А. Ю. Попов, Минимум энергетических затрат в задаче гашения колебаний, *Автомат. и телемех.*, 2009, выпуск 4, 172–178

*Автоматика и телемеханика, № 4, 2009*

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. **А.Ю. ПОПОВ, д-р физ.-мат. наук**
**(Московский государственный университет)**

## МИНИМУМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ В ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ[1]

Изучается задача минимизации $L^1$-нормы управления линейной колебательной системой. Получены двусторонние оценки затрат энергетических ресурсов, необходимых для гашения колебаний.

### 1. Введение

Рассматривается управляемый колебательный процесс, описываемый системой $n$ уравнений

$$\ddot{x}_k(t) + \mu_k^2 x_k(t) + b_k U(t) = 0, \quad x_k(0) = x_{k,0}, \quad \dot{x}_k(0) = x_{k,1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1}$$

Требуется погасить колебания, т.е. добиться выполнения равенств $x_k(T) = \dot{x}_k(T) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, минимизируя $L^1$-норму управления

$$\int_0^T |U(t)|\,dt, \quad U : (0,T) \to \mathbb{R}, \quad U \in L(0,T). \tag{2}$$

Интеграл (2) в некоторых моделях пропорционален расходу топлива, затрачиваемого на гашение колебаний. Векторы начальных условий $\overline{x}_0 = (x_{k,0})_{k=1}^n$, $\overline{x}_1 = (x_{k,1})_{k=1}^n$ и коэффициентов $\overline{b} = (b_k)_{k=1}^n$, $b_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ заданы.

Такие задачи возникают в космической технике, где важно гасить нежелательные колебания, а запас топлива, имеющегося на борту летательного аппарата, невелик. Время, за которое нужно погасить колебания, допускается достаточно большим. В [1] интеграл (2) минимизировался для более общих управляемых систем с векторным управлением; был найден подход к решению таких задач. Данный частный случай рассмотрен потому, что обнаружилась возможность найти в явном виде предел при $T \to +\infty$ точной нижней грани интегралов (2).

Через $I\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{b}, T\right)$ обозначим точную нижнюю грань интегралов (2), взятую по всем управлениям $U \in L(0,T)$, обеспечивающим нулевые финальные условия.

В [2] автором доказаны следующие две теоремы.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00330).

*Теорема А.* $I\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{b}, T\right) = \inf \int\limits_0^T |V(t)|\, dt$, *где* $\inf$ *берется по всем функциям* $V \in L(0,T)$, *для которых выполняется система равенств*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^T V(t) \cos(\mu_k t)\, dt = R_k \cos\theta_k, \\
&\int\limits_0^T V(t) \sin(\mu_k t) dt = R_k \sin\theta_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.
\end{aligned} \tag{3}
$$

*Здесь* $R_k = \sqrt{x_{k,0}^2 \mu_k^2 + x_{k,1}^2}\, |b_k|^{-1}$, *числа* $\theta_k$ *выражаются определенным образом через* $x_{k,0}$, $x_{k,1}$.

Таким образом, задача минимизации $L^1$-нормы управления свелась к задаче поиска расстояния от нуля до аффинного многообразия в $L(0,T)$ коразмерности $2n$, определяемого равенствами (3). Метод нахождения расстояния от точки до аффинного многообразия конечной размерности или коразмерности в функциональном анализе давно известен. Трудность состоит лишь в получении ответа в явном виде. Это удалось сделать, когда набор частот $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ линейно независим над $\mathbb{Q}$ (выражение $h_1\mu_1 + \ldots + h_n\mu_n$, где $h_k$ – рациональные числа, может быть равно нулю в единственном случае $h_1 = \ldots = h_n = 0$).

*Теорема Б. Если набор частот колебаний линейно независим над* $\mathbb{Q}$, *то*

$$\lim_{T \to +\infty} I\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{b}, T\right) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} R_k.$$

Если частоты соизмеримы, то задача сложнее: для предела

$$l = \lim_{T \to +\infty} I\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{b}, T\right) \tag{4}$$

удается дать только двустороннюю оценку.

Заметим, что из равенств

$$\int\limits_0^T V(t) \cos \mu t dt = R\cos\theta, \quad \int\limits_0^T V(t) \sin \mu t dt = R\sin\theta$$

следует неравенство

$$\int\limits_0^T |V(t)|\, dt \geqslant R.$$

Это влечет за собой оценку снизу $l \geqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} R_k$, каковы бы ни были набор частот $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и векторы начальных условий.

В связи с тем, что для гашения колебания с частотой $\mu_k$, рассматриваемого отдельно, а не в системе уравнений, достаточно энергетического ресурса $\int\limits_0^T |u(t)|\, dt = R_k + \varepsilon$ (при любом $T > 2\pi/\mu_k$, как бы мало ни было $\varepsilon$), возникает впечатление, что для гашения $n$ колебаний при достаточно больших $T$ хватит топлива $\sum\limits_{k=1}^n R_k + \varepsilon$, т.е. справедлива оценка

$$l \leqslant \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Однако это, вообще говоря, неверно. Можно подобрать такие частоты и начальные условия, что возникнет следующая ситуация. При любом способе гашения каждого из колебаний неизбежно возбуждаются другие. Соответствующий пример см. далее.

В этой работе в дополнение к теореме Б дана оценка сверху $l$, верная для любых наборов частот колебаний, и более детально исследован случай $n = 2$.

## 2. Основные результаты

Т е о р е м а 1. *Каков бы ни был набор частот* $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *колебаний* (1), *для величины* (4) *справедливо неравенство*

$$l \leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} R_k < 1{,}28 \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Теоремы Б и 1 представляют собой два «полюса» в этой задаче. В теореме Б выделен подкласс совокупностей частот, для которых значение $l$ является минимальным. Теорема 1, наоборот, дает оценку $l$, годную в любом случае, не зависящую от арифметических свойств чисел $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Т е о р е м а 2. *В случае* $n = 2$, $\mu_1/\mu_2 = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\mu_1 \neq \mu_2$, *верно неравенство*

$$R \leqslant l \leqslant \frac{R}{\cos\beta}, \quad \textit{где} \quad \beta = \frac{\pi}{p+q}.$$

Докажем теоремы 1, 2 и построим пример, показывающий, что оценка сверху $l \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} R_k$ неверна.

Начнем с построения примера. Возьмем произвольное натуральное число $n$ и рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lll} \ddot{x}_1(t) + x_1(t) + u(t) = 0, & x_1(0) = 0, & \dot{x}_1(0) = 99, \\ \ddot{x}_2(t) + 9x_2(t) + u(t) = 0, & x_2(0) = 0, & \dot{x}_2(0) = -3, \\ \ddot{x}_k(t) + \mu_k^2 x_k(t) + u(t) = 0, & x_k(0) = 0, & \dot{x}_k(0) = 1/n, \quad 3 \leqslant k \leqslant n. \end{array} \right. \tag{5}$$

Покажем, что для успокоения этой колебательной системы за какое-либо время $T$ требуется ресурс управления $\int\limits_0^T |u(t)|\, dt$, превосходящий 105. В то же время имеем $R_1 = 99$, $R_2 = 3$, $R_k = 1/n$, $3 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} R_k = 103 - 2/n < 103$.

Решив каждое уравнение системы

$$x_k(t) = x_k(0)\cos(\mu_k t) + \dot{x}_k(0)\frac{\sin(\mu_k t)}{\mu_k} - \int\limits_0^t u(\tau)\frac{\sin(\mu_k(t-\tau))}{\mu_k} d\tau,$$

для полного покоя колебательного процесса (5) в момент времени $T$ с учетом равенств $x_k(0) = 0$ получим условия

$$\int_0^T u(T-z)\cos(\mu_k z)dz = \dot{x}_k(0)\cos(\mu_k T),$$
$$\int_0^T u(T-z)\sin(\mu_k z)dz = \dot{x}_k(0)\sin(\mu_k T).$$

Взяв $T$ кратным $2\pi$ (это возможно, поскольку успокоенный колебательный процесс далее равен нулю тождественно вместе с управлением) и обозначив $v(z) = u(T-z)$, придем к равенствам

$$\int_0^T v(z)\cos z dz = 99, \quad \int_0^T v(z)\cos 3z dz = -3. \tag{6}$$

Из (6) находим

$$\int_0^T v(z)\left(\cos z - \frac{\cos 3z}{3}\right) dz = 100.$$

Нетрудно убедиться в том, что максимум модуля функции $\cos z - (1/3)\cos 3z$ на периоде, а значит и на $\mathbb{R}$, равен $\sqrt{8}/3$. Следовательно,

$$100 \leqslant \max_{z\in\mathbb{R}} \left|\cos z - \frac{\cos 3z}{3}\right| \int_0^T |v(z)|\, dz \Rightarrow \int_0^T |v(z)|\, dz \geqslant \frac{300}{\sqrt{8}} > 105.$$

*Доказательство теоремы 1.* В [2] со ссылкой на соответствующую теорему из функционального анализа было доказано равенство (обозначения см. выше в теореме A)

$$I(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{b}, T) = \sup \sum_{k=1}^{n} \lambda_k R_k, \tag{7}$$

где точная верхняя грань берется по всем наборам неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, таким, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\mu_k t - \theta_k)\right| = 1. \tag{8}$$

Из (8) следует, что наибольшее из чисел $\lambda_k$ – обозначим его $M$ – при всех достаточно больших $T$ допускает оценку сверху

$$M \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1 + 2\pi/(T\mu_0)}{1 - \sigma/T}, \tag{9}$$

где

$$\mu_0 = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \mu_k, \quad \sigma = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left( \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{2}{|\ \lambda_j - \lambda_k\ |} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\lambda_j + \lambda_k} \right).$$

Действительно, пусть $k$ – номер наибольшего из чисел $\lambda_j$ (если таких несколько, то берется любое из них), $P(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\mu_k t - \theta_k)$. Рассмотрим интеграл

$$J = 2\int_0^T P(t)\cos(\mu_k t - \theta_k)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \int_0^T 2\cos(\mu_j t - \theta_j)\cos(\mu_k t - \theta_k)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_k \int_0^T \left[\cos\left((\mu_j - \mu_k)t + \theta_k - \theta_j\right) + \cos\left((\mu_j + \mu_k)t - \theta_k - \theta_j\right)\right] dt =$$

$$= \lambda_k T + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \frac{\sin\left((\mu_j - \mu_k)t + \theta_k - \theta_j\right)}{\mu_j - \mu_k}\Big|_0^T +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\sin\left((\mu_j + \mu_k)t - \theta_k - \theta_j\right)}{\mu_j + \mu_k}\Big|_0^T.$$

Отсюда следует неравенство

$$(10) \qquad \lambda_k T \leqslant |J| + \sigma \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda_j| \Rightarrow MT \leqslant |J| + M\sigma.$$

Ввиду (8) имеем

$$|J| \leqslant 2 \max_{0\leqslant t\leqslant T} |P(t)| \int_0^T |\cos(\mu_k t - \theta_k)|\, dt = \frac{2}{\mu_k} \int_{-\theta_k}^{\mu_k T - \theta_k} |\cos z|\, dz.$$

Поскольку $\int\limits_a^{a+2\pi} |\cos z|\, dz = 4$ при любом $a \in \mathbb{R}$, то, взяв число $m$ наименьшим натуральным, превосходящим $T\mu_k/(2\pi)$, получим оценку сверху

$$(11) \qquad |J| \leqslant \frac{8m}{\mu_k} \leqslant \frac{8}{\mu_k}\left(1 + \frac{T\mu_k}{2\pi}\right) = \frac{4}{\pi}T + \frac{8}{\mu_k} \leqslant \frac{4T}{\pi} + \frac{8}{\mu_0}.$$

Из (10) и (11) находим

$$MT \leqslant M\sigma + \frac{4T}{\pi} + \frac{8}{\mu_0} \Leftrightarrow M\left(1 - \frac{\sigma}{T}\right) \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\mu_0 T}.$$

Отсюда при всех $T > \sigma$ выводим оценку (9). Из (9) заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $T_0(\varepsilon)$, такое что при любом $T > T_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$(12) \qquad |\lambda_j| \leqslant \frac{4}{\pi}(1 + \varepsilon), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Равенство (7) после применения оценок (12) дает соотношение

$$I\left(\overline{x}_0,\overline{x}_1,\overline{b},T\right) \leqslant \frac{4(1+\varepsilon)}{\pi}\sum_{k=1}^{n} R_k \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall T>T_0(\varepsilon),$$

которое вместе с переходом к пределу при $T\to+\infty$ доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2 предварим леммой.

*Лемма. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$, $p,q\in\mathbb{N}$, $q\neq 1$, числа $p$ и $q$ взаимно просты. Тогда существует такое число $\tau\in\mathbb{R}$, что выполняются два неравенства*

$$(13)\qquad \cos\tau \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right), \quad \cos\left(\frac{p\tau-\alpha}{q}\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right).$$

*Доказательство.* Если взять $\tau=2\pi m+h$, $m\in\mathbb{N}$, $h\in\left[-\frac{\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right]$, то первое неравенство (13) выполняется. Следовательно, задача сводится к проверке существования чисел $m$ и $h$ с указанными свойствами таких, что выполняется неравенство

$$\cos\left(\frac{2\pi mp-\alpha+ph}{q}\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right).$$

Обозначим $\alpha_1=\alpha/(2\pi)$ и найдем такое целое число $m_1$, что $|\alpha_1-m_1|\leqslant 1/2$. Поскольку числа $p$ и $q$ взаимно просты, то совокупность чисел $\{mp\}_{m=1}^{q}$ образует полную систему вычетов по модулю $q$, а значит, есть такое число $m\in\mathbb{N}$, $1\leqslant m\leqslant q$, что $pm-m_1=qs$, $s\in\mathbb{Z}$. Тем самым верно неравенство

$$|mp-\alpha_1-qs|\leqslant 1/2.$$

Умножив его на $2\pi$ и разделив на $q$, получим

$$\left|\frac{2\pi mp-\alpha}{q}-2\pi s\right| \leqslant \frac{\pi}{q}.$$

Таким образом, если бы ограничились значением $h=0$, то получили бы оценку снизу $\cos\left(\frac{\pi\tau-\alpha}{q}\right)\geqslant\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$, которой недостаточно. За счет варьирования значения $h$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right]$ возможно «сдвинуть» точку действительной оси $\frac{2\pi mp-\alpha}{q}$ в положительном или отрицательном направлении на любую величину, не превосходящую $\frac{\pi p}{q(p+q)}$. Ввиду сказанного оптимальный выбор $h$ приведет к оценке

$$\left|\frac{2\pi mp-\alpha+ph}{q}-2\pi s\right| = \left|\frac{\pi\tau-\alpha}{q}-2\pi s\right| \leqslant \frac{\pi}{q}-\frac{\pi p}{q(p+q)}=\frac{\pi}{p+q},$$

которая доказывает второе неравенство (13). Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Сначала выведем из леммы следующее утверждение. Если $\mu_1/\mu_2=p/q$, $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$, то существует число $t\in[0,2\pi q/\mu_2]$ такое, что

$$(14)\qquad \cos(\mu_1 t-\theta_1)>\cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right), \quad \cos(\mu_2 t-\theta_2)>\cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right).$$

Действительно, обозначим $\tau = \mu_2 t - \theta_2$. Тогда

$$t = \frac{\tau + \theta_2}{\mu_2}, \quad \mu_1 t - \theta_1 = \mu_1 \frac{\tau + \theta_2}{\mu_2} - \theta_1 = \frac{p\tau - \alpha}{q}, \quad \text{где} \quad \alpha = q\theta_1 - p\theta_2.$$

Применив лемму, получим (14) при некотором $t \in \mathbb{R}$. Осталось вывести ограничение на $t$. Поскольку число $2\pi q$ является общим периодом функций $\cos\tau$ и $\cos((p\tau - \alpha)/q)$, то требуемое значение $\tau$ имеется на любом отрезке длины $2\pi q$. Следовательно, соответствующее значение $t$ имеется на отрезке $[0, 2\pi q/\mu_2]$.

Из (14) видно, что условие

$$\max\left\{ |\lambda_1 \cos(\mu_1 t - \theta_1) + \lambda_2 \cos(\mu_2 t - \theta_2)| \,\middle|\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi q}{\mu_2} \right\} = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

влечет за собой оценку

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1/\cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right). \tag{15}$$

В противном случае в точке $t$, для которой верно (14), сумма $\lambda_1 \cos(\mu_1 t - \theta_1) + \lambda_2 \cos(\mu_2 t - \theta_2)$ превзошла бы 1. Соотношения (7) и (15) при $T > 2\pi q/\mu_2$ завершают доказательство теоремы 2.

### 3. Заключение

Подведем итоги. В задаче минимизации $L^1$-нормы управления, гасящего колебания (1) без ограничения времени, автором найден точный ответ в случае, когда совокупность частот линейно независима над $\mathbb{Q}$. Получена оценка сверху минимизируемой нормы (видимо, в определенном смысле близкая к неулучшаемой), годная для любого набора частот. Наиболее полно исследована задача гашения двух колебаний.

Дальнейшие исследования задачи минимизации $L^1$-нормы управления, гасящего колебания (1), вероятно, должны быть связаны 1) с рассмотрением векторного управления, 2) с оценками $l$ через другие функции величин $R_1, \ldots, R_n$ (не только через $\sum\limits_{k=1}^{n} R_k$ или $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} R_k$), 3) с более точными оценками $l$ в зависимости от арифметических свойств чисел $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Желательно также строить в явном виде управления, гасящие колебания (1) за «реальное» время $T$, $L^1$-норма которых близка к наименьшей возможной. Последнее было сделано автором [2] в простейших случаях: $n = 1$ и $n = 2$, $\mu_1/\mu_2 \notin \mathbb{Q}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурман В.И., Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Изв. АН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 41–49.
2. *Попов А.Ю.* Явный вид решения задачи об управлении колебаниями с ограниченным ресурсом управления при условии несоразмеримости частот // АиТ. 2008. № 4. С. 59–71.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.*

Поступила в редакцию 01.10.2008