g}^*$ [13]. Это важно для исследование экстремалей в этой задаче.

Пусть $p^0 \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим через S_{p^0} *симплектичекий лист* (орбиту коприсоединенного представления) для точки p^0:

$$S_{p^0} = \left\{ \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(p^0) \mid g \in G \right\} \subset \mathfrak{g}^*.$$

Далее в теореме 1 получено явное описание листа S_{p^0}.

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы, соответствующие левоинвариантному реперу на G:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad h_{ij}(\lambda) = \langle \lambda, X_{ij} \rangle, \quad \lambda \in T^*G.$$

Из таблицы умножения для скобки Ли (2.1) получаем следующую таблицу умножения для скобки Пуассона:

$$\{h_i, h_j\} = h_{ij}, \quad \{h_{ij}, h_l\} = \{h_{ij}, h_{lm}\} = 0. \tag{3.1}$$

Гамильтонианы h_i, h_{ij} будем считать координатами на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$.

Бивектор Пуассона (т.е. матрица попарных скобок Пуассона между базисными гамильтонианами h_i, h_{ij}) определяется кососимметрической матрицей

$$M = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ -h_{12} & 0 & \dots & h_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -h_{1k} & -h_{2k} & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{so}(k). \tag{3.2}$$

Для вектора $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, рассмотрим линейную функцию

$$I_a = \sum_{i=1}^{k} a_i h_i, \qquad I_a \ : \ \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}.$$

Далее, для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$ рассмотрим аффинное подпространство

$$L_{p^0} = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid h_{ij}(p) = h_{ij}(p^0),\ I_a(p) = I_a(p^0)\ \forall a \in \ker M_{p^0}\} \subset \mathfrak{g}^*,$$

где $M_{p^0} = (h_{ij}(p^0))$ есть соответствующая матрица (3.2). Очевидно, что

$$\dim L_{p^0} = \dim S_{p^0} = \operatorname{rank} M_{p^0}.$$

Теорема 1. *Для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$ выполнено равенство $S_{p^0} = L_{p^0}$.*

4 Функции Казимира на $\mathfrak{g}^*$

Напомним, что *функцией Казимира* называется такая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, что

$$\{h, h_i\} = \{h, h_{ij}\} = 0 \qquad \forall i, j. \tag{4.1}$$

Имеется $k(k-1)/2$ очевидных функций Казимира

$$h_{ij}, \qquad 1 \le i < j \le k. \tag{4.2}$$

Теорема 2. (1) *Если $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ существуют всего $k(k-1)/2$ независимых функций Казимира (4.2).*

(2) *Если $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, то на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, кроме функций Казимира (4.2), существует еще одна, не зависящая от них:*

$$C(p) = I_{a(p)}(p) = \sum_{i=1}^{k} a_i(p) h_i(p),$$

где

$$a_i = \sum_{\substack{j_l \ne i \\ j_1, \dots, j_{2n} \text{ разные}}} (-1)^{\sigma + i} h_{j_1 j_2} \cdots h_{j_{2n-1} j_{2n}}, \qquad i = 1, \dots, k,$$

σ — четность перестановки $(j_1, \dots, j_{2n})$.

Функция Казимира C есть однородный полином степени $n+1 = (k+1)/2$ на $\mathfrak{g}^*$.

5 Принцип максимума Понтрягина и интегралы гамильтоновой системы

Применим принцип максимума Понтрягина (ПМП) [2] к задаче (2.2)–(2.4). Гамильтониан принципа максимума равен $\sum_{i=1}^k u_i h_i(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$. Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\dot{h}_i = -\sum_{j=1}^k u_j h_{ij}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{5.1}$$

$$\dot{h}_{ij} = 0, \quad 1 \le i < j \le k, \tag{5.2}$$

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \tag{5.3}$$

а условие максимальности есть

$$\sum_{i=1}^k u_i(t) h_i(\lambda_t) = \max_{v \in U} \sum_{i=1}^k v_i h_i(\lambda_t) = H(h(\lambda_t)), \tag{5.4}$$

где

$$H(h_1, \dots, h_k) := \max_{v \in U} \sum_{i=1}^k v_i h_i$$

есть опорная функция множества U [14]. Функция H выпукла, положительно однородна и непрерывна.

Вдоль экстремальных траекторий $H \equiv \mathrm{const} \ge 0$. Анормальный случай

$$H \equiv 0 \Leftrightarrow h_1 = \dots = h_k \equiv 0$$

можно опустить, так как распределение $\Delta = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_k)$ удовлетворяет равенствам $\Delta^2 = \Delta + [\Delta, \Delta] = TG$, поэтому по условию Гоха [2] все локально оптимальные анормальные траектории одновременно нормальны. Поэтому рассмотрим нормальный случай $H \equiv \mathrm{const} > 0$. В силу однородности H можно считать $H = 1$.

Будем далее предполагать дополнительно, что множество U строго выпукло. Тогда максимизированный гамильтониан H является C^1-гладким на $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, а максимум в (5.4) достигается на управлении $u = \nabla H = (\partial H/\partial h_1, \dots, \partial H/\partial h_k)$ [14]. Обозначим $H_i = \partial H/\partial h_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда вертикальная подсистема (5.1), (5.2) гамильтоновой системы ПМП принимает вид

$$\dot{h}_i = -\sum_{j=1}^k h_{ij} H_j, \quad \dot{h}_{ij} = 0, \quad 1 \le i < j \le k. \tag{5.5}$$

Замечание. *Если $M = 0$, то все решения $h_i(t)$ системы* (5.5) *постоянны, поэтому управления $u(t)$ постоянны и оптимальны.*

Теорема 3. *Система* (5.5) *имеет следующие интегралы:*

(1) *функции Казимира h_{ij}, $1 \le i < j \le k$, а также гамильтониан H, при $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$,*

(2) *функции Казимира h_{ij}, $1 \le i < j \le k$, и C, а также гамильтониан H, при $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$, симплектичекий лист S_{p^0} есть инвариантное множество системы (5.5). В частности, любая функция I_a, $a \in \ker M_{p^0}$, постоянна не решениях этой системы.

Теорема 4. *Пусть $p^0 \in H^{-1}(1)$ и $\operatorname{rank} M_{p^0} = 2$. Тогда решение $p(t)$ системы (5.5) с начальным условием $p(0) = p^0$ существует и единственно для любого $t \in \mathbb{R}$.*

(1) *Если $\nabla H(p^0) \in \ker M$, то $p(t) \equiv p^0$. Соответствующее управление $u(t)$ оптимально.*

(2) *Если $\nabla H(p^0) \notin \ker M$, то $p(t)$ есть регулярная C^1-гладкая периодическая плоская кривая. Соответствующее управление $u(t)$ периодическое.*

Теорема 5. *Пусть $U = \left\{\sum_{i=1}^k u_i^2 \leq 1\right\}$. Тогда:*

1. *помимо интегралов, указанных в теореме 3, имеется еще $n = [k/2]$ независимых интегралов,*

2. *если $k \geq 4$, то решения системы (5.5) общего вида непериодические.*

Список литературы

[1] Richard Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, AMS, 2002

[2] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. *Геометрическая теория управления.* – М.: Физматлит, 2005.

[3] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry*, Cambridge University Press, 2019.

[4] Берестовский В.Н., Однородные многообразия с внутренней метрикой II, *Сибирский математический журнал*, 30:2 (1989), 14–28

[5] В. Н. Берестовский, Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского, *Сиб. матем. журн.*, 35:1 (1994), 3–11

[6] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, and Mario Sigalotti, Sub-Finsler structures from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions, *J. Dyn. Control Syst.* 23 (2017), no. 3, 547–575.

[7] A.Ardentov, E. Le Donne, Yu. Sachkov, Sub-Finsler geodesics on Cartan group, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 36-60

[8] R. Brockett, Nonlinear Control and Differential Geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, August 16-24, 1983, Warszawa, pp. 1357–1368.

[9] O. Myasnichenko, Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem, *J. Dyn. Control Syst.* 8 (2002), no. 4, 573–597.

[10] L. Rizzi, U. Serres. On the cut locus of free, step two Carnot groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017, V. 145, pp. 5341–5357.

[11] E. Le Donne, G. Speight, Lusin approximation for horizontal curves in step 2 Carnot groups, *G. Calc. Var.* (2016) 55: 111.

[12] H. Busemann, The isoperimetric problem in the Minkowski plane. AJM 69 (1947), 863–871.

[13] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, AMS, 2004

[14] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970