В. И. Гурман, Е. А. Трушкова, А. О. Блинов, Приближенная оптимизация управления на основе преобразований модели объекта, *Автомат. и телемех.*, 2009, выпуск 5, 13–23

Автоматика и телемеханика, № 5, 2009

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. **В.И. ГУРМАН, д-р техн. наук,**
Е.А. ТРУШКОВА, канд. физ.-мат. наук,
А.О. БЛИНОВ
(Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский)

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА[1]

Рассматривается подход к приближенному решению задач управления, использующий различные упрощающие преобразования модели объекта по принципу расширения или сужения области поиска решения и возможные конструктивные схемы его реализации. Он ориентирован на получение, вообще говоря, грубых приближений к глобальному решению с двусторонними оценками. Основное внимание уделяется эффективным нетрадиционным схемам преобразования множества скоростей (годографа) непрерывной системы и множества переходов дискретной системы. Полученные глобально приближенные решения могут рассматриваться как начальные приближения в той или иной универсальной итерационной процедуре оптимизации с целью уточнения.

1. Введение

В данной работе развивается подход к приближенному решению задач управления, опирающийся на общий принцип расширения [1], суть которого состоит в том, чтобы заменить исходную задачу управления со сложными ограничениями такой аналогичной задачей на расширенном (но в то же время – более простом) множестве, чтобы ее решение либо а) совпадало с решением исходной задачи, либо б) было близким к нему. Конструктивная реализация в случае а) ведет к точным методам поиска решения [2, 3], а в случае б) – к приближенным, причем приближенным изначально, а не на стадии численной реализации точных теоретических решений, что для сложных практических проблем вызывает подчас непреодолимые трудности. В этом случае разработан ряд эффективных схем, основанных на преобразованиях типа расширения вырожденных задач, характерных для приложений [4–6]. В данной работе рассматривается значительно более широкий класс подобных преобразований с целью упрощения задачи при поиске приближенных решений и их оценок, охватывающий преобразования множества скоростей (годографа) непрерывной управляемой системы или множества переходов дискретной системы.

С учетом этого построение модели на этапе постановки задачи и ее активные преобразования, эквивалентные и упрощающие приближенные, рассматриваются как важный ресурс при разработке методов поиска практически приемлемых решений.

Еще один аргумент – возможность эффективно решать на упрощенных моделях задачу синтеза позиционного управления с целью получения приближенно оптимальных алгоритмов управления с обратной связью, реализуемых в более точных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-01-00330-а и № 08-01-00274-а).

моделях или в реальных управляющих устройствах. Обратная связь позволяет в значительной мере скомпенсировать различия между характеристиками разных моделей объекта и самого объекта.

Для задач оптимизации

$$I(m_s) \to \inf_{\mathbf{D}} I = I_*$$

эти рассуждения конкретизируются следующим образом. Наряду с исходным множеством $\mathbf{D}$ вводятся два других $\mathbf{C}$ и $\mathbf{E}$, таких что $\mathbf{C} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{E}$. Тогда для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любого расширения $(\mathbf{E}, I)$ имеют место неравенства:

$$e = \inf_{\mathbf{E}} I \leqslant d = \inf_{\mathbf{D}} I \leqslant c = \inf_{\mathbf{C}} I, \quad I(m) - c \leqslant I(m) - d \leqslant \Delta = I(m) - e.$$

Если величина Δ достаточно мала, то соответствующий элемент m можно принять в качестве *оцененного приближенного решения* задачи $(\mathbf{D}, I)$, в то время как точное решение остается неизвестным. Подходящее приближение можно искать по следующей схеме: задавать множества $\mathbf{C}$ и $\mathbf{E}$ так, чтобы задачи $(\mathbf{C}, I)$ и $(\mathbf{E}, I)$ были проще исходной $(\mathbf{D}, I)$, и решать эти вспомогательные задачи; полученные решения аппроксимировать элементами из $\mathbf{D}$, а лучшую из этих двух аппроксимаций (с меньшей оценкой Δ) принимать в качестве приближенного решения $\widetilde{m}$ исходной задачи.

2. Преобразования типа расширений управляемых систем

Пусть имеется непрерывная управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbf{T} = [t_I, t_F], \quad u \in \mathbf{U}(t, x). \tag{1}$$

Представим ее как комбинацию следующих связей:

$$\dot{x} = v, \quad v \in \mathbf{V}(t, x) = f\left(t, x, \mathbf{U}(t, x)\right), \tag{2}$$

которые накладываются на произвольное множество пар функций $(x(t), u(t))$, выделяя из него множество $\mathbf{D}$ решений системы (1). Будем предполагать, как и во многих работах конструктивного и прикладного направления, что $x(t)$ – кусочно-гладкие, а $u(t)$, $v(t)$ – кусочно-непрерывные. Очевидно, что замена множества $\mathbf{V}(t, x)$ некоторым более широким $\mathbf{V}_E(t, x) \supset \mathbf{V}(t, x)$ в (2) приводит к расширению и множества решений $\mathbf{D}$. Таким образом, получаются расширения *первого типа*. Расширения *второго типа*, относящиеся к дифференциальной связи (2), получаются следующим образом. Вводится непрерывное и гладкое отображение

$$y = \eta(t, x), \quad \eta\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Далее строится новая управляемая система

$$\dot{y} = \eta_x v + \eta_t, \quad v \in \mathbf{V}(t, x), \quad \eta(t, x) = y, \tag{4}$$

или, другими словами, система

$$\dot{y} = \eta_x f(t, x, u) + \eta_t, \quad u \in \mathbf{U}(t, x), \quad x \in \mathbf{Q}(t, y) = \eta^{-1}(t, y). \tag{5}$$

Здесь

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad \eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Множество $\mathbf{E}_x$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям (5) шире, чем исходное множество $\mathbf{D}_x$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям (1). В самом деле если

$(x(t), u(t)) \in \mathbf{D}$, то $v(t) = \dot{x}(t)$, и тройка функций $(x(t), u(t), y(t)) = \eta\,(t, x(t))$ удовлетворяет (3) или (4) в силу равенства (5), т.е. $(x(t), u(t)) \in \mathbf{E}$. Следовательно,

$$(x(t), u(t)) \in \mathbf{D} \Rightarrow (x(t), u(t)) \in \mathbf{E}.$$

Это означает что $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$.

Аналогичные типы расширений вводятся и для дискретных систем

$$x(t+1) = f\,(t, x(t), u)\,, \quad t \in \{t_I, t+1, \ldots, t_F\}, \quad u \in \mathbf{U}\,(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^k, \tag{6}$$

иначе

$$x(t+1) \in \mathbf{\Pi}\,(t, x(t))\,, \quad \mathbf{\Pi}\,(t, x(t)) = f\,(t, x(t), \mathbf{U}\,(t, x(t)))\,. \tag{7}$$

Очевидно, замена множества $\mathbf{U}$ более широким множеством $\mathbf{U}_E$, $\mathbf{U}_E\,(t, x(t)) \supset \supset \mathbf{U}\,(t, x(t))$ (замена $\mathbf{\Pi}$ на $\mathbf{\Pi}_E \supset \mathbf{\Pi}$) приводит к расширению множества $\mathbf{D}$ всех решений (6). Тем самым получаются расширения *первого* типа.

Далее, для каждого t вводится произвольное отображение

$$\eta(t)\colon\ \mathbf{X}(t) \to \mathbf{Y}(t)$$

и строится новая дискретная управляемая система

$$\begin{gathered} y(t+1) = \eta\,(t+1, f\,(t, x(t), u(t)))\,, \\ u(t) \in \mathbf{U}\,(t, x(t))\,, \quad x(t) \in \mathbf{Q}\,(t, y(t)) = \eta^{-1}\,(t, y(t))\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Множество всех $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих (8), обозначим через $\mathbf{E}$.

Любое решение $(x(t), u(t)) \in \mathbf{D}$ удовлетворяет (8), т.е. $(x(t), u(t)) \in \mathbf{E}$. Следовательно $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$. Таким образом, получаются расширения *второго* типа.

В итоге вводится желаемый класс расширений $\mathbf{E}$ исходной дискретной системы (8), в котором в дальнейшем будет выбираться разрешающее расширение для решения той или иной задачи.

Существуют такие специфические расширения обоих типов, называемые *релаксациями*, которые обеспечивают инвариантность любых интегральных характеристик исходной системы. Одно из них, хорошо известное в теории управления [7], относится к первому типу и получается заменой множества скоростей его выпуклым замыканием:

$$\dot{x} \in \mathbf{V}_C(t, x) = \overline{\mathrm{co}}\,\mathbf{V}.$$

Релаксации второго типа возможны, в частности, для систем с неограниченным линейным управлением – непрерывных

$$\dot{x} = g(t, x, u_1) + h(t, x)u_2, \tag{9}$$

если (3) – многообразие полной управляемости предельной системы $\dfrac{dx}{d\tau} = h(t, x)u_2$, ее $(n-m)$-мерный интеграл, $m \geqslant k$ [8, 9]. Если матрица h в (9) не зависит от x, то интеграл $\eta(t, x)$ линеен по x и записывается явно: $y = \nu(t)x$, где $\nu(t)$ – матрица, ортогональная к $h(t)$ (т.е. $\nu(t)h(t) = 0$).

Для дискретных систем нет аналога релаксационного расширения первого типа непрерывных систем. Однако для определенного класса дискретных систем существуют расширения второго типа, аналогичные релаксационным непрерывным системам. В частности, это справедливо для дискретных систем вида

$$x(t+1) = g(t, x(t), u_1) + h(t, u_2), \quad u_2 \in \mathbb{R}^k$$

(в этом случае $y = \nu(t)x$, $\nu(t)$ должна быть ортогональна к $h(t-1)$, т.е. $\nu(t+1)h(t) = 0$).

Среди расширений второго типа выделим специальное, со скалярной функцией $y = \eta(t, x)$, которая порождает управляемые системы (4), (5) первого порядка. Для них разнообразные задачи управления, в том числе оптимального решаются непосредственно путем построения границ множеств достижимости:

$$
\begin{aligned}
&Y_R(t) = [y_l(t), y_u(t)],\ \dot y_{l,u} = \max, \min\left(\eta_x f(t,x,u) + \eta_t\right),\\
&y_{l,u}(t+1) - y_{l,u}(t) = \max, \min\left(\eta\left(t+1, f\left(t, x(t), u\right)\right) - \eta(t,x)\right),
\end{aligned}
$$

$\eta(t,x) = y_{l,u}(t)$, $u \in \mathbf{U}(t,x)$, $x \in \mathbf{X}(t)$, $y(t_I) = \eta(t_I, x(t_I))$. Назовем их расширениями типа Кротова, поскольку с их помощью получаются достаточные условия оптимальности и оценки, близкие по форме к условиям и оценкам Кротова [10].

3. Некоторые конструктивные схемы

Рассматривается управляемая система: непрерывная

$$\dot x = f(t,x,u), \quad t \in T = [t_I, t_F], \tag{10}$$

или дискретная

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in T = \{t_I, t_I + 1, \ldots, t_F\}, \tag{11}$$

и соответствующая задача оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
&x(t_I) = x_I, \quad (t_F, x(t_F)) \in \mathbf{\Gamma}, \quad x \in \mathbf{X}(t), \quad u \in \mathbf{U}(t,x),\\
&I = F\left(t_F, x(t_F)\right) \to \min.
\end{aligned}
$$

В соответствии с общим подходом процедура приближенного исследования подобной задачи состоит из следующих этапов: 1) выполняется преобразование типа расширения к задаче $(\mathbf{E}, I)$ из класса, для которого существует эффективный метод исследования, и находится ее решение; 2) строится подходящая аппроксимация этого решения в классе допустимых $\mathbf{D}$ исходной задачи в качестве ее приближенного решения; 3) находится его верхняя оценка Δ; 4) при необходимости найденное приближенное решение и оценка уточняются известными итерационными методами локального улучшения. Каждый из этапов может быть реализован неоднозначно. Особенно богатый выбор различных схем и их комбинаций имеется на первом этапе.

В [1, 4, 6] рассмотрен ряд схем, реализующих эту процедуру на основе преобразований второго типа для вырожденных или близких к ним задач. Здесь сосредоточим внимание на преобразованиях первого типа, порожденных расширением множества скоростей. В рассматриваемой стандартной форме задачи оптимального управления зависимости, описывающие эти множества, в значительной мере предопределяют метод решения. Конструктивно это можно выполнить следующим образом. В интересующей авторов области $\mathbf{B}$, которую будем предполагать компактной, зададим аппроксимацию $\widetilde{f}^i(t,x,u)$ в желаемом классе правых части исходной системы: $f^i(t,x,u)$. Для этого может быть использовано, например, приближение функции по методу наименьших квадратов в области $\mathbf{B}$ с помощью композиционных полиномов [11–13]. Далее рассмотрим систему

$$\dot x = \widetilde{f}(t,x,u) + \theta(t,w,z) \tag{12}$$

или дискретный вариант

$$x(t+1) = \widetilde{f}\left(t, x(t), u(t)\right) + \theta\left(t, w(t), z(t)\right), \tag{13}$$

где $\theta(t,w,z) = f(t,z,w) - \widetilde{f}(t,z,w)$, w, z – новые управления, $w \in \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ – сечение $\mathbf{B}$, $u, z \in \mathbf{U}\left(t, w\right)$. Системы (12), (13) назовем *оценочными* для соответствующих управляемых систем (10), (11). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Множество скоростей $\widetilde{V}(t,x)$ оценочной системы (12), (13) *является расширением множества скоростей $V(t,x)$ соответствующей исходной системы* (10), (11).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим правую часть $\widetilde{V}(t,x)$ непрерывной системы (12). При наложении дополнительных связей $z = u$, $w = x$ она преобразуется к виду

$$\widetilde{f}(t,x,u) + \theta(t,w,z) = \widetilde{f}(t,x,u) + \theta(t,x,u) =$$
$$= \widetilde{f}(t,x,u) + f(t,x,u) - \widetilde{f}(t,x,u) = f(t,x,u),$$

т.е. $\widetilde{V}(t,x)\big|_{z=u,w=x} = V(t,x)$. В случае дискретной системы (13) наложение связей $z = u$, $w = x$ приводит к аналогичному результату.

Тем самым доказано, что исключение связей $z = u$, $w = x$ приводит к расширению множества $V(t,x)$ исходной системы (10), (11) до некоторого множества $V_E(t,x) = \widetilde{V}(t,x)$ соответствующей оценочной системы (12), (13). □

Если речь идет о задаче оптимального управления, то решение ее на любом расширении дает нижнюю границу минимизируемого функционала, а при специальном выборе расширяющего преобразования может дать нижнюю грань и соответственно точное решение исходной задаче.

Пример. Пусть требуется минимизировать функционал $I(x) = \int\limits_0^{t_F} |x(t)|dt$ в системе

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^1, \quad x(0) = \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad |x| \leqslant \frac{1}{a}, \quad |u| \leqslant 1.$$

Решению этой задачи препятствует негладкость интегранта. Перепишем функционал в стандартной форме: $I = x^0(t_F)$, $\dot{x}^0 = |x|$ и заменим правую часть гладкой функцией $a|x|^2$. Соответствующее расширение получается заменой уравнения относительно x^0 $\dot{x}^0 = a|x|^2 + |w| - a|w|^2$. Минимуму $I = x^0(t_F)$ при этом соответствует, очевидно, минимум функции $|w| - a|w|^2$ который в области $|w| \leqslant 1/a$ равен нулю, и дело сводится к задаче о минимуме квадратического функционала $J(x) = \int\limits_0^{t_F} a|x(t)|^2 dt$. Решение получившейся задачи

$$(\widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = \left(-t + \frac{1}{a}, -1\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{a},$$
$$(\widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = (0, 0), \quad \frac{1}{a} < t \leqslant t_F,$$

находится согласно принципу максимума. Тем самым получается нижняя оценка функционала исходной задачи $I \geqslant aJ(\widetilde{x}) = \dfrac{1}{3a^2} = \Delta$. При этом в качестве приближенного решения исходной задачи можно выбрать пару $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$. Легко видеть, что с увеличением a разность между значением функционала на приближенном решении $I(\widetilde{x}) = \dfrac{1}{2a^2}$ и нижней оценкой Δ уменьшается (так, уже при $a \geqslant 13$ $I(\widetilde{x}) - \Delta \leqslant 0{,}001$).

Конкретно рассмотрим следующие преобразования первого типа, допускающие конструктивную реализацию на этапе 1).

Преобразования к линейным системам. Универсальный метод здесь, по существу, сводится к построению множества достижимости $\mathbf{Q}_R$ в пространстве (t,x) (интегральной воронки), например, с помощью известных уравнений принципа максимума, и минимизации функции $F(t,x)$ на нем при заданных ограничениях на конечное состояние $(t_F, x(t_F)) \in \mathbf{\Gamma}$.

Заменим исходную систему (10), (11) линейной за счет подходящего расширения множества $\mathbf{V}(t,x)$.

Новые линейные системы (непрерывную или дискретную) построим следующим образом:

$$\text{(14)} \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,w,z) - A(t)w - B(t)z,$$

$$\text{(15)} \qquad x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t,w(t),z(t)) - A(t)w(t) - B(t)z(t),$$

где $A(t)$, $B(t)$ – соответственно $n \times n$, $n \times p$-матрицы.

Тем самым задается расширение. Для этих систем строится семейство решений уравнений принципа максимума:

$$\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi, \quad \psi^{\mathrm{T}}(t)\left(f(t,w,z) - A(t)w - B(t)z + B(t)u\right) \to \max_{(u,z,w)},$$

$$\psi(t) = A^{\mathrm{T}}(t)\psi(t+1),$$

$$\psi^{\mathrm{T}}(t+1)\left(f(t,w,z) - A(t)w - B(t)z + B(t)u\right) \to \max_{(u,z,w)},$$

где $\psi(t_I)$ пробегает как параметр семейства единичную сферу. Операция максимума выполняется на множестве $\overline{\mathrm{co}}\,\mathbf{V}_E(t,x)$, что соответствует ослабленной системе $\dot{x} \in \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathbf{V}_E(t,x)$, для которой оптимальное управление заведомо существует. При этом траектории семейства образуют границу интегральной воронки $\mathbf{Q}_R$. Далее решается конечномерная задача

$$F(t,x) \to \min_{(t,x)\in\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{Q}_R},$$

и восстанавливается обратным счетом соответствующая траектория $x(t)$.

Преобразование к системам с линейным управлением. Как указано выше, признаком вырожденности задачи, допускающей явный переход к производной задаче, является присутствие в правой части системы (10) (соответственно (11)) линейно входящего управления с матричным коэффициентом, зависящим только от времени. Рассматриваемое преобразование состоит в замене исходных систем системами вида:

$$\text{(16)} \qquad \dot{x} = g(t,x) + B(t)u + \theta(t,w,z), \quad x(t+1) = g(t,x(t)) + B(t)u + \theta(t,w,z),$$

где, как и в предыдущем разделе, w, z – новые управления, $w \in \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ – сечение $\mathbf{B}$, $u, z \in \mathbf{U}(t,w)$.

Дальнейшее состоит в переходе к соответствующим производным системам, поиску магистральных решений и их аппроксимации в исходном классе. Если производная задача не поддается простому решению, то ее можно преобразовать далее по любой из рассмотренных схем.

Если применять расширения типа Кротова, то можно использовать указанные классы систем для аппроксимации исходной системы без априорного расширения (формально полагая $\theta(t,w,z) = 0$) с целью получения достаточно хорошей оценочной функции Кротова.

4. Аппроксимация в классе допустимых режимов

В общем случае расширяющих преобразований решение задачи $(\mathbf{E}, I)$ не задает непосредственно решения исходной задачи $(\mathbf{D}, I)$ и согласно общему подходу требует аппроксимации в $\mathbf{D}$, причем достаточно простой, чтобы эта операция имела практический смысл. Рассмотрим две схемы, подходящих с этой точки зрения: 1) вариационную; 2) экстремальное прицеливание (которые, разумеется, не исключают других). В обеих объектом аппроксимации служит траектория $x_*(t)$ решения задачи $(\mathbf{E}, I)$ и строится управление с обратной связью $\widetilde{u}(t,x)$, которым замыкается исходная система (10) или (11) для получения конкретного приближения при заданном начальном условии, а также для генерирования оценочной функции Кротова [6] и уточнения оценки Δ, если она окажется слишком большой.

В вариационной схеме решается в форме синтеза линейно-квадратическая задача, родственная известной задаче АКОР:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{t_I}^{t_F}\left(a|x(t)-x_*(t)|^2+b|u(t)-\overline{u}(t)|^2\right)dt+c|x(t_F)-x_*(t_F)|^2\to\min,\\&\dot{x}(t)=A(t)(x(t)-x_*(t))+B(t)(u(t)-\overline{u}(t)),\end{aligned}$$

или в дискретном варианте:

$$\begin{aligned}&\sum_{t_I}^{t_F-1}\left(a|x(t)-x_*(t)|^2+b|u(t)-\overline{u}(t)|^2\right)+c|x(t_F)-x_*(t_F)|^2\to\min,\\&x(t+1)=A(t)(x(t)-x_*(t))+B(t)(u(t)-\overline{u}(t)),\end{aligned}$$

где $\overline{u}(t)$ – среднее значение из $\mathbf{U}(t)$, а матрицы $A(t)$, $B(t)$ получаются в результате линеаризации правых частей (10), (11) в окрестности $(x_*(t),\overline{u}(t))$. Последние могут затем варьироваться с целью уменьшения оценки Δ, т.е. рассматриваться как параметры настройки схемы.

В схеме экстремального прицеливания используется одноименный метод, предложенный в [14]. Позиционное управление получается из условий:

$$\frac{d}{dt}|x(t)-x_*(t)|^2\to\min_{v\in\mathbf{V}_E(t,x)},\quad |x(t+1)-x_*(t+1)|^2\to\min_{v\in\mathbf{V}(t,x(t))},$$

соответственно для непрерывной и дискретной системы.

5. Приложение к задаче спуска космического челнока с орбиты

Рассматривается движение летательного аппарата в атмосфере, описываемое следующей дифференциальной системой:

$$\frac{dh}{dz}=\frac{m\sin\theta}{X},\quad \frac{d\theta}{dz}=\frac{1}{(v)^2X}\left(Yu+m\left(\frac{(v)^2}{r_\pi}-g\right)\cos\theta\right), \tag{17}$$

$$\frac{dQ}{dz}=\frac{mq}{vX},\quad q=K_q\left(\frac{\rho}{\rho_S}\right)^a\left(\frac{v}{v_C}\right)^b, \tag{18}$$

где $z=d-\dfrac{v^2}{2}-gh$ – вспомогательный аргумент (неубывающая функция времени), $d=\mathrm{const}$ такая, что $z>0$, h – высота над поверхностью планеты, v, θ – скорость по траектории и угол наклона траектории к горизонту. Очевидно, $\dfrac{v^2}{2}=d-z-gh$, отсюда находится $v(z,h)$, поскольку в качестве переменных состояния рассматриваются $(z,\ h,\ \theta)$. Далее здесь

$$X(h,v,c)=c_x(c)S\rho(v)^2/2,\quad Y(h,v,c)=cS\rho(v)^2/2$$

– аэродинамическое сопротивление и подъемная сила, m – масса, S – характерная площадь, $\rho = \rho^* e^{\delta(h-h^*)}$ – плотность атмосферы, u – косинус угла крена (управление), r_π – радиус планеты, g – гравитационное ускорение, q – теплопоток к аппарату, где ρ_S – плотность атмосферы у поверхности планеты, v_C – круговая скорость на высоте 100 км, K_q, a, b – некоторые положительные константы

$$h \geqslant \widetilde{h}(z), \quad c = \min\left(c_{\max}, \widetilde{c}(h,v)\right)$$

где $\widetilde{c}(h,v)$ – положительное решение уравнения $n(h,v,c) = N$ при любых фиксированных h, v, удовлетворяющих последнему неравенству, $\widetilde{h}(z)$ – решение уравнения $n(h,v,0) = N$:

$$n(h,v,c) \equiv \frac{1}{mg}\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant N. \tag{19}$$

Требуется перевести аппарат из начального состояния, определяемого значениями z_I, h_I, θ_I, в конечное z_F, h_F, θ_F так, чтобы минимизировать $Q(z_F)$ при $Q(z_I) = 0$ (суммарное количество тепла, подведенного к аппарату в процессе спуска). Легко видеть, что полученное решение второй производной задачи (магистраль) нереализуемо в исходном классе допустимых: при $z = z_I$ и $z = z_F$ функции $h(z)$ этого решения имеют разрывы, в то время как в исходном классе они имеют ограниченные производные.

Построим приближенный синтез оптимального управления посредством семейства подходящих приближений из класса допустимых, сохраняющих качественный характер найденного магистрального решения для любых комбинаций начальных значений z_I, h_I.

I. Производится расчет $\widetilde{h}(z)$, $\widehat{h}(z)$ из условия $c_{\max} = \widetilde{c}(h,v)$; из первого уравнения (17) находится $\widehat{\theta}(z)$, из второго уравнения (17) находится $\widehat{u}(z)$.

II. Производится линеаризация по методу наименьших квадратов уравнений (17) в окрестности $\widehat{h}(z)$, $\widehat{\theta}(z)$, $\widehat{u}(z)$ отдельно в областях $h \geqslant \widehat{h}(z)$ и $\widehat{h}(z) \geqslant h \geqslant \widetilde{h}(z)$ в форме

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y + B(z)w, \quad y^1 = h - \widehat{h}(z), \quad y^2 = \theta - \widehat{\theta}(z), \quad w = u - \widehat{u}.$$

III. Решается задача синтеза по критерию $\int\limits_{z_I}^{z_*}(k^1(y^1)^2 + k^2(y^2) + (w)^2)dz$, где z_* – точка выхода на магистраль $y = 0$, k^1, k^2 – параметры. Для этого сначала строится решение задачи оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dz} = A(z)y + B(z)w, \quad y(z_I) = y_I, \\ &y(z_*) = 0, \quad \int\limits_{z_I}^{z_*}(y^{\mathrm{T}}Ky + (w)^2)dz \to \min, \end{aligned} \tag{20}$$

где $K = \operatorname{diag}(k^1, k^2)$. Решение задачи (20) должно удовлетворять дифференциальной системе уравнений принципа максимума:

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y + \frac{1}{2}B(z)B^{\mathrm{T}}(z)\psi, \quad \frac{d\psi}{dz} = -A^{\mathrm{T}}(z)\psi + 2Ky. \tag{21}$$

Пусть $\Phi_1(z)$ ($\Phi_2(z)$) – первые (последние) n строк фундаментальной матрицы решений системы (21). Тогда решение этой системы, удовлетворяющее краевым условиям задачи (20), можно записать в виде:

$$y(z;k^1,k^2,z_*) = \Phi_1(z)C(z_I)y_I,$$
$$w(z;k^1,k^2,z_*) = \frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}(z)\Phi_2(z)C(z_I)y_I,$$

где $C(z_I) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z_I) \\ \Phi_1(z_*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица второго порядка.

Следовательно, искомое решение задачи синтеза запишется в виде

$$w(z,y;k^1,k^2,z_*) = \frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}(z)\Phi_2(z)C(z)y. \tag{22}$$

Соответствующая последовательность функций Кротова примет вид

$$\varphi(z,y;k^1,k^2,z_*) = \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}\Phi_2(z)C(z)y.$$

IV. Найденный синтез (22) применим к поиску приближенно оптимальных траекторий задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dz} = A(z)y + B(z)w, \quad y(z_I) = y_I, \quad y(z_*) = 0, \\ &|w| \leqslant 1, \quad I(y) = \int\limits_{z_I}^{z_*} |y^1| dz \to \min \end{aligned} \tag{23}$$

с построением их оценок. Для этого при различных значениях y_I построим с помощью управлений

$$\widetilde{w}(z,y;k^1,k^2,z_*) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad w(z,y;k^1,k^2,z_*) > 1, \\ -1, & \text{если} \quad w(z,y;k^1,k^2,z_*) < -1, \\ w(z,y;k^1,k^2,z_*), & \text{иначе}, \end{cases} \tag{24}$$

допустимые решения задачи (23) $(\widetilde{y}(z;k^1,k^2,z_*,y_I), \widetilde{w}(z;k^1,k^2,z_*,y_I))$ (возможно, не удовлетворяющие условию $y(z_*) = 0$). Оценим их, используя различные функции $\varphi(z,y;k^1,k^2,z_*)$, т.е. построим оценки $\Delta(y_I,\varphi;k^1,k^2,z_*)$ согласно конструкциям:

$$\Delta(y_I,\varphi;k^1,k^2,z_*) = I\left(\widetilde{y}(z;k^1,k^2,z_*,y_I)\right) - a\left(\varphi(z,y;k^1,k^2,z_*)\right),$$
$$a(\varphi) = \varphi(z_*,0) - \min_{y_I}\varphi(z_I,y_I) - \int\limits_{z_I}^{z_*} \max_{y,w}\left(\varphi_y(A(z)y + B(z)w - |y^1| + \varphi_z)\right) dz.$$

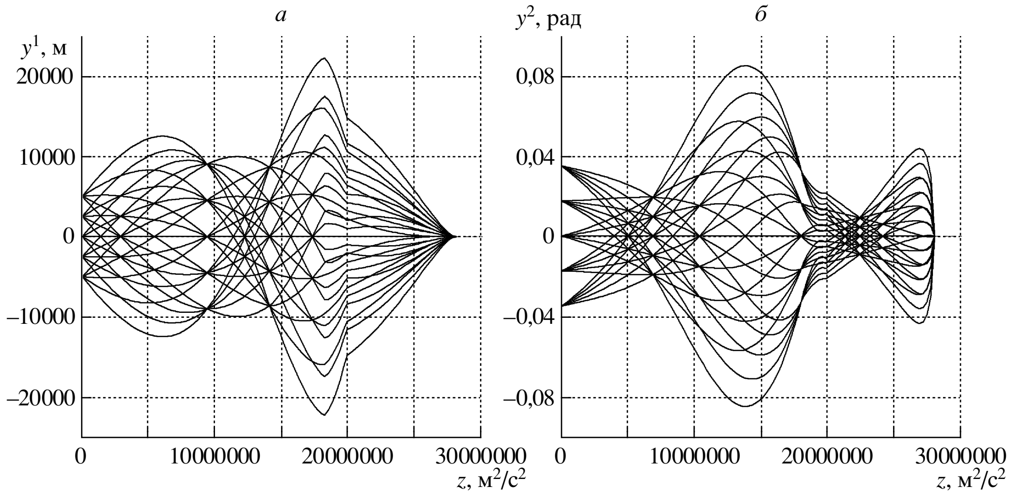
В качестве приближенно оптимальных траекторий задачи (23) принимаем те, на которых достигается $\min\limits_{k^1,k^2,z_*} \Delta(y_I,\varphi;k^1,k^2,z_*)$.

Так, для исходных данных:

$$h_F = 10^4 \text{ м}, \quad v_F = 500 \text{ м/с}, \quad m/S = 150 \text{ кг/м}^2, \ r_\pi = 6300000 \text{ м};$$
$$c_x(\alpha) = 0{,}1 + 2(\sin\alpha)^3, \quad c(\alpha) = 2(\sin\alpha)^2\cos(\alpha)$$

(параметрическая зависимость $c_x(c)$);

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4, \quad N = 5, \quad \delta = -0{,}12\cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1};$$
$$h^* = 50\cdot 10^3 \text{ м}, \quad \rho^* = 0{,}11\cdot 10^{-3} \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$$



Семейство приближенно оптимальных траекторий.

семейство приближенно оптимальных траекторий представлено на рисунке. При этом $\min\limits_{k^1,k^2,z_*} \Delta(y_I,\varphi;k^1,k^2,z_*) = \Delta(y_I,\varphi;0;10;0{,}28\cdot 10^8)$.

V. Далее, при найденных значениях $k^1 = 0$, $k^2 = 10$, $z_* = 0{,}28\cdot 10^8$ строится с помощью управлений (24) для различных значений y_I семейство допустимых решений исходной задачи (возможно, не удовлетворяющие условию $y(z_*) = 0$). Построенное семейство принимается за начальное приближение и производится его дальнейшее улучшение согласно известному алгоритму [12], при этом производится оценка каждой итерации с использованием функции $\varphi(z,y;k^1,k^2,z_*)$.

6. Заключение

Изложенное выше представляет собой априорно приближенный подход к исследованию задач управления в отличие от численных методов реализации теоретических результатов. Он хорошо согласуется с естественными допущениями при постановке прикладных задач, их особенностями и зарекомендовавшими себя разнообразными методами и приемами их математического исследования. Одна из важных особенностей – это магистральная природа их решений, связанная с идеализацией поведения переменных, которые принимаются в качестве управляющих при постановке задачи, и с отбрасыванием соответствующих реальных связей. Для механических систем важную роль здесь играет разделение движений центра масс и относительно центра масс.

Для сложных систем различной природы типично сочетание “быстрых” и “медленных” процессов как реакций на одни и те же воздействия (Моисеев, 1981). Примерами служат экологические системы, где характерные времена протекающих процессов могут различаться на порядки – от часов и суток для распространения примесей в воздушной и водной среде до десятков лет для восстановления лесных массивов. Их разумное разделение также ведет к разнообразным моделям, которые могут быть упорядочены требуемым образом.

Наличие линейных зависимостей от управляющих и фазовых переменных, характерное для многих готовых моделей реальных объектов, в особенности для моделей экономического и эколого-экономического происхождения [15], является признаком вырожденности соответствующих задач и дает возможность приближенного последовательного преобразования к производным системам и задачам, в результате желаемые аппроксимации и оценки возникают вполне естественно.

Такой известный подход к исследованию многомерных объектов, как агрегирование той или иной степени, также может приводить к семейству родственных моделей различной размерности, которое может быть выстроено в нужный ряд по принципу расширения.

В целом, предлагаемый подход с соответствующими конструктивными схемами и их комбинациями существенно расширяют возможности приближенного исследования задач управления, и прежде всего оптимального.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Физматлит, 1997.
2. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
3. *Krotov V.F.* Global methods in optimal control. N.Y.: Marcel Dekker, 1996.
4. *Гурман В.И.* Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений // АиТ. 2003. № 3. С. 61–71.
5. *Gurman V.I., Ukhin M.Yu.* The extension principle in control problems / Constru-ctive methods and applied problems. Moscow: Fizmatlit, 2005.
6. *Гурман В.И., Ухин М.Ю., Ни Минь Кань.* Практические схемы оптимизации управления на основе принципа расширения // АиТ. 2006. № 4. С. 25–41.
7. *Warga J.* Relaxed Variational Problems // J. Math. Anal. Appl. 1962. V. 4. № 1. P. 111–127.
8. *Гурман В.И.* Об оптимальных процессах с неограниченными производными // АиТ. 1972. № 12. С. 14–21.
9. *Гурман В.И., Сачков Ю.Л.* Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом // АиТ. 2008. № 4. С. 72–80.
10. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.
11. *Ухин М.Ю.* Приближенный синтез оптимального управления. М.: Физматлит, 2006.
12. *Трушкова Е.А., Блинов А.О.* Метод улучшения управления в моделировании динамических систем // Сб. докл. 3-й Всерос. науч.-практ. конф. по иммитационному моделированию и его применении в науке и промышленности. СПб. 2008. Т. 1. С. 234–236.
13. *Блинов А.О., Фраленко В.П.* Приложение метода наименьших квадратов к задачам моделирования и оптимизации // Сб. тр. науч.-практ. совмест. конф. студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников Ин-та програм. систем РАН и «Ун-та г. Переславля им. А.К. Айламазяна». Переславль-Залесский, апрель 2008 / Под ред. С.М. Абрамова и С.В. Знаменского. В 2 т. Переславль-Залесский: Изд-во «Ун-т г. Переславля». 2008. Т. 1. С. 67–78.
14. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
15. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. М.: Наука, 2001.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 01.10.2008