А. Ю. Попов, Минимизация интеграла от модуля второй производной граничного управления колебаниями струны с закрепленным концом, *Автомат. и телемех.*, 2007, выпуск 2, 127–137

Автоматика и телемеханика, № 2, 2007

PACS 02.30.Yy

© 2007 г. **А.Ю. ПОПОВ, д-р физ.-мат. наук**
(Московский государственный университет)

МИНИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛА ОТ МОДУЛЯ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ[1]

Исследуется задача граничного управления процессом колебания струны с закрепленным концом при ограниченном ресурсе управления. Минимизируется интеграл от модуля второй производной граничного управления. Для экстремума найдены двусторонние оценки. В задаче гашения колебаний за промежуток времени T приведены формулы граничного управления, близкого к оптимальному при больших значениях времени T.

1. Постановка задачи

Рассматриваются колебания струны $u(x,t)$, $(x,t) \in Q = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ с закрепленным правым концом:

(1) $$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(l,t) \equiv 0.$$

Требуется перевести колебательный процесс из заданного начального состояния

(2) $$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

за время T в заданное финальное состояние

(3) $$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Достигается это за счет граничного управления

(4) $$u(0,t) = \mu(t),$$

которое надо построить, имея в распоряжении число T и функции φ_0, ψ_0, φ_1, ψ_1. В этой статье рассматриваются решения уравнения (1) $u(x,t) \in C^1(Q)$; предполагается, что частные производные u_t, u_x абсолютно непрерывны на любом вертикальном и горизонтальном отрезке, лежащем в Q, а уравнение (1) выполняется в Q почти всюду. Считается также, что

(5) $$\varphi_0, \varphi_1 \in W_1^2[0,l], \quad \psi_0, \psi_1 \in W_1^1[0,l], \quad \mu \in W_1^2[0,T].$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (проект № 06-01-00330).

Включение $u(x,t) \in C^1(Q)$ вместе с тождеством $u(l,t) \equiv 0$ дает следующие необходимые условия, которым должны удовлетворять функции (5):

$$\begin{aligned} &\varphi_0(l) = \psi_0(l) = \varphi_1(l) = \psi_1(l) = 0, \quad \varphi_0(0) = \mu(0), \\ &\psi_0(0) = \mu'(0), \quad \varphi_1(T) = \mu(T), \quad \psi_1(T) = \mu'(T). \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно теореме В.А. Ильина [1] при $T > 2l$ поставленная задача нахождения граничного управления (4) имеет бесконечно много решений $\mu(t)$. Обозначим множество всех ее решений через $\mathfrak{M}(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,T)$. Естественно, что из этого бесконечного множества функцию μ разумно выбрать исходя из какого-либо критерия оптимальности.

Задача 1. Найти

$$V(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,T) = \inf\left\{ \int\limits_0^T |\mu''(t)|\,dt \;\middle|\; \mu \in \mathfrak{M}(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,T) \right\}. \tag{7}$$

Поставленная задача имеет следующее прикладное значение. В процессе работы тех или иных конструкций возникают нежелательные колебания, которые требуется привести в заданный режим (чаще всего погасить). Величина $\int\limits_0^T |\mu''(t)|\,dt$ в некоторых моделях является расходом энергетических ресурсов (например, топлива), который производится в процессе управления. Поэтому ее следует минимизировать. Сходная задача минимизации ресурса управления колебаниями, описываемыми системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, исследовалась в [2].

2. Результаты общего характера

Результаты получены автором при дополнительном предположении $\psi_1(0) = 0$. Это условие сужает область применимости данного исследования, но тем не менее включает в себя важный случай гашения колебаний: $\varphi_1(x) \equiv \psi_1(x) \equiv 0$. В ситуации, когда $\psi_1(0) = 0$, удается поиск величины $V(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,T)$ свести к решению более простой экстремальной задачи. Это сведение составляет содержание теоремы 1. Вариацию функции F на отрезке $[a,b]$ обозначим через $\operatorname{Var} F\big|_a^b$.

Задача 2. Задана функция $F \in W_1^1[0,2l]$. Найти

$$\mathcal{V}(F,T) = \inf\Big\{ \operatorname{Var}\left(F(t) - F(t+2l)\right)\big|_0^T \Big\},$$

где inf берется по всем продолжениям функции $F(t) \in W_1^1[0,T]$, обращающимся в нуль при $t \geqslant T$.

Для любого $T > 2l$ определим число Δ из равенства

$$T = 2ln + \Delta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \Delta < 2l.$$

Т е о р е м а 1. *Для любых четырех функций* $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1$, *удовлетворяющих условиям* (5) *и* (6), *положим*

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi_0'(x)+\psi_0(x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(\Delta-x)-\psi_1(\Delta-x)}{2}, & 0\leqslant x\le\Delta,\\ \dfrac{\varphi_0'(x)+\psi_0(x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(x-\Delta)+\psi_1(x-\Delta)}{2}, & \Delta<x\leqslant l,\\ \dfrac{\varphi_0'(2l-x)-\psi_0(2l-x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(x-\Delta)+\psi_1(x-\Delta)}{2}, & l<x\leqslant l+\Delta,\\ \dfrac{\varphi_0'(2l-x)-\psi_0(2l-x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(2l-x+\Delta)-\psi_1(2l-x+\Delta)}{2}, & l+\Delta<x\leqslant 2l, \end{cases}$$

в случае $0\leqslant\Delta\leqslant l$, *и*

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi_0'(x)+\psi_0(x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(x-\Delta+2l)+\psi_1(x-\Delta+2l)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\Delta-l,\\ \dfrac{\varphi_0'(x)+\psi_0(x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(\Delta-x)-\psi_1(\Delta-x)}{2}, & \Delta-l<x\leqslant l,\\ \dfrac{\varphi_0'(2l-x)-\psi_0(2l-x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(\Delta-x)-\psi_1(\Delta-x)}{2}, & l<x\leqslant\Delta,\\ \dfrac{\varphi_0'(2l-x)+\psi_0(2l-x)}{2}-\dfrac{\varphi_1'(x-\Delta)+\psi_1(x-\Delta)}{2}, & \Delta<x\leqslant 2l, \end{cases}$$

в случае $l<\Delta\leqslant 2l$. *Тогда при условии* $\psi_1(0)=0$ *справедливо равенство*

$$V(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1,T)=\mathcal{V}(g,T).$$

Задача 2 имеет смысл не только для функций $F\in W_1^1[0,2l]$, но и для более широкого класса функций – непрерывных функций ограниченной вариации на отрезке $[0,2l]$ (обозначим его через $CV[0,2l]$).

Т е о р е м а 2. *Для любой функции* $F\in CV[0,2l]$ *верны оценки*

$$\mathcal{V}(F)\leqslant\mathcal{V}(F,T)\leqslant\mathcal{V}(F)+2|F(2l)|\min\Big(1,\frac{2l}{T-2l}\Big),$$

где $\mathcal{V}(F)=\operatorname{Var}F\big|_0^{2l}$.

С л е д с т в и е. *При* $T\to+\infty$ *верна асимптотика*

$$\mathcal{V}(F,T)=\mathcal{V}(F)+O(T^{-1}).$$

Из теорем 1 и 2 выводятся двусторонние оценки величины (7). Для их получения остается выразить $\mathcal{V}(g)$ и $|g(2l)|$ через функционалы, связанные с функциями $\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1$. Такое выражение непосредственно получается из формул для функции g и равенства

$$\operatorname{Var}h(t)\big|_a^b=\int\limits_a^b|h'(t)|\,dt\quad\forall h\in W_1^1[a,b], \tag{8}$$

но имеет достаточно громоздкий вид (поскольку зависит от значения Δ) и в статье в общем случае не приводится. Найдем выражение для $\mathcal{V}(g)$ в следующих важных частных случаях: 1) финальный момент времени T кратен l, 2) задача гашения колебаний ($\varphi_1(x)\equiv\psi_1(x)\equiv 0$), число $T>2l$ произвольно.

Т е о р е м а 3. Пусть $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1$ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям (5), (6), $\psi_1(0) = 0$, *функция g построена по ним в теореме 1. Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\mathcal{V}(g) = \int\limits_0^l \max\left(\left|\varphi_0''(x) - \varphi_1''(x)\right|, \left|\psi_0'(x) - \psi_1'(x)\right|\right) dx, \;\; T = 2ln, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; n \geqslant 2,$$

$$\mathcal{V}(g) = \int\limits_0^l \max\left(\left|\varphi_0''(x) + \varphi_1''(l-x)\right|, \left|\psi_0'(x) - \psi_1'(l-x)\right|\right) dx, \;\; T = (2n+1)l, \;\; n \in \mathbb{N},$$

а если $\varphi_1(x) \equiv \psi_1(x) \equiv 0$, то вне зависимости от $T > 2l$ имеем

$$\mathcal{V}(g) = \int\limits_0^l \max\left(\left|\varphi_0''(x)\right|, \left|\psi_0'(x)\right|\right) dx.$$

Теорема 3 легко выводится из (8), представления функции g (теорема 1) и формулы

$$\frac{|a+b| + |a-b|}{2} = \max\left(|a|, |b|\right).$$

Теоремы 1 и 2 доказываются в разделе 3. В разделе 4 задача гашения колебаний ввиду ее важности для приложений рассмотрена более детально.

3. Доказательства теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Известно [1, 3], что для любых функций φ_0, ψ_0, μ, имеющих гладкость (5) и удовлетворяющих условиям согласования (6), краевая задача (1), (2), (4) имеет единственное решение, которое допускает представление

$$u(x,t) = f(x+t) - f(t+2l-x),$$

где функция $f \in W_1^2[0, T+2l]$ определяется соотношениями

$$f(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi(z)\, dz + c_0, \quad x \in [0,l], \tag{9}$$

$$f(x) = f(2l-x) - \varphi(2l-x), \quad x \in (l, 2l],$$

$$f(t) - f(t+2l) = \mu(t), \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

c_0 – произвольная постоянная (ясно, что от ее значения функция $u(x,t)$ не зависит). Формулы (9) определяют функцию f на $[0, 2l]$, а формула (10) – ее продолжение на $(2l, T+2l]$; условия согласования (6) обеспечивают непрерывность $f(x)$ и $f'(x)$ в точках $x = l$ и $x = 2l$. Если же решается задача управления (1)–(3), а функция $\mu(t)$ не известна, то финальные условия (3) влекут за собой равенства

$$f(T+\xi) = \frac{\varphi_1(\xi)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \psi_1(z)\, dz + c_1, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant l, \tag{11}$$

$$f(T+\xi) = f(T+2l-\xi) - \varphi_1(2l-\xi), \quad l < \xi \leqslant 2l,$$

где c_1 – произвольная постоянная. Отсюда делается следующий вывод. Любое решение задачи управления (1)–(3) порождается произвольным продолжением функции f, заданной на объединении отрезков $[0, 2l] \cup [T, T + 2l]$ формулами (9), (11), на интервал $(2l, T)$, осуществленным так, что $f \in W_1^2[0, T + 2l]$; граничное управление $\mu(t)$ находится по формуле (10). Таким образом,

$$V(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, T) = \inf \left\{ \int\limits_0^T |(f(t) - f(t + 2l))''|\, dt \right\}, \tag{12}$$

где inf берется по всем продолжениям функции f, заданной формулами (9), (11), на интервал $(2l, T)$ таким, что $f \in W_1^2[0, T + 2l]$.

Обозначим

$$g_0(x) = f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_0'(x) + \psi_0(x)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\varphi_0'(2l - x) - \psi_0(2l - x)}{2}, & l < x \leqslant 2l, \end{cases} \tag{13}$$

$$g_1(x) = f'(T + x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1'(x) + \psi_1(x)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\varphi_1'(2l - x) - \psi_1(2l - x)}{2}, & l < x \leqslant 2l. \end{cases} \tag{14}$$

Вследствие (12) и (8) имеем

$$V(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, T) = \inf \Big\{ \mathrm{Var}\ (G(t) - G(t + 2l))\big|_0^T \ \Big|\ G \in W_1^1[0, T + 2l], \tag{15}$$
$$G(t) = g_0(t),\ \ G(T + t) = g_1(t)\ \text{ при }\ 0 \leq t \leq 2l \Big\}.$$

Теперь сведем поиск точной нижней грани (15) к решению более простой экстремальной задачи 2. Для этого заметим, что экстремум (15) не изменится, если из $G(t)$ вычесть $2l$-периодическую функцию. Вычтем из G $2l$-периодическое продолжение функции $\widetilde{g}_1(t) = g_1(t - T)$. Функция $\widetilde{g}_1(t)$ согласно (14) определена на отрезке $[T, T + 2l]$, а затем продолжена с периодом $2l$ на значения $t < T$. Через $g(t)$ обозначим разность $G(t) - \widetilde{g}_1(t)$. Функция $\widetilde{g}_1$, а вместе с ней и g, будет непрерывной, если $g_1(0) = g_1(2l)$. В силу (14) это верно тогда и только тогда, когда $\psi_1(0) = 0$. Из условий, наложенных в (15) на функцию G, следует, что $g(t) \equiv 0$ при $t \in [T, T + 2l]$, $g(t) = g_0(t) - \widetilde{g}_1(t)$ при $t \in [0, 2l]$. Из (13) и (14) получаем, что на отрезке $[0, 2l]$ функция $g(t)$ задается формулами, указанными в теореме 1. Таким образом,

$$V(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, T) = \inf \Big\{ \mathrm{Var}\ (g(t) - g(t + 2l))\big|_0^T,$$
$$g \in W_1^1[0, T + 2l],\ \ g(t) \equiv 0\ \text{ при }\ t \geqslant T \Big\},$$

а на отрезке $[0, 2l]$ $g(t)$ определена в теореме 1. Это и означает справедливость равенства

$$V(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, T) = \mathcal{V}(g, T).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала оценим $\mathcal{V}(F,T)$ снизу. Возьмем произвольную функцию $F \in CV[0,T]$, обращающуюся в нуль при $t \ge T$, и число $N \in \mathbb{N}$ так, что $2Nl > T$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T = \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2Nl} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_{2kl}^{2(k+1)l} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Var}\ (F(t+2kl)-F(t+2(k+1)l))\Big|_0^{2l} \ge \\
&\ge \mathrm{Var}\ \left(\sum_{k=0}^{N-1} (F(t+2kl)-F(t+2(k+1)l))\right)\Big|_0^{2l} = \\
&= \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2Nl))\Big|_0^{2l} = \mathrm{Var}\, F(t)\Big|_0^{2l} = \mathcal{V}(F).
\end{aligned}$$

Требуемая оценка снизу $\mathcal{V}(F,T)$ доказана. Для доказательства оценки сверху продолжим $F(t)$ на отрезок $[2l,T]$ линейно:

$$F(t) = F(2l)\frac{T-t}{T-2l}, \quad 2l \le t \le T. \tag{16}$$

При $2l < T \le 4l$ получим оценку

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T = \\
&= \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} + \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_{2l}^T = \\
&= \mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} + \mathrm{Var}\, F(t)\Big|_{2l}^T \le \\
&\le \mathrm{Var}\, F(t)\Big|_0^{2l} + \mathrm{Var}\, F(t+2l)\Big|_0^{2l} + \mathrm{Var}\, F(t)\Big|_{2l}^T = \\
&= \mathrm{Var}\, F(t)\Big|_0^{2l} + 2\mathrm{Var}\, F(t)\Big|_{2l}^T.
\end{aligned}$$

Поскольку линейное продолжение $F(t)$ на $[2l,T]$ является монотонной функцией на этом отрезке, то $\mathrm{Var}\, F(t)\Big|_{2l}^T = |F(2l)-F(T)| = |F(2l)|$. Следовательно,

$$\mathrm{Var}\ (F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T \le \mathcal{V}(F) + 2\,|F(2l)|\,, \quad 2l < T \le 4l. \tag{17}$$

При $T > 4l$ воспользуемся тем, что в силу линейности функции (16) разность $F(t)-F(t+2l)$ постоянна на отрезке $[2l, T-2l]$, а значит, ее вариация на этом отрезке равна 0. Отсюда находим

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad & \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T = \\
&= \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_{T-2l}^T = \\
&= \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{T-2l}^T \le \\
&\le \operatorname{Var} F(t)\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var} F(t+2l)\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{T-2l}^T = \\
&= \mathcal{V}(F) + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2l}^{4l} + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{T-2l}^T.
\end{aligned}
$$

Так как вариация функции $y=kx+l$ на произвольном отрезке $[a,b]$ равна $|k|(b-a)$, то ввиду (16) имеем

$$
(19)\qquad \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2l}^{4l} = \operatorname{Var} F(t)\Big|_{T-2l}^T = \frac{2l\,|F(2l)|}{T-2l}.
$$

Из (18) и (19) находим

$$
(20)\qquad \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T = \mathcal{V}(F) + \frac{4l\,|F(2l)|}{T-2l}, \quad 4l<T.
$$

Неравенства (17) и (20) доказывают оценку сверху в теореме 2. Теорема 2 полностью доказана.

Обсудим вопрос о зазоре, имеющем место между верхней и нижней оценками в теореме 2. В общем случае уменьшить этот зазор нельзя. Действительно, для любого $T>2l$ существует функция $\Phi\in CV[0,T]$, обращающаяся в нуль при $t\geqslant T$, такая что $\Phi(2l)\ne 0$ и

$$
(21)\qquad \operatorname{Var}\,(\Phi(t)-\Phi(t+2l))\Big|_0^T = \operatorname{Var}\Phi(t)\Big|_0^{2l}.
$$

Равенство (21) означает, что на этой функции достигается нижняя оценка теоремы 2, причем в нетривиальном случае, поскольку $\Phi(2l)\ne 0$. Простейшим примером является

$$
\Phi(t) = \begin{cases} T-t, & 0\leqslant t\leqslant T, \\ 0, & t>T. \end{cases}
$$

С другой стороны, если $F(0)=0$ и $F(t)$ возрастает на $[0,2l]$, то

$$
(22)\qquad \mathcal{V}(F,T) = \mathcal{V}(F) + 2F(2l), \quad 2l<T\leqslant 4l.
$$

Следовательно (в силу неравенства $F(2l)>0$), на таких функциях достигается оценка сверху в теореме 2. Весьма вероятно, что оценка сверху в этом же случае будет достигаться и при $T>4l$.

Для доказательства (22) запишем равенство

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^T = \\
&= \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_{2l}^T.
\end{aligned}
$$

Далее воспользуемся очевидной оценкой $\operatorname{Var} h(t)\Big|_a^b \geqslant |h(b)-h(a)|$, справедливой для любой функции $h \in CV[a,b]$. Получим

$$(24)\qquad \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2l} \geqslant |(F(0)-F(2l))-(F(2l)-F(4l))| = \\ = |F(0)-2F(2l)+F(4l)| = 2F(2l),$$

поскольку $F(0)=0$ по условию, а $F(4l)=0$ ввиду неравенства $T<4l$. Имеем также

$$(25)\qquad \operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_{2l}^{T} = \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2l}^{T} \geqslant |F(2l)-F(T)| = F(2l).$$

Из (23)–(25) находим

$$(26)\qquad \mathcal{V}(F,T) \geqslant 3F(2l).$$

Но ввиду возрастания функции F на $[0,2l]$ и равенства $F(0)=0$ имеем

$$\mathcal{V}(F) = F(2l)-F(0) = F(2l).$$

Отсюда и из (26) получаем

$$\mathcal{V}(F,T) \geqslant \mathcal{V}(F) + 2F(2l).$$

Противоположное неравенство $\mathcal{V}(F,T) \leqslant \mathcal{V}(F)+2F(2l)$ было доказано в теореме 2. Следовательно, имеет место равенство (22).

Можно выделить подкласс функций F, для которых величина $\mathcal{V}(F,T)$ сходится к $\mathcal{V}(F)$ при $T\to+\infty$ с экспоненциальной скоростью.

Т е о р е м а 4. *Если $0<F(2l)<F(0)$ или $F(0)<F(2l)<0$, то при $T\in[2nl,2(n+1)l)$ для всех $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, верно неравенство*

$$(27)\qquad \mathcal{V}(F,T) \leqslant \mathcal{V}(F) + 2q^{n-2}\,|F(2l)|\,, \quad \text{где} \quad q = F(2l)/F(0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду возрастания по T величины $\mathcal{V}(F,T)$ достаточно вывести неравенство (27) при $T=2nl$. Продолжим функцию F на полуинтервалы $(2kl,2(k+1)l]$ следующим образом:

$$(28)\qquad F(t+2kl) = q^kF(t), \quad 1\leqslant k\leqslant n-2, \quad 0<t\leqslant 2l.$$

При продолжении (28) непрерывность функции F в точках $2kl$ не нарушается, поскольку из определения числа q следует, что $F(2l)=qF(0)$, откуда

$$\lim_{t\to0+} F(t+2kl) = q^kF(0) = q^{k-1}F(2l) = \lim_{t\to 2l-0} F(t+2(k-1)l).$$

На полуинтервал $(2(n-1)l,2nl]$ продолжим F линейно:

$$(29)\qquad F(t) = \frac{F(2(n-1)l)(2nl-t)}{2l}.$$

Оценим сверху вариацию разности $F(t)-F(t+2l)$ на отрезке $[0,T]=[0,2nl]$ при данном способе продолжения F. Имеем

$$\operatorname{Var}\,(F(t)-F(t+2l))\Big|_0^{2nl} = V_1+V_2+V_3,$$

где

$$V_1 = \operatorname{Var}\left(F(t) - F(t+2l)\right)\Big|_0^{2(n-2)l} = \sum_{k=0}^{n-3} \operatorname{Var}\left(F(t) - F(t+2l)\right)\Big|_{2kl}^{2(k+1)l} = \tag{30}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3} \operatorname{Var}\left(F(t+2kl) - F(t+2(k+1)l)\right)\Big|_0^{2l},$$

$$V_2 = \operatorname{Var}\left(F(t) - F(t+2l)\right)\Big|_{2(n-2)l}^{2(n-1)l}, \quad V_3 = \operatorname{Var}\left(F(t) - F(t+2l)\right)\Big|_{2(n-1)l}^{2nl}.$$

Вычислим V_1, V_3 и оценим сверху V_2. Из (28) и (30) находим

$$V_1 = \sum_{k=0}^{n-3} \operatorname{Var}\left(q^k F(t) - q^{k+1} F(t)\right)\Big|_0^{2l} = \mathcal{V}(F) \sum_{k=0}^{n-3} (q^k - q^{k+1}) = (1 - q^{n-2})\mathcal{V}(F), \tag{31}$$

$$V_2 \leqslant \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2(n-2)l}^{2(n-1)l} + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2(n-1)l}^{2nl} = \tag{32}$$

$$= \operatorname{Var} q^{n-2} F(t)\Big|_0^{2l} + \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2(n-1)l}^{2nl} =$$

$$= q^{n-2}\mathcal{V}(F) + |F(2(n-1)l)| = q^{n-2}\mathcal{V}(F) + q^{n-2}\,|F(2l)|\,.$$

(При вычислении вариации функции F на отрезке $[2(n-1)l, 2nl]$ использовалась формула (29)). Ввиду обращения в нуль $F(t)$ при $t \geqslant 2nl$ имеем

$$V_3 = \operatorname{Var} F(t)\Big|_{2(n-1)l}^{2nl} = q^{n-2}\,|F(2l)|\,. \tag{33}$$

Складывая неравенства (31)–(33), приходим к (27). Теорема 4 доказана.

4. Гашение колебаний

Процессу гашения колебаний соответствуют нулевые финальные условия и, следовательно, требуется найти величину $V(\varphi_0, \psi_0, 0, 0, T)$, которую для краткости обозначим через $V(\varphi_0, \psi_0, T)$. Согласно теореме 1 справедливо равенство

$$V(\varphi_0, \psi_0, T) = \mathcal{V}(g, T), \tag{34}$$

где функция $g(x) \equiv g_0(x)$ задана формулами (13). Обозначим

$$W(\varphi, \psi) = \int_0^l \max(|\varphi''(x)|\,, |\psi'(x)|)dx.$$

Из (13) находим

$$|g(2l)| = |\varphi_0'(0) - \psi_0(0)|\,/2. \tag{35}$$

Теоремы 2, 3 вместе с соотношениями (34), (35) дают оценку

$$W(\varphi_0, \psi_0) \leqslant V(\varphi_0, \psi_0, T) \leqslant W(\varphi_0, \psi_0) + |\varphi_0'(0) - \psi_0(0)| \min\left(1, \frac{2l}{T - 2l}\right). \tag{36}$$

Из неравенства (36) можно сделать следующий вывод. Колебания (1) с начальными условиями (2) невозможно погасить, располагая ресурсом управления, меньшим $W(\varphi_0, \psi_0)$. С другой стороны, если промежуток времени T достаточно велик (например, $T = 2l(N+1)$, N – большое натуральное число), то наличия энергетического ресурса $W(\varphi_0, \psi_0) + |\varphi_0'(0) - \psi_0(0)|/N$ (эта величина приближается к $W(\varphi_0, \psi_0)$ с увеличением N) достаточно для гашения колебаний, если соответствующим образом задать управление $\mu(t)$. Приведем явный вид граничного управления процессом гашения колебаний, которое для интеграла $\int\limits_0^T |\mu''(t)|\, dt$ дает оценку сверху (36).

Положим $\mu_0(t) = (\varphi_0(t) + \varphi_0(0))/2 + (1/2)\int\limits_0^t \psi_0(x)dx, \quad k = (\varphi_0'(0) - \psi_0(0))/2.$

Граничное управление $\mu(t)$, дающее оценку сверху (36), находится по следующим формулам.

Если $T \in (2l, 3l]$, то

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0(t) - \dfrac{k(2l - T + t/2)t}{2l - T}, & 0 \leqslant t \leqslant T - 2l, \\ \mu_0(t) + k(l - T/2), & T - 2l < t \leqslant l, \\ \mu_0(2l - t) - \varphi(2l - t) + k(l - T/2), & l < t \leqslant 2l, \\ \dfrac{k(t - T)^2}{2(2l - T)}, & 2l < t \leqslant T. \end{cases}$$

Если $T \in (3l, 4l]$, то

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0(t) - \dfrac{k(2l - T + t/2)t}{2l - T}, & 0 \leqslant t \leqslant l, \\ \mu_0(2l - t) - \varphi(2l - t) - \dfrac{k(2l - T + t/2)t}{2l - T}, & l < t \leqslant T - 2l, \\ \mu_0(2l - t) - \varphi(2l - t) + k(l - T/2), & T - 2l < t \leqslant l, \\ \dfrac{k(t - T)^2}{2(2l - T)}, & 2l < t \leqslant T. \end{cases}$$

Если $T > 4l$, то

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0(t) - \dfrac{k(2l - T + t/2)t}{2l - T}, & 0 \leqslant t \leqslant l, \\ \mu_0(2l - t) - \varphi(2l - t) - \dfrac{k(2l - T + t/2)t}{2l - T}, & l < t \leqslant 2l, \\ \dfrac{2lk(t + l - T)}{T - 2l}, & 2l < t \leqslant T - 2l, \\ \dfrac{k(t - T)^2}{2(2l - T)}, & T - 2l < t \leqslant T. \end{cases}$$

5. Заключение

Задачи минимизации квадратичных интегральных функционалов, взятых на граничных управлениях колебаниями струны, поставлены и решены В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым [4]. В их работе минимизировались интегралы (суммы интегралов, если управление шло на обоих концах) от квадрата первых производных граничных управлений, если управление осуществлялось упругой силой. Недавно В.А. Ильин и Е.И. Моисеев [5] получили более общие результаты о минимизации L^p-норм производных граничных управлений (при любом $p \geqslant 1$), однако интегралы от $|\mu''(t)|$ ими не рассматривались. Эта задача изучена автором, по-видимому, впервые. Отметим, что В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым найдены точные решения рассмотренных ими задач минимизации, экстремальные граничные управления предъявлены в явном виде. Автором экстремум (7) не найден. Для величины $V(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, T)$ получены двусторонние оценки, смыкающиеся при $T \to +\infty$. Указаны аналитические выражения управлений, близкие к оптимальным.

Автор выражает благодарность доктору технических наук профессору В.И. Гурману за постановку задачи и академикам В.А. Ильину и Е.И. Моисееву за плодотворное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1640–1659.
2. *Гурман В.И., Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Изв. АН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 41–49.
3. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004.
4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 89–114.
5. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Граничное управление колебаниями струны, минимизирующее интеграл от положительной степени модуля управления и его производной // АиТ. 2007. № 2. С. 113–119.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Буковым.

Поступила в редакцию 19.04.2006