Субфинслеровы структуры на группе Энгеля*

Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.

10 сентября 2018 г.

Аннотация

Рассматривается однопараметрическое семейство левоинвариантных субфинслеровых задач на 4-мерной нильпотентной группе Ли с 2-мя образующими, глубины 3. Индикатриса субфинслеровых структур является квадратом, повернутым на произвольный угол в распределении. Применяются методы теории оптимального управления. Описаны анормальные и особые нормальные траектории, доказана их оптимальность. Охарактеризованы особые траектории, ведущие на границу множества достижимости за фиксированное время. Построен релейный фазовый поток, получены оценки числа переключений на релейных траекториях. Описана структура всех нормальных экстремалей. Исследованы смешанные траектории.

Введение

Субфинслерова геометрия является естественным обобщением субримановой геометрии. Субриманова структура на гладком многообразии M задается векторным распределением Δ и скалярным произведением в Δ. Субфинслерова структура отличается тем, что вместо скалярного произведения задана норма в Δ. Для субримановой структуры индикатриса (множество векторов единичной длины) есть эллипсоид в Δ, а для субфинслеровой структуры индикатриса есть выпуклое центрально симметричное множество в Δ, содержащее начало координат внутри себя.

Заметный интерес к субфинслеровой геометрии возник в последние годы в связи с её применениями в геометрической теории групп [1], изометрически однородных пространствах [2], теории управления [3]. Важными вопросами субфинслеровой (как и субримановой) геометрии являются описание кратчайших и сфер, при этом естественными простейшими случаями являются левоинвариантные структуры на нильпотентных группах Ли. Левоинвариантная субфинслерова задача на группе Гейзенберга была исследована в работе [4]. Нильпотентные l_∞ субфинслеровы структуры в случаях Мартине и Грушина были изучены в работе [5].

В данной работе исследовано семейство левоинвариантных субфинслеровых структур на простейшей нильпотентной группе Ли глубины 3 — группе Энгеля. Индикатриса этого однопараметрического семейства структур получена поворотами квадрата на произвольный угол относительно стандартного базиса в алгебре Энгеля. Соответствующие субфинслеровы задачи рассматриваются как задачи оптимального управления. Описаны экстремальные траектории, исследуется их оптимальность.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

1 Постановка задачи. Существование решений

Алгебра Энгеля — это 4-мерная нильпотентная алгебра Ли с 2-мя образующими, глубины 3. В стандартном базисе алгебры Энгеля $L = \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ таблица умножения имеет вид $[f_1, f_2] = f_3$, $[f_1, f_3] = f_4$, $\operatorname{ad} f_4 = 0$. Связная односвязная группа Ли M с алгеброй Ли L называется группой Энгеля. В некоторых координатах $M \cong \mathbb{R}^4_{x,y,z,v}$, и алгебра Энгеля реализуется левоинвариантными векторными полями на M:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\\
f_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v},\\
f_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial v},\\
f_4 &= \frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

Определим векторные поля

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \cos\varphi f_1 + \sin\varphi f_2, \quad X_2 = -\sin\varphi f_1 + \cos\varphi f_2, \qquad \varphi \in [0, \pi/4],\\
&X_3 = f_3, \quad X_4 = f_4.
\end{aligned}
$$

В данной работе рассматривается следующее семейство субфинслеровых задач на группе Энгеля ($\varphi \in [0, \pi/4]$):

$$
\begin{aligned}
&\dot q = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in M, \quad u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|) \le 1\}, && (1)\\
&q(0) = q_0 = \mathrm{Id}, \qquad q(T) = q_1, && (2)\\
&T \to \min. && (3)
\end{aligned}
$$

Существование оптимальных управлений следует из теорем Рашевского–Чжоу и Филиппова [6].

2 Принцип максимума Понтрягина

Введем гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$, $i = 1, \dots, 4$, и соответствующие им гамильтоновы векторные поля $\vec h_i \in \operatorname{Vec}(T^*M)$.

Теорема 1 (ПМП, [7, 6]). *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $q(t), t \in [0, T]$, оптимальны, то существуют кривая $\lambda_t \in T^*_{q(t)}M$ и число $\nu \le 0$, для которых выполнены условия:*

$$
\begin{aligned}
&\dot\lambda_t = u_1(t)\vec h_1(\lambda_t) + u_2(t)\vec h_2(\lambda_t), && (4)\\
&u_1(t)h_1(\lambda_t) + u_2(t)h_2(\lambda_t) = H(\lambda_t) = (|h_1| + |h_2|)(\lambda_t),\\
&\lambda_t \ne 0,\\
&H(\lambda_t) + \nu \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Гамильтонова система (4) имеет 3 интеграла — функции Казимира на коалгебре Ли L^*: h_4, $E = h_3^2/2 - (\sin\varphi h_1 + \cos\varphi h_2)h_4$ и гамильтониан H.

3 Анормальные траектории

Пусть $\nu = 0$.

Теорема 2. *Оптимальные анормальные управления имеют вид* $u(t) \equiv u_{a\pm} = \pm(\operatorname{tg}\varphi, 1)$*, и все такие управления оптимальны.*

Анормальные траектории суть однопараметрические подгруппы в M*, соответствующие левоинвариантным полям* $\pm f_2$*; они задают оптимальный синтез на анормальном многообразии* $A = \{e^{tf_2}(\mathrm{Id}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4 Виды нормальных экстремальных дуг

Пусть $-\nu = H(\lambda_t) > 0$. Экстремальная дуга λ_t, $t \in I = (\alpha, \beta) \subset [0, T]$, называется:

- релейной дугой, если $\operatorname{card}\{t \in I \mid h_1 h_2(\lambda_t) = 0\} < \infty$,
- особой дугой, если выполняется одно из двух условий: $h_1(\lambda_t) \equiv 0$ (h_1 — особая дуга) или $h_2(\lambda_t) \equiv 0$ (h_2 — особая дуга),
- смешанной дугой, если она состоит из конечного числа релейных и особых дуг.

Замечание. *Если* $h_i(\lambda_t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$*, то* $u_i(t)|_{(\alpha,\beta)} \equiv s_i := \operatorname{sgn} h_i(\lambda_t)|_{(\alpha,\beta)}$.

5 Особые дуги

Введем обозначения для сторон квадрата U:

$$U_{i\pm} = \{(u_1, u_2) \in U \mid u_i = \pm 1\}, \qquad i = 1, 2.$$

Теорема 3. *Любая* h_1*-особая дуга удовлетворяет одному из следующих условий:*

a) $h_1 = h_3 = h_4 \equiv 0, \quad h_2 \equiv \text{const} \neq 0, \quad \operatorname{sgn} h_2 = \pm 1, \quad u \in U_{2\pm}$,

b) $h_1 = h_3 \equiv 0, \quad h_4 \neq 0, \quad h_2 \equiv \text{const} \neq 0, \quad \operatorname{sgn} h_2 = \pm 1, \quad u(t) \equiv u_{a\pm}$.

Теорема 4. *Любая* h_2*-особая дуга удовлетворяет одному из следующих условий:*

a) $h_2 = h_3 = h_4 \equiv 0, \quad h_1 \equiv \text{const} \neq 0, \quad \operatorname{sgn} h_1 = \pm 1, \quad u \in U_{1\pm}$,

b) Только при $\varphi = \pi/4$*:*
$h_2 = h_3 \equiv 0, \quad h_4 \neq 0, \quad h_1 \equiv \text{const} \neq 0, \quad \operatorname{sgn} h_1 = \pm 1, \quad u(t) \equiv u_{a\pm} = (\pm 1, \pm 1)$.

Следствие 1. *Все особые траектории оптимальны.*

Обозначим через $\mathcal{A}_{i\pm}(T)$ множество достижимости системы (1), (2) за время T с условием на управление $u \in U_{i\pm}$ при $i = 1, 2$. Для описания его границы $\partial\mathcal{A}_{i\pm}(T)$ к системе (1), (2) применяется принцип максимума Потргягина в геометрической постановке [6], в которой оптимальность управления понимается как попадание конца соответствующей траектории на искомую границу $q(T) \in \partial\mathcal{A}_{i\pm}(T)$. Соответствующая гамильтонова система есть система (4) с условием $u_i(t) \equiv s_i$. Максимизированный гамильтониан принимает вид $H = |h_1| + |h_2|$. Для описания экстремальных управлений в каждом случае $i = 1, 2$ исследован фазовый портрет системы (4) на плоскости (h_{3-i}, h_3), доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. *h_1-особые траектории с $u_2 \equiv \pm 1$, концы которых образуют множество, содержащее границу множества достижимости $\partial\mathcal{A}_{2\pm}$, имеют один из двух типов кусочно-постоянного управления u_1:*

a) с двумя переключениями и соответствующими тремя значениями: 1 либо -1, $\pm\operatorname{tg}\varphi$ и 1 либо -1; без ограничений на временные промежутки;

b) при $\varphi \neq \pi/4$ с неограниченным числом переключений (и двумя переключениями при $\varphi = \pi/4$) между 1 и -1; времена между переключениями со значением $u_1 = -1$ одинаковы, обозначим их через T_-, времена движения между переключениями с $u_1 = 1$ также одинаковы и выражаются следующим образом: $T_+ = \frac{\cos\varphi \pm \sin\varphi}{\cos\varphi \mp \sin\varphi} T_-$, $\varphi \neq \pi/4$; время до первого переключения и время после последнего переключения соответственно не могут превышать этих значений;

Теорема 6. *h_2-особые траектории с $u_1 \equiv \pm 1$, концы которых образуют множество, содержащее границу множества достижимости $\partial\mathcal{A}_{1\pm}$, имеют кусочно-постоянное управление u_2 с двумя переключениями между значениями 1 и -1 и без ограничений на временные промежутки.*

6 Релейный поток

Если $h_1 h_2(\lambda_t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$, то $u(t)|_{(\alpha,\beta)} \equiv (s_1, s_2)$, поэтому релейные экстремали удовлетворяют следующей гамильтоновой системе с гамильтонианом $H = |h_1| + |h_2|$:

$$\begin{cases} \dot h_1 = -s_2 h_3, \\ \dot h_2 = s_1 h_3, \\ \dot h_3 = (s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi) h_4, \\ \dot h_4 = 0, \\ \dot q = s_1 X_1 + s_2 X_2. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая симметрию $(\lambda, q) \mapsto (k\lambda, q)$, $k > 0$, будем считать далее, что $H(\lambda_t) \equiv 1$.

Введем на квадрате $\{(h_1, h_2) \mid H(\lambda) = 1\}$ угловую координату $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$h_1 = \operatorname{sgn}(\cos\theta)\cos^2\theta, \quad h_2 = \operatorname{sgn}(\sin\theta)\sin^2\theta.$$

Тогда вертикальная часть системы (5) принимает следующую форму:

$$\begin{cases} \dot\theta = \dfrac{h_3}{|\sin 2\theta|}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi n}{2}, \\ \dot h_3 = (s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi) h_4, \quad s_1 = \operatorname{sgn}\cos\theta, \quad s_2 = \operatorname{sgn}\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) сохраняется группой симметрий $G = \{\mathrm{Id}, \varepsilon^1\} \cong \mathbb{Z}_2$, где

$$\varepsilon^1 \;:\; (h_1, h_2, h_3, h_4) \mapsto (-h_1, -h_2, h_3, -h_4), \quad (s_1, s_2) \mapsto (-s_1, -s_2).$$

Факторизуя по действию этой группы, можно свести рассмотрение системы (6) к фундаментальной области этой группы $\{(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4 \mid h_4 \geq 0\}$.

На основе исследования фазового портрета системы (6) строится релейный поток.

Предложение 1. *Пусть $\lambda \in L^* \cap \{H = 1\}$ и $h_4 \geq 0$.*

Если ($\varphi \in [0, \pi/4)$ и $E < h_4\cos\varphi$) или $\varphi = \pi/4$, то для любого $t > 0$ существует единственное решение λ_t системы (6), удовлетворяющее начальному условию $\lambda_0 = \lambda$, и соответственно единственная релейная траектория $q(t) = \pi(\lambda_t) =: \mathrm{Exp}(\lambda, t)$.

Если $\varphi \in [0, \pi/4)$ и $E = h_4 \cos\varphi$, то для любого $T > 0$ существует конечное число решений $\{\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N\}$, $t \in [0, T]$, системы (6) с начальным условием $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_0^N = \lambda$, и соответственно конечное число релейных траекторий $\{q^1(t), \dots, q^N(t)\} = \{\pi(\lambda_t^1), \dots, \pi(\lambda_t^N)\} =: \mathrm{Exp}(\lambda, t)$.

Определим время разреза вдоль релейных траекторий:

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) := \sup\{T > 0 | \text{ хотя бы одна из траекторий } \mathrm{Exp}(\lambda, t) \text{ оптимальна при } t \in [0, T]\}.$$

7 Оптимальность релейных траекторий

7.1 Релейные траектории с малой энергией E

Теорема 7. *Если релейная экстремаль $\lambda_t, t \in [0, +\infty)$, удовлетворяет условиям*

$$\varphi \in [0, \pi/4), \qquad -|h_4| \cos\varphi < E \le -|h_4| \sin\varphi,$$

то она оптимальна, т.е. $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_0) = +\infty$.

7.2 Релейные траектории с большой энергией E

С помощью необходимых условий оптимальности [8, 5] доказана следующая оценка:

Теорема 8. *Если ($\varphi \in [0, \pi/4)$ и $-|h_4| \sin\varphi < E$) или $\varphi = \pi/4$, то оптимальные релейные траектории имеют не более 10 переключений. В частности, в этом случае $t_{\mathrm{cut}}(\lambda_0) < +\infty$.*

8 Общий вид нормальных экстремалей

Предложение 2. *Для любой нормальной экстремали $\lambda_t, t \in [0, T]$, существуют моменты времени $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T$, для которых выполняются условия:*

- $h_1 h_2(\lambda_{t_i}) = 0$, $i = 1, \dots, n$,
- $\forall i = 1, \dots, n-1 \quad h_1 h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0$ *или*
  $h_1(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \equiv 0, \quad h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0$ *или*
  $h_2(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \equiv 0, \quad h_1(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0$.

Таким образом, любая нормальная экстремаль является релейной, особой или смешанной.

9 Смешанные экстремальные дуги

Предложение 3. *Пусть $h_4 \ge 0$. Особые экстремальные дуги могут примыкать к релейным дугам только в точках, удовлетворяющих следующим условиям:*

- $\varphi \in (0, \pi/4]$, $\theta = 3\pi/2$, $h_3 = 0$, *в этом случае* $u(t) \equiv u_{a-}$,
- $\varphi = \pi/4$, $\theta = \pi$, $h_3 = 0$, *в этом случае* $u(t) \equiv u_{a-} = (-1, -1)$.

10 Заключение

В данной работе описана структура экстремальных траекторий в семействе левоинвариантных субфинслеровых задач на группе Энгеля и получены оценки числа переключений на оптимальных траекториях. Ряд важных вопросов по этим задачам остается открытым:

- точное описание времени разреза и множества разреза,
- структура и регулярность субфинслеровой сферы.

Этим вопросам будут посвящены дальнейшие работы.

Авторы выражают благодарность Энрико Ле Донне за обсуждения задачи.

Список литературы

[1] Pierre Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, Ann. of Math. (2) 129 (1989), no. 1, 1—60.

[2] В.Н. Берестовский, Однородные пространства с внутренней метрикой. II, Сиб. мат. журнал 30 (1989), no. 2, 14—28, 225.

[3] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, and Grégoire Charlot, Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5 (2005), no. 4, 957—990 (electronic).

[4] H. Busemann, The isoperimetric problem in the Minkowski plane. AJM 69 (1947), 863–871.

[5] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, Mario Sigalotti, Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for some Nilpotent Distributions, J. Dyn. Control Syst. (2017) 23: 547.

[6] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.

[7] Л.С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.

[8] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze, Symplectic geometry for optimal control, Nonlinear controllability and optimal control, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 133, Dekker, New York, 1990, pp. 263– 277.