ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2016, том ??, ??, с. **??–??**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

ВЫРОЖДЕННЫЕ АНОРМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ С ВЕКТОРОМ РОСТА $(2,3,5,8)$

© 2016 г. Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова

Аннотация

Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5,8)$. Описаны и исследованы анормальные экстремали, ортогональные кубу распределения. Изучены геометрические свойства двумерной поверхности в пространстве состояний, на которой соответствующие анормальные траектории задают оптимальный синтез.

Ключевые слова: Субриманова задача, анормальные траектории.

1 Введение

В этой работе рассматривается вариационная задача, которую можно поставить несколькими эквивалентными способами.

(1) Геометрическая постановка. Рассмотрим две точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные гладкой кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Зафиксируем произвольные данные $S \in \mathbb{R}$, $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$, $M = (M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}) \in \mathbb{R}^3$. Задача заключается в том, чтобы соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная контуром $\gamma_0 \cup \gamma$, имела площадь S, центр масс c, и моменты 2-го порядка, равные M.

(2) Алгебраическая постановка. Пусть L есть свободная нильпотентная алгебра Ли с двумя образующими X_1, X_2 ступени 4, а G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли L. Будем рассматривать X_1, X_2 как левоинвариантные векторные поля на G. Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру (G, Δ, g), заданную этими полями как ортонормированным репером: $\Delta_q = \operatorname{span}(X_1(q), X_2(q))$, $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$. Задача заключается в отыскании субримановых кратчайших, соединяющих заданные точки $q_0, q_1 \in G$:

$$\begin{aligned}
&q(t) \in G, \qquad q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,\\
&\dot q(t) \in \Delta_{q(t)},\\
&l = \int_0^T \sqrt{g(\dot q, \dot q)}\, dt \to \min.
\end{aligned}$$

(3) Задача оптимального управления. Рассмотрим векторные поля X_1, X_2 на $\mathbb{R}^8$:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{1}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7}. \tag{2}$$

Для заданных точек $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^8$ требуется найти решение задачи оптимального управления

$$\dot x = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1, \tag{4}$$

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{5}$$

Эта задача называется *нильпотентной субримановой задачей с вектором роста* $(2,3,5,8)$, или просто $(2,3,5,8)$*-задачей.* (Вычисление вектора роста распределения Δ, порожденного полями X_1, X_2, приведено далее, см. (15) – (18).) Для изучения этой задачи есть несколько важных причин:

- эта задача есть нильпотентная аппроксимация общей субримановой задачи с вектором роста (2,3,5,8), см. [1, 2, 3, 4, 5],
- эта задача является естественным продолжением известных субримановых задач: субримановой задачи на группе Гейзенберга (задача Дидоны, вектор роста (2,3)), см. [6, 7], и субримановой задачи на группе Картана (обобщенная задача Дидоны, вектор роста (2,3,5)), см. [9, 10, 11, 12, 13],
- эта задача включается в естественную бесконечную цепочку субримановых задач ранга 2 на свободных нильпотентных группах Ли ступени r, $r \in \mathbb{N}$, а также в естественную 2-мерную решетку субримановых задач ранга d на свободных нильпотентных группах Ли ступени r, $(d,r) \in \mathbb{N}^2$,
- эта задача является простейшей субримановой задачей на 4-ступенной группе Карно.

В данной работе мы продолжаем подробное исследование $(2,3,5,8)$-задачи, начатое в работе [8]. Заметим, что эта задача была упомянута в работе [14] как субриманова задача с гладкими кратчайшими.

1.1 Постановка задачи

Нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5,8)$ ставится как задача оптимального управления (3) – (5), или, в координатах,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u_1,\\
&\dot{x}_2 = u_2,\\
&\dot{x}_3 = -\frac{x_2}{2}u_1 + \frac{x_1}{2}u_2,\\
&\dot{x}_4 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}u_2,\\
&\dot{x}_5 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}u_1,\\
&\dot{x}_6 = \frac{x_1^3}{6}u_2,\\
&\dot{x}_7 = -\frac{x_1 x_2^2}{4}u_1 + \frac{x_1^2 x_2}{4}u_2,\\
&\dot{x}_8 = -\frac{x_2^3}{6}u_1,\\
&x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1, \tag{7}$$

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,dt \to \min. \tag{8}$$

Допустимые управления $u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2)$, допустимые траектории $x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([0, T], \mathbb{R}^8)$.

Таблица умножения в алгебре Ли, порожденной полями X_1, X_2 (см. (1), (2)), имеет вид:

$$[X_1,\, X_2] = X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{9}$$

$$[X_1,\, X_3] = X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1\frac{\partial}{\partial x_6} + x_2\frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{10}$$

$$[X_2,\, X_3] = X_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} + x_1\frac{\partial}{\partial x_7} + x_2\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{11}$$

$$[X_1,\, X_4] = X_6 = \frac{\partial}{\partial x_6}, \tag{12}$$

$$[X_2,\, X_4] = \Big[X_1,\, X_5\Big] = X_7 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{13}$$

$$[X_2,\, X_5] = X_8 = \frac{\partial}{\partial x_8}. \tag{14}$$

Эта таблица умножения изображена схематически на Рис. 1.

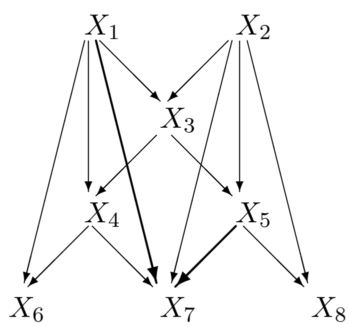

Рис. 1. Алгебра Ли с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$

Как показано в работе [8], в пространстве $\mathbb{R}^8$ можно ввести умножение, превращающее это пространство в группу Ли G так, чтобы поля $X_1, \ldots, X_8$ стали левоинвариантным репером. Закон умножения в группе Ли G имеет тогда следующий вид (см. п. 2.1 [8]):

$$\begin{aligned}
&x = (x_1, \ldots, x_8), \quad y = (y_1, \ldots, y_8), \quad z = (z_1, \ldots, z_8) \in G = \mathbb{R}^8,\\
&z_1 = x_1 + y_1,\\
&z_2 = x_2 + y_2,\\
&z_3 = x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),\\
&z_4 = x_4 + y_4 + \frac{1}{2}(x_1(x_1+y_1) + x_2(x_2+y_2) + x_1y_3),\\
&z_5 = x_5 + y_5 - \frac{1}{2}y_1(x_1(x_1+y_1) + x_2(x_2+y_2)) + x_2y_3,\\
&z_6 = x_6 + y_6 + \frac{x_1}{12}(2x_1^2y_2 + 3x_1y_1y_2 - 2y_2^3 + 6x_1y_3 + 12y_4),\\
&z_7 = x_7 + y_7 + \frac{1}{24}(3x_1^2y_2(2x_2+y_2) - x_2(3x_2y_1^2 + 6y_1^2y_2 + 4(y_2^3 - 6y^4))\\
&\qquad + x_1(-6x_2^2y_1 + 4y_1^3 + 6y_1y_2^2 + 24x_2y_3 + 24y_5)),\\
&z_8 = x_8 + y_8 + \frac{x_2}{2}(-2x_2^2y_1 + 2y_1^3 - 3x_2y_1y_2 + 6x_2y_3 + 12y_5).
\end{aligned}$$

Последовательные степени распределения $\Delta = \mathrm{span}(X_1,\, X_2)$ имеют вид:

$$\Delta^2 = \Delta + [\Delta,\, \Delta] = \mathrm{span}(X_1,\, X_2,\, X_3), \tag{15}$$
$$\Delta^3 = \Delta^2 + [\Delta,\, \Delta^2] = \mathrm{span}(X_1,\, \dots,\, X_5), \tag{16}$$
$$\Delta^4 = \Delta^3 + [\Delta,\, \Delta^3] = \mathrm{span}(X_1,\, \dots,\, X_8), \tag{17}$$

откуда видно, что распределение Δ имеет *вектор роста*

$$(\dim \Delta_x,\, \dim \Delta_x^2,\, \dim \Delta_x^3,\, \dim \Delta_x^4) = (2,\, 3,\, 5,\, 8), \qquad x \in \mathbb{R}^8. \tag{18}$$

В силу инвариантности субримановой задачи относительно левых сдвигов на группе Ли $G \cong \mathbb{R}^8$, можно считать, что начальная точка есть единичный элемент $x^0 = 0$.

Существование оптимальных траекторий в субримановой задаче (6) – (8) стандартно следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова [15]. Стандартным образом также можно перейти от задачи минимизации субримановой длины l к задаче минимизации действия

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T (u_1^2 + u_2^2)dt \to \min .$$

1.2 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим кокасательное расслоение пространства состояний $T^*\mathbb{R}^8 = \{(x, \psi) |\, x \in \mathbb{R}^8,\, \psi \in T_x^*\mathbb{R}^8\}$, будем обозначать его элементы $\lambda = (x,\, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$. Определим функцию Понтрягина:

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \psi,\, u_1X_1(x) + u_2X_2(x)\rangle + \frac{\nu}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right), \qquad \lambda \in T^*\mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Принцип максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом (см. [15, 16]).

Теорема 1.1 *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$ оптимальны, то существуют липшицева кривая $\lambda(t) = (x(t),\, \psi(t)) \in T^*\mathbb{R}^8$ и число $\nu \in \{-1,\, 0\}$, для которых следующие условия выполняются для п.в. $t \in [0, T]$:*

$$\dot\lambda(t) = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda(t)), \tag{19}$$
$$h_{u(t)}^\nu(\lambda(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} h_v^\nu(\lambda(t)), \tag{20}$$
$$(\nu,\, \lambda(t)) \neq (0, 0). \tag{21}$$

Здесь и далее через $\vec{h}$ обозначается гамильтоново векторное поле на $T^*\mathbb{R}^8$, соответствующее гамильтониану $h \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^8)$. Кривая $\lambda(t)$ называется *экстремалью*, а удовлетворяющие условиям принципа максимума траектория $x(t)$ и управление $u(t)$ называются *экстремальными*. Случай $\nu = -1$ называется *нормальным*, а случай $\nu = 0$ — *анормальным*.

Легко видеть (мы покажем это в п. 2.2), что анормальные экстремали удовлетворяют условию $\lambda(t) \perp \Delta^2$, то есть вдоль этих экстремалей $\langle\lambda,\, X_1\rangle = \langle\lambda,\, X_2\rangle = \langle\lambda,\, X_3\rangle = 0$. Цель данной работы — описание и исследование анормальных экстремалей, удовлетворяющих более сильному условию $\lambda(t) \perp \Delta^3$, то есть $\langle\lambda,\, X_1\rangle = \dots = \langle\lambda,\, X_5\rangle = 0$. Мы называем такие экстремали *вырожденными анормальными*.

1.3 Обобщенная перепараметризация управлений и траекторий

Рассмотрим линейную по управлениям систему

$$\dot x = \sum_{i=1}^m u_iX_i(x), \qquad x \in M, \qquad u = (u_1,\, \dots,\, u_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{22}$$

Пусть даны управление $u \in L^\infty([a,\, b],\, \mathbb{R}^m)$ и функция $t \in \mathrm{Lip}([\tilde{a},\, \tilde{b}], [a,\, b])$. Управление $\tilde{u}(s) = t'(s)u(t(s)) \in L^\infty([\tilde{a},\, \tilde{b}],\, \mathbb{R}^m)$ называется *обобщенной перепараметризацией управления* $u(t)$.

Пусть $s_0 \in [\tilde{a},\, \tilde{b}]$, $t_0 = t(s_0)$. Если $x(t)$ — траектория системы (22) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующая управлению $u(t)$, то $\tilde{x}(s) = x(t(s))$ — траектория системы (22) с начальным условием $\tilde{x}(s_0) = x_0$, соответствующая управлению $\tilde{u}(s)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\tilde{x}(s) = t'(s)\sum_{i=1}^{m} u_i(t(s))X_i(x(t(s))) = \sum_{i=1}^{m}\tilde{u}_i(s)X_i(\tilde{x}(s)),\\
&\tilde{x}(s_0) = x(t(s_0)) = x(t_0) = x_0.
\end{aligned}$$

Траектория $\tilde{x}(s) = x(t(s)) \in \mathrm{Lip}([\tilde{a},\, \tilde{b}],\, M)$ называется *обобщенной перепараметризацией траектории* $x(t)$. Очевидно, что носитель обобщенной перепараметризации содержится в носителе исходной траекории:

$$\{\tilde{x}(s) |\, s \in [\tilde{a},\, \tilde{b}]\} \subset \{x(t) |\, t \in [a,\, b]\},$$

причем это включение может быть строгим. В частном случае, когда

$$t'(s) > 0 \text{ для п.в. } s \in [\tilde{a},\, \tilde{b}], \tag{23}$$

$$t(\tilde{a}) = a, \qquad t(\tilde{b}) = b, \tag{24}$$

функция $t : [\tilde{a},\, \tilde{b}] \to [a,\, b]$ возрастает и взаимно однозначна, а кривая $\tilde{x}(s) = x(t(s))$ является *перепараметризацией кривой* $x(t)$ в классическом смысле (см., например, [17]). Тогда носители кривых $\tilde{x}(s)$ и $x(t)$ совпадают: $\{\tilde{x}(s) \,|\, s \in [\tilde{a},\, \tilde{b}]\} = \{x(t) \,|\, t \in [a,\, b]\}$. При этом кривые $\tilde{x}(s)$ и $x(t)$ пробегаются в одном направлении и, вообще говоря, с разной скоростью. При обобщенной перепараметризации кривые $\tilde{x}(s)$ и $x(t)$ могут иметь разные носители, пробегаться в разных направлениях и с разной скоростью. Такие перепараметризации естественно возникают при описании анормальных траекторий.

2 Нормальные и анормальные экстремали

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \psi,\, X_i(x) \rangle$, $\lambda = (x,\, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$, $i = 1,\, \ldots,\, 8$, тогда $h_u^\nu(\lambda) = u_1h_1(\lambda) + u_2h_2(\lambda) + \dfrac{\nu}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)$. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (19) в этих обозначениях принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -h_3u_2,\\
\dot{h}_2 &= h_3u_1,\\
\dot{h}_3 &= h_4u_1 + h_5u_2,\\
\dot{h}_4 &= h_6u_1 + h_7u_2,\\
\dot{h}_5 &= h_7u_1 + h_8u_2,\\
\dot{h}_6 &= \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0,\\
\dot{x} &= u_1X_1(x) + u_2X_2(x).
\end{aligned} \tag{25}$$

2.1 Нормальный случай

Пусть $\nu = -1$. Тогда из условия максимума (20) получаем $u_i = h_i,\, i = 1,\, 2$, поэтому $\max\limits_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^{-1}(\lambda) = \dfrac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda)) =: H(\lambda)$. Следовательно, нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -h_3h_2, \\
\dot{h}_2 &= h_3h_1, \\
\dot{h}_3 &= h_4h_1 + h_5h_2, \\
\dot{h}_4 &= h_6h_1 + h_7h_2, \\
\dot{h}_5 &= h_7h_1 + h_8h_2, \\
\dot{h}_6 &= \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \\
\dot{x} &= h_1X_1(x) + h_2X_2(x).
\end{aligned} \tag{26}$$

Нормальный случай исследуется подробно в работе [18], где доказана неинтегрируемость по Лиувиллю вертикальной подсистемы нормальной гамильтоновой системы (26) для сопряженных переменных $h_1, \dots, h_8$.

2.2 Анормальный случай

Пусть $\nu = 0$. Тогда из условия максимума (20) для функции $h^0_u(\lambda) = u_1h_1(\lambda) + u_2h_2(\lambda)$ получаем

$$h_1(\lambda) = h_2(\lambda) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, $(u(t), \lambda(t))$ есть анормальная экстремальная пара тогда и только тогда, когда она удовлетворяет гамильтоновой системе (25), тождеству (27) и условию $\lambda(t) \neq 0$.

Предложение 2.1 *Если $(u(t), \lambda(t))$ есть анормальная экстремальная пара, то любая ее обобщенная перепараметризация $(\tilde{u}(s), \tilde{\lambda}(s)) = (t'(s)u(t(s)), \lambda(t(s)))$ есть также анормальная экстремальная пара.*

Доказательство. Гамильтонова система (25) имеет вид

$$\frac{d\lambda}{dt}(t) = u_1(t)\vec{h}_1(\lambda(t)) + u_2(t)\vec{h}_2(\lambda(t)),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\lambda}}{ds}(s) = t'(s)\frac{d\lambda}{dt}(t(s)) = t'(s)(u_1(t(s))\vec{h}_1(\lambda(t(s))) + u_2(t(s))\vec{h}_2(\lambda(t(s)))) = \\
= \tilde{u}_1(s)\vec{h}_1(\tilde{\lambda}(s)) + \tilde{u}_2(s)\vec{h}_2(\tilde{\lambda}(s)).
\end{aligned}$$

Условие (27) также сохраняется:

$$h_i(\lambda(t)) \equiv 0 \Rightarrow h_i(\tilde{\lambda}(s)) = h_i(\lambda(t(s))) \equiv 0, \qquad i = 1, 2,$$

как и условие нетривиальности (21): $\lambda(t) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}(s) = \lambda(t(s)) \neq 0$. □

Замечание 2.1 *Для нормальных экстремалей гамильтониан H есть первый интеграл, поэтому в нормальном случае управления удовлетворяют тождеству*

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = h_1^2(\lambda(t)) + h_2^2(\lambda(t)) = 2H(\lambda(t)) \equiv \text{const}.$$

Следовательно, условие $|t'(s)| \equiv \text{const}$ необходимо для сохранения нормальности экстремалей при перепараметризациях.

Пусть $(u(t), \lambda(t))$ — анормальная экстремальная пара. Будем считать, что $u_1^2(t)+u_2^2(t) \not\equiv 0$, то есть $\lambda(t) \not\equiv \mathrm{const}$, в силу (25). Дифференцируя тождество (27), получаем $\dot h_1 = -h_3u_2 \equiv 0$, $\dot h_2 = h_3u_1 \equiv 0$, откуда

$$h_3(\lambda) \equiv 0 \tag{28}$$

вдоль анормальной экстремали. Тождества (27), (28) означают, что на анормальных экстремалях $h_1(\lambda) = h_2(\lambda) = h_3(\lambda) \equiv 0$, то есть $\langle\psi, X_1(x)\rangle = \langle\psi, X_2(x)\rangle = \langle\psi, X_3(x)\rangle \equiv 0$, иными словами, $\lambda \perp \Delta_x^2$.

Итак, в анормальном случае, подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для сопряженных переменных h_i принимает вид

$$\begin{aligned}
&h_1 = h_2 = h_3 = 0,\\
&h_4u_1 + h_5u_2 = 0,\\
&\dot h_4 = h_6u_1 + h_7u_2,\\
&\dot h_5 = h_7u_1 + h_8u_2,\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0.
\end{aligned}$$

Возможны следующие случаи:

1) *Невырожденный случай*: $h_4^2 + h_5^2 \not\equiv 0$,

2) *Вырожденный случай*: $h_4^2 + h_5^2 \equiv 0$.

Далее рассматривается только вырожденный случай; невырожденные анормальные экстремали будут исследованы в последующей работе [19].

2.3 Вырожденные анормальные управления

В вырожденном анормальном случае экстремальная пара $(u(t), \lambda(t))$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
&h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0, &(29)\\
&h_6u_1 + h_7u_2 = 0,\\
&h_7u_1 + h_8u_2 = 0,\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0\\
&h_6^2 + h_7^2 + h_8^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Тождество (29) означает, что вдоль анормальной экстремали $\lambda \perp \Delta_x^3$. То есть вырожденные анормальные экстремали аннигилируют куб распределения Δ.

Введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} h_6 & h_7\\ h_7 & h_8 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \det A.$$

Вырожденные анормальные управления $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ суть управления, удовлетворяющие условиям

$$A\begin{pmatrix} u_1\\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \mathrm{const} \neq 0. \tag{30}$$

Условие $u \not\equiv 0$ означает, что $\sigma = 0$.

Если $h_6^2 + h_7^2 \neq 0$, то из условий (30) получаем

$$u_1(t) = -\alpha(t)h_7, \quad u_2(t) = \alpha(t)h_6 \tag{31}$$

для некоторой функции $\alpha(t) \in L^\infty$. Если же $h_7^2 + h_8^2 \neq 0$, то

$$u_1(t) = -\alpha(t)h_8, \quad u_2(t) = \alpha(t)h_7 \tag{32}$$

для некоторой функции $\alpha(t) \in L^\infty$. Если выполнены оба условия $h_6^2 + h_7^2 \neq 0$ и $h_7^2 + h_8^2 \neq 0$, то имеют место оба равенства (31), (32) с разными, вообще говоря, функциями $\alpha(t)$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 2.2 *Пусть $(u(t), \lambda(t))$ — вырожденная анормальная пара, $u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv 0$. Тогда вдоль нее выполнены условия*

$$h_1 = \cdots = h_5 = 0, \qquad \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0,$$
$$\sigma = h_6 h_8 - h_7^2 = 0, \qquad h_6^2 + h_7^2 + h_8^2 \neq 0.$$

Если $h_6^2 + h_7^2 \neq 0$, то существует $\alpha(t) \in L^\infty$ такая,что

$$u_1(t) = -\alpha(t) h_7, \quad u_2(t) = \alpha(t) h_6.$$

Если $h_7^2 + h_8^2 \neq 0$, то существует $\alpha(t) \in L^\infty$ такая,что

$$u_1(t) = -\alpha(t) h_8, \quad u_2(t) = \alpha(t) h_7.$$

Следствие 2.1 *Любое вырожденное анормальное управление $u(t)$ есть обобщенная перепараметризация постоянного управления:*

$$u(t) = \alpha(t)\bar{u}, \qquad \bar{u} \equiv \mathrm{const}, \quad \alpha(t) \in L^\infty.$$

Обратно, любое управление такого вида есть вырожденное анормальное управление.

Найдем соответствующие траектории. Если $u(t) = \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \mathrm{const}$, то траектории имеют вид

$$\bar{x}_1(t) = \bar{u}_1 t, \quad \bar{x}_2(t) = \bar{u}_2 t, \quad \bar{x}_3(t) = 0, \tag{33}$$

$$\bar{x}_4(t) = \frac{1}{6}\left(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2\right)\bar{u}_2 t^3, \quad \bar{x}_5(t) = -\frac{1}{6}\left(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2\right)\bar{u}_1 t^3, \tag{34}$$

$$\bar{x}_6(t) = \frac{1}{24}\bar{u}_1^3 \bar{u}_2 t^4, \quad \bar{x}_7(t) = 0, \quad \bar{x}_8(t) = -\frac{1}{24}\bar{u}_1 \bar{u}_2^3 t^4. \tag{35}$$

Если $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$, $\bar{u} \equiv \mathrm{const}$, то $x(t) = \bar{x}(s(t))$, $s(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$.

Рассмотрим множество точек в $\mathbb{R}^8$, пробегаемых всеми такими траекториями:

$$D = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^8 \mid \exists \text{выроженная анормальная траектория}\, x(t),\ \exists\, t_1 > 0 :\ x(t_1) = \hat{x}\}.$$

Очевидно, что

$$D = \{e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(0) \,|\, u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}\},$$

где $e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(0)$ обозначает точку траектории уравнения $\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x)$, $x(0) = 0$, с постоянными управлениями u_i, в момент времени $t = 1$. То есть поверхность D есть объединение всех однопараметрических подгрупп группы Ли $G \cong \mathbb{R}^8$, касающихся распределения Δ. Используя явные формулы (33)– (35) для этих подгрупп, получаем:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^8 \,| \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right) x_2}{6}, \quad x_5 = -\frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right) x_1}{6}, \right.$$
$$\left. x_6 = \frac{x_1^3 x_2}{24}, \quad x_7 = 0, \quad x_8 = -\frac{x_1 x_2^3}{24} \right\}. \tag{36}$$

Назовем D *вырожденной анормальной поверхностью.*

3 Исследование на строгую анормальность

Анормальная траектория $x(t)$ называется *нестрого анормальной*, если она является проекцией нормальной экстремали $(x(t), \psi(t))$; в противном случае она называется *строго анормальной* [15]. Исследуем вырожденные анормальные траектории на строгую анормальность.

Предложение 3.1 *Пусть $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$ есть вырожденное анормальное управление, $\bar{u} \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $\alpha(t) \in L^\infty$. Управление $u(t)$ строго анормально тогда и только тогда, когда $\alpha(t) \not\equiv \mathrm{const}$.*

Замечание 3.1 *Тождества для функций из L^∞ понимаются почти всюду: для функций $f, g \in L^\infty[a, b]$ пишем $f \equiv g$, если существует $S \subset [a, b]$, $\mathrm{mes}(S) = 0$, такое что $f(t) = g(t)$ для всех $t \in [a, b] \setminus S$.*

Докажем предложение 3.1.

Доказательство. Пусть $\alpha(t) \equiv \mathrm{const}$, тогда $u(t) = \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv \mathrm{const}$. Легко видеть, что $h_1 = \bar{u}_1, h_2 = \bar{u}_2, h_3 = 0, h_4 = -\bar{u}_2, h_5 = \bar{u}_1, h_6 = h_7 = h_8 = 0$ есть решение вертикальной части нормальной гамильтоновой системы (26). Поэтому постоянное управление нестрого анормально.

Пусть $\alpha(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Имеем $|u(t)| = |\alpha(t)||\bar{u}|$. Если $|\alpha(t)| \not\equiv \mathrm{const}$, то $|u(t)|^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv \mathrm{const}$, и функции $h_1(t) = u_1(t)$, $h_2(t) = u_2(t)$ не могут удовлетворять гамильтоновой системе (26), так как $H = \dfrac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$ есть первый интеграл этой системы. Если же $|\alpha(t)| \equiv C = \mathrm{const}$, $\alpha(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то $\alpha(t)$ принимает оба значения $\pm C$, поэтому $\alpha(t)$ разрывна; тогда функции $u_i(t)$ разрывны, и функции $h_1(t) = u_1(t)$, $h_2(t) = u_2(t)$ опять не могут удовлетворять гамильтоновой системе (26). Поэтому непостоянные управления $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$, $\alpha(t) \not\equiv \mathrm{const}$, $\bar{u} = \mathrm{const} \neq 0$, строго анормальны. □

Следствие 3.1 *Все вырожденные анормальные траектории постоянной скорости ($u_1^2(t) + u_2^2(t) \equiv const$) гладкие.*

Доказательство. Это следует как из явных формул для вырожденных анормальных траекторий (33) – (35), так и из того, что эти траектории нормальны (а все нормальные траектории гладкие). □

4 Исследование на оптимальность

Изучим оптимальность вырожденных анормальных управлений в смысле функционала субримановой длины

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt = \int_0^T \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt \to \min.$$

Предложение 4.1 *Пусть $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$, $t \in [0, T]$, есть вырожденное анормальное управление, $\bar{u} \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $\alpha(t) \in L^\infty$. Управление $u(t)$ оптимально тогда и только тогда, когда функция $s(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$ монотонна.*

Замечание 4.1 *Функция $s(t) \in \mathrm{Lip}[0, T]$ является неубывающей тогда и только тогда, когда*

$$\dot{s}(t) \geqslant 0 \text{ для п.в. } t \in [0, T],$$

что эквивалентно условию

$$\alpha(t) \geqslant 0 \text{ для п.в. } t \in [0, T],$$

так как $\dot{s}(t) = \alpha(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Докажем предложение 4.1.

Доказательство. Пусть $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$, $\bar{u} \equiv \mathrm{const} \neq 0$, функция $s(t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau$ монотонна, $t \in [0, T]$. Управление $u(t)$ есть обобщенная перепараметризация управления $\tilde{u}(s) = \bar{u}$, $s \in [0, S]$, $S = s(T)$, поэтому соответствующие траектории связаны соотношением $x(t) = \tilde{x}(s(t))$. (Мы предполагаем $T > 0$, поэтому $S \geqslant 0$ для неубывающей функции $s(t)$ и $S \leqslant 0$ для невозрастающей функции $s(t)$). Для первых двух компонент этих траекторий получаем

$$(x_1(t),\, x_2(t)) = (\bar{u}_1 s(t),\, \bar{u}_2 s(t)), \qquad t \in [0,\, T]. \tag{37}$$

Поэтому значение функционала на траектории $x(t)$ равно

$$l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}dt = |\bar{u}| \int_0^T |\dot{s}(t)|dt = |\bar{u}| \operatorname{sgn}(\dot{s}(t)) \int_0^T \dot{s}(t)dt = |\bar{u}||S|.$$

Следовательно, величина $l = |\bar{u}||S|$ равна расстоянию между концами $(x_1(0),\, x_2(0)) = (0, 0)$ и $(x_1(T),\, x_2(T)) = S \cdot (\bar{u}_1,\, \bar{u}_2)$ кривой (37), то есть минимуму длин всех кривых, соединяющих эти концы. Поэтому кривая $x(t)$, $t \in [0,\, T]$, оптимальна.

Если функция $s(t)$ немонотонна, то неоптимальность управления $u(t) = \alpha(t)\bar{u}$ вытекает из нижеприведенного общего предложения 4.2. □

Рассмотрим субриманову задачу

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \sum_{i=1}^k u_i X_i(x), \qquad x \in M, \qquad u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \\
&x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \\
&l = \int_0^T |u(t)|dt \to \min, \qquad |u| = \left(\sum_{i=1}^k u_i^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Докажем, что немонотонная перепараметризация регулярной траектории (то есть траектории, соответствующей необращающемуся в ноль управлению) неоптимальна.

Предложение 4.2 *Пусть управление* $u \in L^\infty([s_1,\, s_2], \mathbb{R}^k)$ *удовлетворяет неравенству* $|u(s)| \neq 0$ *для всех* $s \in [s_1,\, s_2]$. *Пусть перепараметризация времени* $s \in \mathrm{Lip}([t_1,\, t_2], [s_1,\, s_2])$ *является немонотонной функцией на отрезке* $[t_1,\, t_2]$.

Тогда управление $\tilde{u}(t) = u(s(t))\dot{s}(t)$ *неоптимально на отрезке* $[t_1,\, t_2]$.

Доказательство. 1) Докажем, что существует такой отрезок $[t_1',\, t_2'] \subset [t_1,\, t_2]$, что $s(t_1') = s(t_2')$, $s|_{[t_1', t_2']} \not\equiv \mathrm{const}$. Так как $s(t)$ немонотонна на отрезке $[t_1,\, t_2]$, существуют такие $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2 \in [t_1,\, t_2]$, что $\dot{s}(\bar{t}_1) > 0$, $\dot{s}(\bar{t}_2) < 0$. Пусть $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$ (случай $\bar{t}_1 > \bar{t}_2$ рассматривается аналогично). Если $s(\bar{t}_1) = s(\bar{t}_2)$, то можно положить $t_1' = \bar{t}_1$, $t_2' = \bar{t}_2$.

Пусть $s(\bar{t}_1) > s(\bar{t}_2)$. Так как функция $s(t)$ возрастает в точке $t = \bar{t}_1$, то по теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует такое $t_2' \in (\bar{t}_1,\, \bar{t}_2)$, что $s(t_2') = s(\bar{t}_1)$. Тогда можно положить $t_1' = \bar{t}_1$. Из неравенства $\dot{s}(t_1') \neq 0$ следует, что $s|_{[t_1', t_2']} \not\equiv \mathrm{const}$.

Случай $s(\bar{t}_1) < s(\bar{t}_2)$ рассматривается аналогично. Пункт 1) доказан.

2) Докажем, что $\displaystyle\int_{t_1'}^{t_2'} |\tilde{u}(t)|dt > 0$. Рассмотрим множество $P = \{t \in [t_1',\, t_2'] \mid \dot{s}(t) \neq 0\}$. Если его мера Лебега $\mathrm{mes}(P) = 0$, то $\dot{s}(t) = 0$ для п.в. $t \in [t_1',\, t_2']$, поэтому $s|_{[t_1', t_2']} \equiv \mathrm{const}$, что противоречит пункту 1). Поэтому $\mathrm{mes}(P) > 0$. Далее, для любого $t \in P$ имеем $|u(s(t))| > 0$ и $|\dot{s}(t)| > 0$, поэтому

$$\int_{t_1'}^{t_2'} |\tilde{u}(t)|dt = \int_P |u(s(t))||\dot{s}(t)|dt > 0. \tag{38}$$

3) Пусть $x(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, есть траектория, соответствующая управлению $u(s)$, с произвольным начальным условием $x(s_1)$. Тогда управлению $\tilde{u}(t) = u(s(t))\dot{s}(t)$ соответствует траектория $\tilde{x}(t) = x(s(t))$, $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что эта траектория неоптимальна. Имеем

$$\tilde{x}(t_1') = \tilde{x}(t_2'), \qquad l(\tilde{x}(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{u}(t)| dt.$$

Рассмотрим управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & t \in [t_1, t_2] \setminus [t_1', t_2'], \\ 0, & t \in [t_1', t_2'] \end{cases} \tag{39}$$

и соответствующую ему траекторию

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t \in [t_1, t_2] \setminus [t_1', t_2'], \\ \tilde{x}(t_1'), & t \in [t_1', t_2']. \end{cases} \tag{40}$$

Тогда обе траектории $\tilde{x}(t)$ и $\hat{x}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, соединяют точки $\tilde{x}(t_1')$ и $\tilde{x}(t_2)$, но

$$l(\tilde{x}(\cdot)) - l(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{u}(t)| dt - \int_{t_1}^{t_2} |\hat{u}(t)| dt = \int_{t_1'}^{t_2'} |\tilde{u}(t)| dt > 0$$

в силу пункта 2). Поэтому траектория $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, неоптимальна. □

5 Вырожденная анормальная поверхность

В этом пункте приведем некоторые свойства вырожденной анормальной поверхности

$$D = \{e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(0) \,|\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}\},$$

связанные с рассматриваемой субримановой задачей и геометрией группы Ли $G \cong \mathbb{R}^8$. Как видно из представления (36), D есть некомпактное гладкое двумерное многообразие (график отображения $(x_1, x_2) \mapsto (x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$).

Рассмотрим субриманово расстояние

$$d(x^0, x^1) = \inf \left\{ \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \;|\; x(t) \text{ — траектория системы (6) с граничными условиями (7)} \right\}$$

и субриманову сферу $S_R = \{x \in \mathbb{R}^8 \,|\, d(x^0, x) = R\}$, с центром в точке $x^0 = 0$ — единичном элементе группы Ли $G \cong \mathbb{R}^8$.

Векторное поле

$$X_0 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_5} + A \frac{\partial}{\partial x_6} + B \frac{\partial}{\partial x_7} + C \frac{\partial}{\partial x_8},$$
$$A = -\frac{x_1^4}{24} + \frac{x_1^2 x_2^2}{8} + x_7, \qquad B = \frac{x_1 x_2^3}{12} + \frac{x_1^3 x_2}{12} - 2x_6 + 2x_8, \qquad C = \frac{x_1^2 x_2^2}{8} - \frac{x_2^4}{24} - x_7,$$

удовлетворяет соотношениям

$$[X_0, X_1] = X_2, \qquad [X_0, X_2] = -X_1, \qquad X_0(x^0) = 0,$$

поэтому является симметрией субримановой задачи (6)–(8), см. [21]. Поэтому поток этого поля e^{tX_0} переводит оптимальные траектории в оптимальные траектории и сохраняет расстояние и сферы:

$$d(x^0, e^{tX_0}(x^1)) = d(x^0, x^1), \qquad e^{tX_0}(S_R) = S_R.$$

Предложение 5.1 (1) *Пусть* $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_8^1) \in D$. *Тогда оптимальное управление в задаче* (6) – (8) *можно выбрать в виде* $u_i = \dfrac{x_i^1}{T}$, $i = 1, 2$. *Соответствующая оптимальная траектория* $x(t)$, $t \in [0, T]$ *есть*

$$x_1(t) = x_1^1 \frac{t}{T}, \qquad x_2(t) = x_2^1 \frac{t}{T}, \qquad x_3(t) = 0, \tag{41}$$

$$x_4(t) = \frac{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2}{6} x_2^1 \left(\frac{t}{T}\right)^3, \qquad x_5(t) = -\frac{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2}{6} x_1^1 \left(\frac{t}{T}\right)^3, \tag{42}$$

$$x_6(t) = \frac{(x_1^1)^3 x_2^1}{24} \left(\frac{t}{T}\right)^4, \qquad x_7(t) = 0, \qquad x_8(t) = -\frac{x_1^1 (x_2^1)^3}{24} \left(\frac{t}{T}\right)^4. \tag{43}$$

(2) *Если* $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_8^1) \in D$, *то* $d(x^0, x^1) = \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2}$.

(3) *Если* $R > 0$, *то* $S_R \cap D$ *есть гладкая кривая, задающаяся уравнениями*

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad x_3 = x_7 = 0, \quad x_4 = \frac{x_2}{6} R^2, \quad x_5 = -\frac{x_1}{6} R^2, \quad x_6 = \frac{x_1^3 x_2}{24}, \quad x_8 = -\frac{x_1 x_2^3}{24}. \tag{44}$$

Векторное поле X_0 *касается кривой* $S_R \cap D$.

(4) *Если* $x^1 \in D$, *то функция* $x \mapsto d(x^0, x)$ *негладкая в точке* x^1.

Доказательство. (1) Из предложения 4.1 следует, что постоянное управление $u = \left(\dfrac{x_1^1}{T}, \dfrac{x_2^1}{T}\right)$ оптимально. Формулы (41)–(43) задают оптимальную траекторию $x(t)$ для этого управления с граничными условиями $x(0) = x^0$, $x(T) = x^1$.

(2) Длина оптимальной траектории, соединяющей точки x^0 и $x^1 \in D$, равна

$$\int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt = \int_0^T \sqrt{\frac{(x_1^1)^2}{T^2} + \frac{(x_2^1)^2}{T^2}} dt = \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2} = d(x^0, x^1). \tag{45}$$

(3) Имеем $S_R \cap D = \{x \in D \mid d(x^0, x) = R\} = \{x = (x_1, \ldots, x_8) \in D \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$, поэтому уравнения (44) следуют из уравнений (36) поверхности D. Кривую $S_R \cap D$ можно регулярно параметризовать полярным углом в плоскости x_1, x_2, поэтому она гладкая.

Покажем, что поле X_0 касается поверхности D. Из соотношений $[X_0, X_1] = X_2$, $[X_0, X_2] = -X_1$ получаем (см. п. 2.5 [15])

$$e^{tX_0} e^{u_1 X_1 + u_2 X_2} e^{-tX_0} = \exp\{e^{-t \operatorname{ad} X_0}(u_1 X_1 + u_2 X_2)\} = e^{v_1 X_1 + v_2 X_2},$$

где $v_1 = u_1 \cos t + u_2 \sin t$, $v_2 = u_2 \cos t - u_1 \sin t$. Поэтому

$$e^{tX_0} e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(x_0) = e^{v_1 X_1 + v_2 X_2} e^{tX_0}(x_0) = e^{v_1 X_1 + v_2 X_2}(x_0).$$

Следовательно, $e^{tX_0}(D) = D$, то есть поле X_0 касается поверхности D.

Но $e^{tX_0}(S_R) = S_R$, поэтому $e^{tX_0}(S_R \cap D) = S_R \cap D$, то есть поле X_0 касается кривой $S_R \cap D$.

(4) Каждая точка $x^1 \in D \setminus \{x^0\}$ соединяется с точкой x^0 анормальной кратчайшей (оптимальной вырожденной анормальной траекторией). В силу предложения 10.11 [20], субримановo расстояние $d(x^0, x)$ негладко в точке $x^1 \neq x^0$. Негладкость $d(x^0, x)$ в точке x^0 следует, например, из явной формулы (45) для сужения $d|_D$. $\square$

В заключение приведём несколько фактов о геометрии поверхности D и ее связи с объемлющей группой Ли $G \cong \mathbb{R}^8$.

Напомним, что *коммутантом группы Ли* G называется подгруппа G', порожденная всеми коммутаторами $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$; *коммутантом алгебры Ли* L называется подпространство, порожденное всеми коммутаторами $[X, Y]$, $X, Y \in L$. Если группа Ли G связна и односвязна, то ее коммутант G' есть связная группа Ли с алгеброй Ли L' (где L — алгебра Ли группы Ли G), см. [22].

Для группы Ли $G \cong \mathbb{R}^8$, рассматриваемой в данной статье, имеем (см. (9) – (14)):

$$L = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_8), \qquad L' = \operatorname{span}(X_3, \dots, X_8).$$

Поэтому G' есть орбита системы левоинвариантных полей $X_3, \dots, X_8$, проходящая через единичный элемент $0 \in G \cong \mathbb{R}^8$. В силу того, что поля $X_3, \dots, X_8$ коммутируют между собой, получаем

$$G' = \{e^{t_3X_3} \circ \dots \circ e^{t_8X_8}(0) \mid t_3, \dots, t_8 \in \mathbb{R}\} = \{x = (x_1, \dots, x_8) \in G \mid x_1 = x_2 = 0\}. \tag{46}$$

Последнее равенство следует из того, что пространство (46) шестимерно, а все поля $X_3, \dots, X_8$ его касаются.

Введем обозначение для множества точек в $G \cong \mathbb{R}^8$, достижимых вдоль вырожденных анормальных траекторий из точки $x \in G$:

$$D_x = \{e^{u_1X_1+u_2X_2}(x) \mid u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 5.1 (1) *Касательное пространство поверхности* D *в ее точке* $x \neq 0$ *есть*

$$T_xD = \operatorname{span}(x_1X_1(x) + x_2X_2(x),\, X_0(x)). \tag{47}$$

В случае $x = 0$ *имеем*

$$T_0D = \Delta_0 = \operatorname{span}(X_1(0), X_2(0)) = \operatorname{span}(\frac{\partial}{\partial x_1}(0), \frac{\partial}{\partial x_2}(0)). \tag{48}$$

(2) *Для любого* $x \in G$ *справедливо равенство* $D_x = x \cdot D$.

Если $y \in D_x$, *то* $T_yD_x = (L_x)_*T_{x^{-1}y}D$, *где* L_x — *левый сдвиг на элемент* $x \in G$, *а* $(L_x)_*$ — *его дифференциал. В частности,* $T_xD_x = \Delta_x$.

(3) *Если* $x^1, x^2 \in G'$, $x^1 \neq x^2$, *то* $D_{x_1} \cap D_{x_2} = \emptyset$. *Более того,* $G = \sqcup_{x \in G'} D_x$ *(объединение попарно непересекающихся множеств).*

(4) *Имеет место разложение в прямую сумму* $G = G' \times D$, *то есть для любого* $x \in G$ *существуют единственные элементы* $x' \in G'$ *и* $d \in D$ *такие, что* $x = x' \cdot d$.

Доказательство. (1) Пусть $0 \neq x \in D$. Как показано в доказательстве п. (3) предложения 5.1, справедливо включение $X_0(x) \in T_xD$. Осталось доказать включение $x_1X_1(x)+x_2X_2(x) \in T_xD$.

Рассмотрим кривую $\varphi(t) = e^{t(u_1X_1+u_2X_2)}(x^0)$, где $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$. Обозначим проекцию

$$\pi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x_1,\, x_2, \dots, x_8) \mapsto (x_1,\, x_2).$$

Тогда $\pi(\varphi(1)) = (u_1,\, u_2) = \pi(x)$. Но $\pi|_D$ биективно, так как D есть график отображения $(x_1,\, x_2) \mapsto (x_3, \dots, x_8)$. Поэтому из включений $\varphi(1) \in D$, $x \in D$ получаем $\varphi(1) = x$. Поэтому $\dot\varphi(1) = u_1X_1(x) + u_2X_2(x) = x_1X_1(x) + x_2X_2(x) \in T_xD$.

Итак, $X_0(x),\, x_1X_1(x) + x_2X_2(x) \in T_xD$, и равенство (47) следует из двумерности D.

Равенство (48) следует из явных формул (36).

(2) Все поля $u_1X_1 + u_2X_2$, $u_i = \text{const}$, левоинвариантны, поэтому $e^{u_1X_1+u_2X_2}(x) = x \cdot e^{u_1X_1+u_2X_2}(x^0)$, откуда $D_x = x \cdot D$.

Левый сдвиг $L_x : G \to G$, $z \mapsto x \cdot z$, переводит поверхность D в D_x, а точку $x^{-1} \cdot y \in D$ в точку $y \in D_x$. Поэтому $(L_x)_*(T_{x^{-1}\cdot y} D) = T_y D_x$. Если $y = x$, то $T_x D_x = (L_x)_*(T_0 D) = (L_x)_* \Delta(0) = \Delta(x)$ в силу левоинвариантности Δ.

(3) Пусть $x^1, x^2 \in G'$ и $D_{x^1} \cap D_{x^2} \neq \emptyset$, поэтому

$$D_{x^1} \cap D_{x^2} \ni e^{u_1^1 X_1 + u_2^1 X_2}(x^1) = e^{u_1^2 X_1 + u_2^2 X_2}(x^2).$$

Тогда

$$(u_1^1, u_2^1) = \pi(e^{u_1^1 X_1 + u_2^1 X_2}(x^1)) = \pi(e^{u_1^2 X_1 + u_2^2 X_2}(x^2)) = (u_1^2, u_2^2),$$

поэтому $e^{u_1^1 X_1 + u_2^1 X_2}(x^1) = e^{u_1^1 X_1 + u_2^1 X_2}(x^2)$, откуда $x^1 = x^2$. Для доказательства равенства $G = \sqcup_{x \in G'} D_x$ осталось показать, что $G = \cup_{x \in G'} D_x$, то есть что

$$\forall x \in G \quad \exists x' \in G' \quad \text{такое, что} \quad x \in D_{x'}. \tag{49}$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_8) \in G$, возьмем $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$ и $x' = e^{-u_1 X_1 - u_2 X_2}(x)$. Тогда $x' \in G'$, и свойство (49) доказано.

(4) Легко видеть, что элемент $x \in G$ однозначно определяет точку $x' \in G'$ и управления $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $x = e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(x')$. Обозначая $d = e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(x^0)$, получаем разложение $x = x' \cdot d$. □

Замечание 5.1 *Сравнивая выражения* (47) *и* (48)*, видим, что семейство касательных плоскостей* $T_x D$ *не инвариантно относительно левых сдвигов на группе Ли* G*. Поэтому и поверхность* D *не левоинвариантна. Как указано в п.* (2) *теоремы* 5.1*, при левом сдвиге на элемент* x *поверхность* D *переходит в* D_x.

Это любопытным образом связано с неинтегрируемостью распределения Δ*: если бы семейство касательных плоскостей* $T_x D$ *было левоинвариантным, то распределение* Δ *касалось бы поверхности* D *— что невозможно в силу неинтегрируемости распределения* Δ.

Замечание 5.2 *Разложение в прямое произведение* $G = G' \times D$ *может быть использовано для решения двухточечной задачи управления для системы* (6) *с граничными условиями* (7)*. Построим для конечной точки* x^1 *разложение* $x^1 = x' \cdot d$, $x' \in G'$, $d \in D$:

$$d = e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(x^0), \qquad u_1 = x_1^1, \qquad u_2 = x_2^1, \qquad x' = e^{-u_1 X_1 - u_2 X_2}(x^1).$$

Предположим, что мы умеем находить управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tilde{T}]$*, переводящее систему из точки* x^0 *в точку* x'*. Равенство* $x^1 = e^{u_1 X_1 + u_2 X_2}(x')$ *означает, что составное управление*

$$v(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & t \in [0, \tilde{T}], \\ (u_1, u_2), & t \in [\tilde{T}, \tilde{T} + 1] \end{cases}$$

переводит систему (6) *из точки* x^0 *в точку* x^1 *за время* $\tilde{T} + 1$*. За счет перепараметризации управлений этот переход можно совершить за любое наперед заданное время* T.

6 Заключение

В этой работе описаны и исследованы вырожденные анормальные траектории в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Эти траектории $x(t)$ соответствуют экстремалям $\lambda(t) = (x(t), \psi(t))$, аннулирующим распределение Δ^3, где Δ — распределение, порожденное ортонормированным репером субримановой структуры. Исследована строгая анормальность и оптимальность этих траекторий. Описана и исследована двумерная поверхность D, заполненная этими траекториями. На поверхности D построен синтез оптимальных траекторий, соответствующих постоянным управлениям.

В дальнейшем планируется изучение общих анормальных траекторий, они соответствуют экстремалям, аннулирующим распределение Δ^2, см. [19]. Особого интереса заслуживает исследование нормального геодезического потока в данной субримановой задаче, см. [18].

Список литературы

[1] *Gromov M.* Carnot-Carathéodory spaces seen from within, In: Sub-Riemannian geometry, vol. 144 of Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 79—323.

[2] *Mitchell J.* On Carnot-Carathéodory metrics, // J. Differential Geom., 21 (1985), pp. 35—45.

[3] *Bellaïche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry, In: Sub-Riemannian geometry, vol. 144 of Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 1–78.

[4] *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем// Докл. АН СССР. 1987. Т. 295.

[5] *Montgomery R.* A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. American Mathematical Society (2002).

[6] *Brockett R.* Control theory and singular Riemannian geometry, In: New Directions in Applied Mathematics, (P. Hilton and G. Young eds.), Springer-Verlag, New York, 11–27.

[7] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.

[8] *Gauthier J.-P. Sachkov Yu. L.* On the free Carnot (2, 3, 5, 8) group// Программные системы: теория и приложения. 2015. 6:2(25). С. 45–61.

[9] *Brockett R., Dai L.* Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability// In: Nonholonomic Motion Planning, Z. Li and J. Canny, Eds., Kluwer, Boston, 1993, 1–21.

[10] *Сачков Ю.Л.* Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, // Мат. Сборник, 194 (2003), 9: 63–90.

[11] *Сачков Ю.Л.* Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 2, S. 95–116.

[12] *Сачков Ю.Л.* Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 4, С. 123–150.

[13] *Сачков Ю.Л.* Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.

[14] *Monti R.* The regularity problem for sub-Riemannian geodesics // In: Geometric Control Theory and sub-Riemannian Geometry, Springer, INdAM Series 5 (2013), G. Stefani, U. Boscain, J.-P. Gauthier, A. Sarychev, M. Sigalotti (eds.).

[15] *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

[16] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов, М: Физматгиз, 1961.

[17] *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

[18] *Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л.* О неинтегрируемости геодезического потока в субримановых задачах на группах Карно глубины 4// в работе.

[19] *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Невырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8)// в работе.

[20] *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry// http://webusers.imj-prg.fr/ davide.barilari/Notes.php. 2015.

[21] *Sachkov Yu. L.* Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures // Transactions of the American Mathematical Society, 356 (2004), 2: 457–494.

[22] *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.