А. Ю. Попов, Явный вид решения задачи об управлении колебаниями с ограниченным ресурсом управления при условии несоизмеримости частот, *Автомат. и телемех.*, 2008, выпуск 4, 59–71

Автоматика и телемеханика, № 4, 2008

PACS 02.30.Yy

© 2008 г. А.Ю. ПОПОВ, д-р физ.-мат. наук
(Московский государственный университет, Москва)

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ РЕСУРСОМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ УСЛОВИИ НЕСОИЗМЕРИМОСТИ ЧАСТОТ[1]

Найдено явное выражение для минимального ресурса управления колебательным процессом, описываемым системой линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей, собственные значения которой отрицательны и линейно независимы над полем рациональных чисел. Для размерностей системы 1 и 2 предъявлены управления, близкие к оптимальным.

1. Введение и постановка задачи

Изучается управление колебательным процессом, описываемым линейной управляемой системой

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad 0 < t < T,\\
&x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad x(T) = x_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{x}_T.
\end{aligned} \tag{1}
$$

В системе (1) $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ – вектор-функция, $x_k \in W_1^2[0,T]$, $1 \le k \le n$, A – матрица порядка $n \times n$, элементы A постоянны, b – n-мерный вектор с ненулевыми координатами, $u(t)$ – скалярная функция, интегрируемая по Лебегу на $[0,T]$, x_0, $\dot{x}_0$, x_T, $\dot{x}_T \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что матрица A диагонализуема и все ее собственные числа отрицательны. Векторы x_0, $\dot{x}_0$, x_T, $\dot{x}_T$ (начальные и финальные условия), b и матрица A считаются заданными. Требуется найти управление $u(t)$, посредством которого колебательный процесс $x(t)$ переводится из заданного начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ в заданное финальное состояние $(x_T, \dot{x}_T)$. Пару $u(t)$, $x(t)$ назовем решением системы (1). В [1], в которой была поставлена данная задача, в качестве критерия оптимальности, исходя из приложений в космической технике, была предложена L_1-норма управления на отрезке $[0,T]$:

$$
\int_0^T |u(t)|dt \to \inf. \tag{2}
$$

Интеграл (2) был назван ресурсом управления, который при управлении космическими конструкциями пропорционален требуемому запасу топлива. Точная нижняя грань в (2) берется по всем решениям системы (1). В [1] был найден алгоритм построения управления, близкого к оптимальному при достаточно большом T в задаче

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00330).

гашения колебаний. Как и в [1] считаем, что матрица A уже приведена к диагональному виду. При этом система уравнений (1) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_k(t) + \mu_k^2 x_k(t) + b_k u(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad b_k \neq 0, \\ &x_k(0) = x_{0,k}, \quad \dot{x}_k(0) = \dot{x}_{0,k}, \quad x_k(T) = x_{T,k}, \quad \dot{x}_k(T) = \dot{x}_{T,k}, \quad 1 \le k \le n. \end{aligned} \tag{3}$$

В этой работе экстремум (2) найден точно в случае $n = 1$, в случае $n \ge 2$ – с точностью до бесконечно малой функции переменной $T \to +\infty$, если совокупность собственных чисел матрицы A является линейно независимой над $\mathbb{Q}$. Поскольку экстремум в пространстве $L[0,T]$ не достигается, требуется построение минимизирующей последовательности управлений. Это сделано при $n = 1$ и $n = 2$. Случай соизмеримых частот и задача явного построения минимизирующей последовательности при $n \ge 3$ требуют отдельного исследования. Интерес представляет нахождение явного решения аналогичной задачи с векторным управлением: $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $1 < p < n$.

2. Решение задачи о минимальном ресурсе управления

Решение поставленной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе в теореме 1 дается описание класса управлений, который переводит колебательный процесс из заданного начального в заданное конечное состояние. На втором этапе полученное описание как в геометрических так и в аналитических терминах позволяет к поиску экстремума применить метод нахождения расстояния от точки до подпространства в линейном нормированном пространстве. Напомним, что аффинной гиперплоскостью векторного пространства V называется множество V вида $\{v \in V \mid F(v) = a\}$, где $a \in \mathbb{R}$, F – линейный функционал на V (элемент сопряженного к V пространства). Аффинным подпространством V коразмерности m называется пересечение каких-либо m аффинных гиперплоскостей, определяющие функционалы которых образуют линейно независимую систему в сопряженном к V пространстве.

Теорема 1. *Множество управлений, решающих систему* (3), *образует аффинное подпростанство в $L[0,T]$ коразмерности $2n$. Оно состоит из всех тех функций $u(t)$, для которых выполняются равенства*

$$\begin{aligned} &b_k \int_0^T u(t) \sin(\mu_k(T-t))dt = R_k \sin\theta_k, \\ &b_k \int_0^T u(t) \cos(\mu_k(T-t))dt = R_k \cos\theta_k, \quad 1 \le k \le n, \end{aligned} \tag{4}$$

а величины R_k вычисляются по формулам

$$R_k = \left(R_{0,k}^2 - 2R_{0,k}R_{T,k}\cos(\mu_k T + \theta_{T,k} - \theta_{0,k}) + R_{T,k}^2\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где $R_{0,k} = \sqrt{x_{0,k}^2\mu_k^2 + \dot{x}_{0,k}^2}$, $R_{T,k} = \sqrt{x_{T,k}^2\mu_k^2 + \dot{x}_{T,k}^2}$, *углы* $\theta_{0,k}$, $\theta_{T,k}$, $1 \le k \le n$, *определяются из равенств*

$$\begin{aligned} &x_{0,k}\mu_k = R_{0,k}\cos\theta_{0,k}, \quad \dot{x}_{0,k} = R_{0,k}\sin\theta_{0,k}, \\ &x_{T,k}\mu_k = R_{T,k}\cos\theta_{T,k}, \quad \dot{x}_{T,k} = R_{T,k}\sin\theta_{T,k}. \end{aligned}$$

Углы θ_k, $1 \le k \le n$, определяются из равенств[2]

$$
(6)\qquad \begin{aligned} &-x_{T,k}\mu_k + x_{0,k}\mu_k\cos(\mu_k T) + \dot{x}_{0,k}\sin(\mu_k T) = R_k\sin\theta_k,\\ &\dot{x}_{0,k}\cos(\mu_k T) - \mu_k x_{0,k}\sin(\mu_k T) - \dot{x}_{T,k} = R_k\cos\theta_k. \end{aligned}
$$

Из теоремы 1 делается следующий вывод. Задача (2) состоит в нахождении расстояния от нулевого элемента пространства $L[0,T]$ до аффинного подпространства, заданного системой уравнений (4). Если бы требовалось минимизировать интеграл $\int\limits_0^T u^2(t)dt$ на том же подпространстве $L^2[0,T]$, то такая задача не представила бы труда. Нахождение расстояния от заданной точки до аффинных подпространств конечной размерности и коразмерности в евклидовых пространствах (т.е. таких, в которых норма задается скалярным произведением) делается по явным формулам и столь же несложно ищется ближайший элемент. В пространствах с нормой произвольной природы явные формулы для решения таких экстремальных задач отсутствуют. Тем не менее есть общий принцип нахождения экстремума [2]. Он состоит в следующем. Пусть Y – линейное нормированное пространство, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k=1}^m$ – совокупность линейных непрерывных функционалов на Y, образующих в Y^* линейно независимую систему, $\{c_k\}_{k=1}^m$ – фиксированный набор чисел. Рассмотрим аффинное подпростанство

$$
\mathfrak{M} = \{y \in Y \mid F_k(y) = c_k,\ 1 \le k \le m\}.
$$

Тогда расстояние от нулевого элемента Y до подпространства $\mathfrak{M}$ равно

$$
(7)\qquad \inf\{\|y\| \mid y \in \mathfrak{M}\} = \sup\sum_{k=1}^m \lambda_k c_k,
$$

где sup берется по всем наборам чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ таким, что

$$
(8)\qquad \left\|\sum_{k=1}^m \lambda_k F_k\right\|_{Y^*} = 1.
$$

Трудность применения этого принципа к конкретным системам функционалов $\mathcal{F}$ состоит в отсутствии явной формулы для нормы линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^m \lambda_k F_k$. В евклидовом пространстве квадрат этой нормы представляет собой положительно определенную квадратичную форму переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, коэффициенты которой пишутся с помощью матрицы Грамма системы $\mathcal{F}$. Таким образом, остается только найти максимум линейной функции $\sum\limits_{k=1}^m \lambda_k c_k$ на эллипсоиде (8) в $\mathbb{R}^m$, что является легко решаемой задачей. В общем случае (пространство Y неевклидово) множество векторов $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющих уравнению (8), является не эллипсоидом, а поверхностью, вообще говоря, довольно сложной структуры.

В нашем случае $Y = L[0,T]$, $Y^* = L^\infty[0,T]$. Взяв $v(t) = u(T-t)$, $\rho_k = R_k/|b_k|$, запишем систему уравнений (4) в следующем виде:

$$
(9)\qquad \int\limits_0^T v(t)\sin(\mu_k t)dt = \rho_k\sin\theta_k, \quad \int\limits_0^T v(t)\cos(\mu_k t)dt = \rho_k\cos\theta_k, \quad 1 \le k \le n.
$$

[2] Сумма квадратов левых частей равенств (6) равна R_k^2. Поэтому требуемые углы $\theta_k \in [0, 2\pi)$ существуют и единственны.

В (9) функционалы F_k порождаются функциями $\sin(\mu_k t)$, $\cos(\mu_k t)$. Поэтому, исходя из теоремы об общем виде линейного функционала в пространстве $L[0,T]$ и сформулированного выше принципа минимизации нормы на аффинном подпространстве, получаем

$$\inf\Big\{\|u\|_{L[0,T]} \mid u(t) \quad \text{удовлетворяет (4)}\Big\} = \tag{10}$$

$$= \inf\Big\{\|v\|_{L[0,T]} \mid v \quad \text{удовлетворяет (9)}\Big\} = \sup \sum_{k=1}^{n} \rho_k(\lambda'_k \sin\theta_k + \lambda''_k \cos\theta_k),$$

а точная верхняя грань в (10) берется по всем наборам чисел $\{\lambda'_k, \lambda''_k\}_{k=1}^n$ таким, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \sin(\mu_k t) + \lambda''_k \cos(\mu_k t) \right\|_{L^\infty[0,T]} = 1. \tag{11}$$

Для удобства положим

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda'^2_k + \lambda''^2_k}, \quad \lambda'_k = \lambda_k \sin\alpha_k, \quad \lambda''_k = \lambda_k \cos\alpha_k,$$

а экстремум (10) обозначим $M(\rho_1,\ldots,\rho_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,T)$. Тогда из (10) и (11) видно, что

$$M(\rho_1,\ldots,\rho_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,T) = \sup \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k \cos(\theta_k - \alpha_k), \tag{12}$$

где точная верхняя грань берется по всем наборам чисел λ_k и α_k таким, что

$$\max_{0\le t\le T} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\mu_k t - \alpha_k) \right| = 1. \tag{13}$$

Именно эту экстремальную задачу удалось решить при условии линейной независимости над $\mathbb{Q}$ набора частот колебаний $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Напомним определение.

Определение ([3, гл. 1]). *Совокупность чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ называется линейно независимой над $\mathbb{Q}$, если равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \mu_k = 0, \quad h_k \in \mathbb{Z},$$

возможно только в случае $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$. В противном случае совокупность чисел называется линейно зависимой над $\mathbb{Q}$.

Если $n = 2$, то линейная независимость над $\mathbb{Q}$ набора чисел $\{\mu_1, \mu_2\}$ равносильна иррациональности отношения μ_1/μ_2. В общем случае при $n \ge 3$ линейная независимость является более сложным понятием. Так например, числа $\mu_1 = \sqrt{2}$, $\mu_2 = \sqrt{3}$, $\mu_3 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, но отношение любых двух из них иррационально. Выяснению линейной зависимости (или независимости) конкретных совокупностей чисел посвящено много исследований в теории чисел (см. [3–5]).

Теорема 2. *Если $n = 1$, то при $T > \pi/\mu_1$ точная нижняя грань интегралов $\int_0^T |v(t)|dt$, взятая по множеству функций, удовлетворяющих условиям (9), равна ρ_1. Если $n \ge 2$ и совокупность чисел $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ линейно независима над $\mathbb{Q}$, то предел при $T \to +\infty$ этой точной нижней грани равен $\max\{\rho_k \mid 1 \le k \le n\}$.*

Из теорем 1 и 2 вытекает основной результат статьи.

Если частоты колебаний в системе (3) линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует временна́я граница T_0, зависящая от ε, совокупности частот $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, набора начальных и финальных условий, такая, что при любом $T > T_0$ колебательную систему (3) можно перевести из заданного начального в заданное финальное состояние, израсходовав ресурс управления

$$\int_0^T |u(t)|dt < \varepsilon + \max_{1 \le k \le n} (R_k/|b_k|),$$

где величины R_k заданы формулой (5). Если $n = 1$, то граница T_0 находится явно: $T_0 = \pi/\mu_1$.

В следующем разделе в явном виде строятся управления, близкие к оптимальным в этой задаче при $n = 1$ и $n = 2$. В Приложении приведены доказательства теорем 1 и 2.

3. Построение минимизирующего семейства управлений в случаях $n = 1$ и $n = 2$

В случае $n = 1$ согласно (9) требуется найти функцию $v \in L[0, T]$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^T v(t)\sin(\mu t)dt = \rho \sin\theta, \quad \int_0^T v(t)\cos(\mu t)dt = \rho\cos\theta, \tag{14}$$

($\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi], T > \pi/\mu$ – заданные числа) такую, чтобы интеграл $\int_0^T |v(t)|dt$ был возможно меньше. Он не может быть меньше ρ, поскольку

$$\rho = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \int_0^T (v(t)\cos(\mu t)\cos\theta + v(t)\sin(\mu t)\sin\theta)dt = \tag{15}$$

$$= \int_0^T v(t)\cos(\mu t - \theta)dt \le \int_0^T |v(t)|dt.$$

Если бы допускалось брать в качестве $v(t)$ обобщенную функцию, точное решение поставленной задачи получилось бы в виде

$$v_0(t) = \begin{cases} \rho\delta(t - \theta/\mu), & 0 < \theta \le \pi, \\ -\rho\delta(t - (\theta - \pi)/\mu), & \pi < \theta \le 2\pi, \end{cases} \tag{16}$$

где δ – дельта-функция Дирака. Непосредственно проверяется, что из (16) следует (14) и $\int_0^T |v_0(t)|dt = \rho$. Но в задаче (2), (3) требуется найти не обобщенное, а "классическое" управление и даже желательно брать $v(t)$ либо кусочно-постоянной, либо непрерывной функцией.

Здесь предъявлено семейство кусочно-постоянных управлений $v_h(t)$ (h – положительный параметр) с двумя точками переключения, для которых выполняются условия (14) и $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^T |v_h(t)|dt = \rho$. Этим попутно в простейшем случае $n = 1$ доказана теорема 2.

Если $0 < \theta \le \pi$, то положим

$$v_h(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho\mu}{2\sin(\mu h)}, & t \in \left[\dfrac{\theta}{\mu} - h, \dfrac{\theta}{\mu} + h\right], \\ 0 \text{ при других } t. \end{cases}$$

Параметр h удовлетворяет условиям $0 < h < \theta/\mu$, $h < T - \theta/\mu$. Ясно, что если $0 < \theta \le \pi$, $T > \pi/\mu$, то при всех достаточно малых положительных h эти условия выполняются. Имеем

$$\int\limits_0^T v_h(t)\sin(\mu t)dt = \int\limits_{\frac{\theta}{\mu}-h}^{\frac{\theta}{\mu}+h} \frac{\rho\mu\sin(\mu t)}{2\sin(\mu h)}dt = \frac{\rho\mu}{2\sin(\mu h)}\int\limits_{-h}^{h}\sin(\theta+\mu s)ds =$$

$$= \frac{\rho\mu\sin\theta}{2\sin(\mu h)}\int\limits_{-h}^{h}\cos(\mu s)ds = \rho\sin\theta.$$

Аналогично получаем $\int\limits_0^T v_h(t)\cos(\mu t)dt = \rho\cos\theta$. Таким образом, условия (14) выполнены, $\int\limits_0^T |v_h(t)|dt = \rho\dfrac{\mu h}{\sin(\mu h)} \to \rho$, $h \to 0$. Если $\pi < \theta \le 2\pi$, то годится семейство функций

$$v_h(t) = \begin{cases} \dfrac{-\rho\mu}{2\sin(\mu h)}, & t \in \left[\dfrac{\theta-\pi}{\mu} - h, \dfrac{\theta-\pi}{\mu} + h\right], \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что экстремальной функции $v \in L[0,T]$, удовлетворяющей условиям (14) и такой, что $\int\limits_0^T |v(t)|dt = \rho$, не существует; т.е. точная нижняя грань интегралов от модулей функций в данной задаче не достигается. Поэтому неизбежно строить приближенное решение данной задачи, для которого ресурс управления $\int\limits_0^T |v_h(t)|dt$ будет несколько больше ρ.

Приведем пример управления $v(t)$, при котором расход ресурса менее чем на 5% превышает минимально допустимый в случае $T \ge 4\pi/(3\mu)$.

Если $\pi/6 \le \theta \le 7\pi/6$, то полагаем

$$v(t) = \begin{cases} \rho\mu, \ t \in \left[\dfrac{\theta-\pi/6}{\mu}, \dfrac{\theta+\pi/6}{\mu}\right], \\ 0 \text{ при других } t. \end{cases}$$

Если $7\pi/6 < \theta < 13\pi/6$ (если $0 < \theta \le \pi/6$, то такое значение θ можно заменить значением $\theta + 2\pi$, попадающим в интервал $(2\pi, 13\pi/6)$), то полагаем

$$v(t) = \begin{cases} -\rho\mu, \ t \in \left[\dfrac{\theta-7\pi/6}{\mu}, \dfrac{\theta-5\pi/6}{\mu}\right], \\ 0 \text{ при других } t. \end{cases}$$

Тогда выполняются условия (14) и $\int\limits_0^T |v(t)|dt = \pi\rho/3 < 1{,}05\rho$.

Рассмотрим случай $n = 2$, когда частоты μ_1 и μ_2 несоизмеримы, т.е. отношение $\omega = \mu_2/\mu_1$ иррационально. Требуется найти семейство функций $v_h(t)$, дающих систему равенств

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^T v_h(t)\sin(\mu_1 t)dt = \rho_1\sin\theta_1, \quad \int\limits_0^T v_h(t)\cos(\mu_1 t)dt = \rho_1\cos\theta_1,\\
&\int\limits_0^T v_h(t)\sin(\mu_2 t)dt = \rho_2\sin\theta_2, \quad \int\limits_0^T v_h(t)\cos(\mu_2 t)dt = \rho_2\cos\theta_2,
\end{aligned} \tag{17}
$$

L^1-нормы $\int\limits_0^T |v_h(t)|dt$ которых стремятся к $\max(\rho_1,\ \rho_2)$ при $h \to 0$ и $T \to +\infty$. (Согласно теореме 2 точная нижняя грань L^1-нормы функций $v(t)$, удовлетворяющих условиям (17), при $T \to +\infty$ стремится к $\max(\rho_1,\ \rho_2)$.) Числа ρ_1, ρ_2, θ_1, θ_2 заданы, без ограничения общности считаем, что $\rho_2 \le \rho_1$, т.е. $\max(\rho_1,\ \rho_2) = \rho_1$.

Через $d(z)$ обозначим расстояние от вещественного числа z до ближайшего к нему целого числа. Обобщенным управлением, близким к оптимальному в случае $n = 2$, является сумма двух импульсов (δ-функций)

$$
v_0(t) = \frac{\rho_1}{2}\delta\left(t - \frac{2\pi l + \theta_1}{\mu_1}\right) + \frac{\rho_1}{2}\delta\left(t - \frac{2\pi m + \theta_1}{\mu_1}\right),
$$

где l и m – такие натуральные числа, что выполняются приближенные равенства

$$
\cos(\pi\omega(m - l)) \approx \frac{\rho_2}{\rho_1},\ d\left(l\omega - \frac{\theta_2 - \omega\theta_1}{2\pi}\right) \approx 0. \tag{18}
$$

Приближенные равенства (18) при некоторых m и l возможны в силу иррациональности числа ω: поскольку дробные части $\{k\omega\}$, $k \in \mathbb{N}$, всюду плотны на отрезке $[0, 1]$, то ими можно сколь угодно хорошо приблизить любое число из этого отрезка. Заметим, что два верхних равенства (17) для функции v_0 выполняются точно, а два нижних – приближенно в силу (18). Имеем также $\int\limits_0^T |v_0(t)|dt = \rho_1$. Поэтому если $v_0(t)$ приблизить такими же функциями, как и в случае $n = 1$, и прибавить к ним малую корректирующую добавку для того, чтобы равенства (17) выполнялись в точности, то получим интеграл $\int\limits_0^T |v_h(t)|dt$, мало отличающийся от ρ_1.

Реализуем эту идею. Возьмем произвольное число $\varepsilon \in (0, 0{,}1)$, обозначим $\eta = (2\pi)^{-1}\arccos(\rho_2/\rho_1)$, $\eta' = (2\pi)^{-1}(\theta_2 - \theta_1\omega)$ и найдем $A, B \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие неравенствам

$$
A < B, \quad d(A\omega - \eta) < \varepsilon/(8\pi), \quad d(B\omega - \eta') < \varepsilon/(8\pi). \tag{19}
$$

Ввиду иррациональности числа ω последовательность дробных частей $\{m\omega\}$, $m \in \mathbb{N}$, всюду плотна на $[0, 1]$, поэтому такие числа A и B существуют. Здесь имеется "неконструктивный" элемент процедуры построения семейства функций v_h. Для произвольного числа $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ нет возможности оценить сверху числа A и B какой-либо функцией ε. Это удается при наличии дополнительной информации об арифметической природе числа ω. Например, для квадратичных иррациональностей имеем $A, B = O(1/\varepsilon)$.

Из (19) получаем неравенства $|\cos(2\pi A\omega) - \rho_2/\rho_1| < \varepsilon/4$,

$$|\sin(2\pi B\omega + \theta_1\omega) - \sin\theta_2| < \varepsilon/4, \quad |\cos(2\pi B\omega + \theta_1\omega) - \cos\theta_2| < \varepsilon/4,$$

и, как следствие,

$$(20) \qquad \begin{aligned} &|\sin(2\pi B\omega + \theta_1\omega)\cos(2\pi A\omega) - (\rho_2/\rho_1)\sin\theta_2| < \varepsilon/2, \\ &|\cos(2\pi B\omega + \theta_1\omega)\cos(2\pi A\omega) - (\rho_2/\rho_1)\cos\theta_2| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Теперь найдем $h_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$(21) \qquad 1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sin(\mu_2 h)}{\sin(\mu_1 h)} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < h < h_0(\varepsilon).$$

(Это возможно, поскольку $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\mu_2 h)}{\sin(\mu_1 h)} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$.) Положим $l = B - A$, $m = B + A$,

$$\chi_h(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\dfrac{2\pi l + \theta_1}{\mu_1} - h, \dfrac{2\pi l + \theta_1}{\mu_1} + h\right] \bigcup \left[\dfrac{2\pi m + \theta_1}{\mu_1} - h, \dfrac{2\pi m + \theta_1}{\mu_1} + h\right], \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Ввиду формул

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} \sin(\mu t)dt = \frac{2\sin(\mu c)\sin(\mu h)}{\mu}, \quad \int\limits_{c-h}^{c+h} \cos(\mu t)dt = \frac{2\cos(\mu c)\sin(\mu h)}{\mu},$$

справедливых при любых $c, \mu, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $\mu \neq 0$, при $T = 2\pi(m+2)/\mu_1$, $h < 2\pi/\mu_1$, имеем

$$\int\limits_0^T \chi_h(t)\sin(\mu_1 t)dt = \frac{4\sin\theta_1\sin(\mu_1 h)}{\mu_1}, \quad \int\limits_0^T \chi_h(t)\cos(\mu_1 t)dt = \frac{4\cos\theta_1\sin(\mu_1 h)}{\mu_1},$$

$$\int\limits_0^T \chi_h(t)\sin(\mu_2 t)dt = \frac{2(\sin((2\pi l + \theta_1)\omega) + \sin((2\pi m + \theta_1)\omega))\sin(\mu_2 h)}{\mu_2} =$$

$$= \frac{4\cos(2\pi A\omega)\sin(2\pi B\omega + \theta_1)\sin(\mu_2 h)}{\mu_2},$$

$$\int\limits_0^T \chi_h(t)\cos(\mu_2 t)dt = \frac{4\cos(2\pi A\omega)\cos(2\pi B\omega + \theta_1)\sin(\mu_2 h)}{\mu_2}.$$

Следовательно, интегралы от функций $f_h(t) = \dfrac{\rho_1\mu_1\chi_h(t)}{4\sin(\mu_1 h)}$ равны

$$(22) \qquad \begin{aligned} &\int\limits_0^T f_h(t)\sin(\mu_2 t)dt = \rho_1\cos(2\pi A\omega)\sin(2\pi B\omega + \omega\theta_1)\left(\frac{\mu_1\sin(\mu_2 h)}{\mu_2\sin(\mu_1 h)}\right), \\ &\int\limits_0^T f_h(t)\cos(\mu_2 t)dt = \rho_1\cos(2\pi A\omega)\cos(2\pi B\omega + \omega\theta_1)\left(\frac{\mu_1\sin(\mu_2 h)}{\mu_2\sin(\mu_1 h)}\right). \end{aligned}$$

$$(23) \qquad \int\limits_0^T f_h(t)\sin(\mu_1 t)dt = \rho_1\sin\theta_1, \quad \int\limits_0^T f_h(t)\cos(\mu_1 t)dt = \rho_1\cos\theta_1.$$

Обозначим

$$\eta' = \rho_2 \sin\theta_2 - \int\limits_0^T f_h(t)\sin(\mu_2 t)dt, \quad \eta'' = \rho_2 \cos\theta_2 - \int\limits_0^T f_h(t)\cos(\mu_2 t)dt. \tag{24}$$

Из соотношений (20)–(22) выводим неравенства

$$|\eta'| < \rho_1\varepsilon, \quad |\eta''| < \rho_1\varepsilon. \tag{25}$$

Из (23), (24) видно, что функцию $v_h(t)$, удовлетворяющую условиям (17), можно получить, прибавив к f_h произвольную функцию g, ортогональную $\sin(\mu_1 t)$, $\cos(\mu_1 t)$ и такую, что

$$\int\limits_0^T g(t)\sin(\mu_2 t)dt = \eta', \quad \int\limits_0^T g(t)\cos(\mu_2 t)dt = \eta''. \tag{26}$$

Возьмем $g(t) = a$ при $0 \le t \le 2\pi/\mu_1$, $g(t) = b$ при $2\pi/\mu_1 < t \le 4\pi/\mu_1$, $g(t) = 0$ при $t > 4\pi/\mu_1$. Имеем

$$\int\limits_0^T g(t)\sin(\mu_2 t)dt = \frac{2(a\sin^2(\pi\omega) + b\sin(\pi\omega)\sin(3\pi\omega))}{\mu_2},$$

$$\int\limits_0^T g(t)\cos(\mu_2 t)dt = \frac{2(a\sin^2(\pi\omega)\cos(\pi\omega) + b\sin(\pi\omega)\cos(3\pi\omega))}{\mu_2}.$$

Следовательно, для справедливости (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система уравнений

$$\begin{cases} a\sin(\pi\omega) + b\sin(3\pi\omega) = \dfrac{\mu_2}{2\sin(\pi\omega)}\eta', \\ a\cos(\pi\omega) + b\cos(3\pi\omega) = \dfrac{\mu_2}{2\sin(\pi\omega)}\eta''. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим a и b.

$$\begin{aligned} a &= \frac{(\eta''\sin(3\pi\omega) - \eta'\cos(3\pi\omega))\mu_2}{2\sin(\pi\omega)\sin(2\pi\omega)}, \\ b &= \frac{(\eta'\cos(\pi\omega) - \eta''\sin(\pi\omega))\mu_2}{2\sin(\pi\omega)\sin(2\pi\omega)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Итак, для функции $v_h = f_h(t) + g(t)$ равенства (17) выполняются. Оценим сверху ее L^1-норму. Вследствие (21), (25) и (27) имеем

$$\int\limits_0^T |f_h(t)|dt = \frac{\rho_1\mu_1 h}{\sin(\mu_1 h)} < \rho\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\int\limits_0^T |g(t)|dt = \frac{2\pi}{\mu_1}(|a| + |b|) \le \frac{2\pi\mu_2 \max(|\eta'|, |\eta''|)}{\mu_1 \sin(\pi\omega)\sin(2\pi\omega)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^T |v_h(t)|dt \le \rho_1(1 + A\varepsilon), \quad \text{где} \quad A = 0{,}5 + 2\pi\omega \operatorname{cosec}(\pi\omega)\operatorname{cosec}(2\pi\omega).$$

Нетрудно видеть, что все функции v_h кусочно-постоянны и имеют 7 промежутков постоянства, а соответствующие им управления $u(t) = v_h(T - t)$ – 7 точек переключения.

4. Заключение

Основным результатом работы является нахождение в явном виде минимального ресурса управления, необходимого для гашения колебаний за достаточно большой промежуток времени. Это сделано, когда управляемый колебательный процесс описывается системой уравнений (3) (гашению соответствуют нулевые финальные условия) и совокупность частот колебаний $\mu_1, \ldots, \mu_n$ линейно независима над $\mathbb{Q}$. Искомый минимальный ресурс равен

$$\max\left\{ \frac{\sqrt{x_{0,k}^2\mu_k^2 + \dot{x}_{0,k}^2}}{|b_k|} \mid 1 \le k \le n \right\}.$$

В простейших случаях $n = 1$ и $n = 2$ управление, близкое к оптимальному, построено в явном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Задача Коши

$$\ddot{x}(t) + \mu^2 x(t) + u(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

решается следующим образом [6, с. 217]:

$$x(t) = x_0\cos(\mu t) + \dot{x}_0\frac{\sin(\mu t)}{\mu} + \int\limits_0^t u(\tau)\frac{\sin(\mu(\tau - t))}{\mu}d\tau.$$

Взяв $b_k u(t)$ вместо $u(t)$, μ_k вместо μ, $x_{0,k}$, $\dot{x}_{0,k}$ вместо x_0, $\dot{x}_0$ и положив $t = T$, получаем финальные условия:

$$x_{T,k} = x_{0,k}\cos(\mu_k T) + \dot{x}_{0,k}\frac{\sin(\mu_k T)}{\mu_k} - b_k\int\limits_0^T u(t)\frac{\sin(\mu_k(T - t))}{\mu_k}dt,$$

$$\dot{x}_{T,k} = -\mu_k x_{0,k}\sin(\mu_k T) + \dot{x}_{0,k}\cos(\mu_k T) - b_k\int\limits_0^T u(t)\cos(\mu_k(T - t))dt.$$

Перенеся интегралы в левые части, приходим к равенствам

$$(\text{П.1})\qquad \begin{aligned} b_k \int_0^T u(t)\sin(\mu_k(T-t))dt &= \mu_k x_{0,k}\cos(\mu_k T) + \dot{x}_{0,k}\sin(\mu_k T) - \mu_k x_{T,k},\\ b_k \int_0^T u(t)\cos(\mu_k(T-t))dt &= -\mu_k x_{0,k}\sin(\mu_k T) + \dot{x}_{0,k}\cos(\mu_k T) - \dot{x}_{T,k}. \end{aligned}$$

Далее непосредственно проверяется, что сумма квадратов правых частей равенств (П.1) равна $R_{0,k}^2 - 2R_{0,k}R_{T,k}\cos(\mu_k T + \theta_{T,k} - \theta_{0,k}) + R_{T,k}^2$. Следовательно, справедливы соотношения (5) и (6). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. При $n = 1$ теорема доказана в разделе 3. Рассмотрим случай $n \geq 2$. Выведем сначала оценку снизу максимума модуля сумм $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\mu_k t - \alpha_k)$ на отрезке в случае линейной независимости над $\mathbb{Q}$ чисел $\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_n$ при всех достаточно больших T произвольных λ_k и α_k. Без ограничения общности считаем, что $\mu_1 = 1$ (этого всегда можно добиться, введя пременную $\tau = \mu_1 t$).

Через $d(z)$ обозначим расстояние от числа $z \in \mathbb{R}$ до ближайшего к нему целого числа. Если числа $1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то по теореме Кронекера [7] последовательность векторов $(\{N\mu_2\}, \{N\mu_3\}, \ldots, \{N\mu_n\})$, $N \in \mathbb{N}$, (как обычно, $\{z\}$ – дробная часть числа z) образует множество, всюду плотное в кубе $[0,1]^{n-1}$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ и любого набора из $n-1$ чисел $\overline{\beta} = (\beta_2, \ldots, \beta_n)$ найдется такой номер $N_{\varepsilon,\overline{\beta}}$, что

$$\max_{2\leq k\leq n} d\left(N_{\varepsilon,\overline{\beta}}\mu_k - \beta_k\right) < \varepsilon.$$

Теперь возьмем в кубе $[0,1]^{n-1}$ $(\varepsilon/2)$-сеть, т.е. множество $B_\varepsilon \subset [0,1]^{n-1}$, обладающее следующим свойством: расстояние от любой точки куба до B_ε не больше $\varepsilon/2$. В качестве такой $(\varepsilon/2)$-сети годится пересечение решетки $\left\{\sum_{k=2}^{n} (m_k\varepsilon + \varepsilon/2)e_k | m_k \in \mathbb{Z}\right\}$ с кубом $[0,1]^{n-1}$. Количество элементов B_ε равно $(1/\varepsilon)^{n-1}$, если $\{1/\varepsilon\} < 1/2$, и $(1+1/\varepsilon)^{n-1}$, если $1/2 \leq \{1/\varepsilon\}$. Под $\{e_k\}_{k=2}^n$ понимается стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n-1}$: $(k-1)$-я координата вектора e_k равна 1, а остальные координаты – нули; под расстоянием между точками $\zeta = \sum_{k=2}^{n} \zeta_k e_k$ и $\eta = \sum_{k=2}^{n} \eta_k e_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ здесь подразумевается величина $\max_{2\leq k\leq n} |\zeta_k - \eta_k|$. Из сказанного заключаем, что, положив $\widetilde{N_\varepsilon} = \max\left\{N_{\varepsilon/2,\overline{\beta}} \mid \beta \in B_\varepsilon\right\}$, можно утверждать справедливость соотношения

$$(\text{П.2})\qquad \sup\left\{\min_{1\leq N\leq \widetilde{N_\varepsilon}}\left(\max_{2\leq k\leq n} d(N\mu_k - \gamma_k)\right) \mid (\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n) \subset [0,1]^{n-1}\right\} \leq \varepsilon.$$

Очень важно, что верхняя граница номера N, который дает приближение с точностью ε вектора $\overline{\gamma} = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n)$ вектором $(N\mu_2, N\mu_3, \ldots, N\mu_n)$ по модулю 1, зависит только от ε, но не от приближаемого элемента $\overline{\gamma} \subset [0,1]^{n-1}$. С помощью (П.2) сейчас будет доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует величина $T(\varepsilon)$ такая, что при любом $T \geq T(\varepsilon)$ верна оценка

$$(\text{П.3})\qquad \Lambda(1 - 20\varepsilon^2) \leq \max_{0\leq t\leq T}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\mu_k t - \alpha_k)\right| \leq \Lambda, \quad \text{где} \quad \Lambda = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|.$$

Оценка сверху максимума в (П.3) тривиальна и выполняется при любом T. В доказательстве нуждается оценка снизу. Напомним, что $\mu_1 = 1$, и без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 \geq 0$, поскольку в результате умножения функции на (-1) максимум ее модуля не меняется. Рассмотрим последовательность $t_N = 2\pi N + \alpha_1$. Очевидно, что

$$\text{(П.4)} \qquad \max_{0\leq t\leq T}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos(\mu_k t-\alpha_k)\right| \geq \max_{0\leq t_N\leq T}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos(\mu_k t_N-\alpha_k)\right| =$$

$$= \max_{0\leq t_N\leq T}\left|\lambda_1+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\cos(2\pi N\mu_k+\mu_k\alpha_1-\alpha_k)\right| =$$

$$= \max_{0\leq t_N\leq T}\left||\lambda_1|+\sum_{k=2}^{n}|\lambda_k|\cos(2\pi(N\mu_k-\gamma_k))\right|,$$

где $\gamma_k = (\alpha_k - \alpha_1\mu_k)/(2\pi)$, если $\lambda_k \geq 0$, $\gamma_k = 1/2 + (\alpha_k - \alpha_1\mu_k)/(2\pi)$, если $\lambda_k < 0$. Нетрудно убедиться в том, что $\cos(2\pi\tau) = \cos(2\pi d(\tau))$. Поэтому, взяв номер $N \in \in [1, N_\varepsilon]$ такой, что выполняется соотношение (П.2), находим

$$\cos(2\pi(N\mu_k-\gamma_k)) \geq \cos(2\pi\varepsilon) \geq 1-(2\pi\varepsilon)^2/2 > 1-20\varepsilon^2, \quad 2\leq k\leq n.$$

Следовательно,

$$\text{(П.5)} \qquad \sum_{k=2}^{n}|\lambda_k|\cos(2\pi(N\mu_k-\gamma_k))\,|\geq(1-20\varepsilon^2)\sum_{k=2}^{n}|\lambda_k|.$$

Из (П.4) и (П.5) при $T \geq T(\varepsilon) = 2\pi(N_\varepsilon + 1)$ получаем оценку снизу (П.3). Перейдем к оценке сверху экстремума (12) при $T \geq T(\varepsilon)$. Из (П.3) следует, что при $T \geq T(\varepsilon)$ равенство (13) влечет за собой следующую двухстороннюю оценку величины $\Lambda = = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$:

$$1 \leq \Lambda \leq (1-20\varepsilon^2)^{-1} < 1+25\varepsilon^2 < 1+\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<0{,}04,$$

вне зависимости от $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0, 2\pi)^n$. Отсюда для точной верхней грани в правой части (12) выводим оценку сверху

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\rho_k\cos(\theta_k-\alpha_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\rho_k \leq \Lambda\max_{1\leq k\leq n}\rho_k \leq (1+\varepsilon)\max_{1\leq k\leq n}\rho_k$$

при $0 < \varepsilon < 0{,}04$. Таким образом, для любого $\varepsilon \in (0,\ 0{,}04)$ существует число $T(\varepsilon)$ такое, что при всех $T > T(\varepsilon)$

$$\text{(П.6)} \qquad M(\rho_1,\ldots,\rho_n,\ \theta_1,\ldots,\theta_n,T) < (1+\varepsilon)\max_{1\leq k\leq n}\rho_k.$$

Оценка снизу

$$\text{(П.7)} \qquad \max_{1\leq k\leq n}\rho_k \leq M(\rho_1,\ldots,\rho_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,T)$$

следует из соотношения (15), в котором величины ρ, μ, θ следует заменить на ρ_m, μ_m, θ_m соответственно, где $\rho_m = \max\limits_{1\leq k\leq n} \rho_m$. Из (П.6) и (П.7) следует утверждение теоремы 2 при $n \geq 2$: $\lim\limits_{T\to+\infty} M(\rho_1, \ldots, \rho_n, \theta_1, \ldots, \theta_n, T) = \max\limits_{1\leq k\leq n} \rho_k$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурман В.И., Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Изв. АН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 41–49.
2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1968. Т. 27. Вып. 6. С. 51–116.
3. *Шидловский А.Б.* Диофантовы приближения и трансцедентные числа. М.: Изд-во МГУ, 1982.
4. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982.
5. *Шидловский А.Б.* Трансцедентные числа. М.: Наука, 1987.
6. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
7. *Спринджук В.Г.* Диофантовы приближения // Мат. энциклопедия. Т. 2. С. 162–167. М.: Сов. энциклопедия, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Буковым.

Поступила в редакцию 16.01.2007