А. Ю. Попов, И. В. Тихонов, Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 9, 71–102

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm1421

УДК 517.956

А. Ю. Попов, И. В. Тихонов

Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени

При $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$ рассматривается нелокальная по времени задача для уравнения теплопроводности. Требуется найти функцию $u(x,t)$ из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x).$$

Указана явная формула для решения. Изучен вопрос о ее применимости. Дано описание классов корректности. Основное предположение: при $|x| \to \infty$ решение $u(x,t)$ растет не быстрее $\exp(\sigma|x|)$ с показателем $\sigma < \sqrt{\pi/T}$.

Библиография: 17 названий.

Задачи теплопроводности с решениями, растущими при $|x| \to \infty$, привлекают внимание исследователей со времен классических работ [1]–[3]. Наиболее изученной является задача Коши, где наряду со стандартной техникой эффективно применяется теория обобщенных функций [4]. Результаты формулируются в терминах решений, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем $\exp(\sigma|x|^2)$ (или в каких-то близких по типу классах).

В настоящей работе нас интересует другая ситуация, когда вместо условия Коши задан интеграл по времени t на некотором отрезке $[0,T]$. "Абстрактная" теория единственности для подобных задач была разработана в [5]. На ее основе в [6], [7] получено полное описание классов единственности для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Результаты сформулированы в терминах решений, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее $\exp(\sigma|x|)$, причем граница между единственностью и неединственностью определяется значением $\sigma = \sqrt{\pi/T}$. Вопрос о разрешимости в [6], [7] не рассматривался. В настоящей работе мы устраним этот пробел, указав необходимые и достаточные условия разрешимости. Кроме того, получим явную формулу для решений и дадим ее обоснование. В работе используется та же шкала роста $\exp(\sigma|x|)$.

Заметим, что в [6], [7] вводилась еще одна, более тонкая шкала $|x|^a \exp(\sigma|x|)$ с границей $a = -(n-1)/2$, $\sigma = \sqrt{\pi/T}$ между единственностью и неединственностью. Однако исследование разрешимости в такой "тонкой" шкале становится довольно громоздким. Поэтому на данном этапе мы ограничились простой шкалой $\exp(\sigma|x|)$.

Основной результат представлен в теореме 3 из § 6. Более простые предварительные версии даны в теоремах 1 и 2 из §§ 4 и 6 соответственно; дополнительные уточнения сделаны в теоремах 5, 6 из § 10. Центральное соотношение – формула (11) для начального состояния $u_0(x)$; ее обобщение – формула (21). Здесь фигурирует "функция Грина" $g_T(x)$, которая подробно изучается в § 7. В частности, доказывается важная теорема 4 о разложении $g_T(x)$ в сходящийся ряд по функциям Ханкеля, откуда выводятся необходимые оценки $g_T(x)$ на бесконечности. Остальное содержание работы видно из названий параграфов. Рассмотрение ведется классическими средствами, теория обобщенных функций не используется.

§ 1. Постановка задачи

Фиксируем натуральное число $n \geqslant 1$ и вещественное $T > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x,t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$, из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Функция $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ предполагается заданной. Множитель $1/T$ в формуле (2) взят для удобства – он позволяет считать $\varphi(x)$ в точности средним значением "температуры" $u(x,t)$ по времени t. Очевидно, что (2) эквивалентно условию

$$\int_0^T u(x,t)\,dt = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где $\psi(x) = T\varphi(x)$. Последующие результаты сразу переносятся с задачи (1), (2) на (1), (3). Поэтому будем рассматривать только задачу (1), (2). Через $\psi(x)$ будем часто обозначать интеграл, вычисленный для $u(x,t)$ по формуле (3).

Решением задачи (1), (2) назовем функцию $u(x,t)$ из класса

$$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T]),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле при $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t \leqslant T$ и обращающую соотношение (2) в верное тождество всюду в $\mathbb{R}^n$.

Недавно в работе [7] авторами установлено, что решение задачи (1), (2) будет единственным в классе функций $u(x,t)$, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее $\exp(\sigma|x|)$ с показателем $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. При $\sigma = \sqrt{\pi/T}$ единственность решения уже нарушается (см. теоремы 1, 3 в [7]; см. также [6]).

В настоящей работе будет доказано, что в этих же экспоненциальных классах единственности (с $\sigma < \sqrt{\pi/T}$) задача (1), (2) будет заведомо разрешимой при некоторых естественных ограничениях на функцию $\varphi(x)$ и неразрешимой, если такие ограничения не выполняются (см. теоремы 1–3 ниже).

Все интересующие нас решения представимы интегральной формулой Пуассона

$$u(x,t)\big|_{0<t\leqslant T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)u_0(y)\,dy, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

Начальное состояние $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ будет всегда выбираться так, чтобы гарантировать принадлежность функции $u(x,t)$, определенной по формуле (4), классу

$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Поэтому задачу (1), (2) можно трактовать как задачу о нахождении неизвестного начального состояния $u_0(x)$, при котором функция $u(x,t)$ из формулы (4) обращает соотношение (2) в верное тождество.

Начнем изучение задачи (1), (2) с вывода явной формулы для $u_0(x)$ при помощи преобразования Фурье. На этом этапе рассуждения носят "формальный" характер.

§ 2. Формальное преобразование Фурье

Пусть

$$U(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\exp(-i\xi x)\,dx, \qquad \Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-i\xi x)\,dx \tag{5}$$

– формальные преобразования Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь, как обычно, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$, $i^2 = -1$.

Соотношения (1), (2) переходят в следующие:

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = -|\xi|^2 U(\xi,t), \qquad \frac{1}{T}\int_0^T U(\xi,t)\,dt = \Phi(\xi).$$

Из дифференциального уравнения следует, что $U(\xi,t) = \exp(-|\xi|^2 t)U_0(\xi)$. Подставим эту функцию в интеграл, вычислим его и выразим $U_0(\xi)$. Получим

$$U_0(\xi) = \frac{T|\xi|^2}{1-\exp(-T|\xi|^2)}\,\Phi(\xi) \equiv P_T(\xi)\Phi(\xi). \tag{6}$$

Функция

$$P_T(\xi) \equiv \frac{T|\xi|^2}{1-\exp(-T|\xi|^2)} = \frac{T|\xi|^2\exp(T|\xi|^2)}{\exp(T|\xi|^2)-1} \tag{7}$$

при $|\xi| \to \infty$ ведет себя как $T|\xi|^2$, и, значит, ей не соответствует никакое преобразование Фурье от классического объекта. Выделим в (7) слагаемое $T|\xi|^2$ и запишем

$$U_0(\xi) = \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2)-1}\,\Phi(\xi) + T|\xi|^2\Phi(\xi) \equiv G_T(\xi)\Phi(\xi) + T|\xi|^2\Phi(\xi). \tag{8}$$

Здесь

$$G_T(\xi) \equiv \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2)-1}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Обозначим $Q(s) \equiv s(\exp(s)-1)^{-1}$, $s \in \mathbb{R}$, с обычным соглашением $Q(0) = 1$. Функция $Q(s)$ бесконечно дифференцируема по $s \in \mathbb{R}$. Она сама и все ее производные стремятся к нулю при $s \to +\infty$ быстрее любой степени s. Следовательно, функция $G_T(\xi) = Q(T|\xi|^2)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Обратное преобразование Фурье корректно определено формулой

$$g_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2)-1}\,\exp(i\xi x)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

и также принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^n)$. Интеграл в (10) быстро сходится, функция $g_T(x)$ является целой[1] по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Асимптотические свойства $g_T(x)$ при $|x| \to \infty$ подробно исследуются в § 7 (см. также лемму 2 в § 3). Из (10) следует, что $g_T(x) = T^{-n/2} g_1(T^{-1/2}x)$, но мы будем рассматривать $g_T(x)$ независимо, не используя выражение через $g_1(x)$.

Применим в (8) обратное преобразование Фурье. Учитывая теорему о свертке и то, что $|\xi|^2\Phi(\xi)$ переходит в $(-\Delta\varphi(x))$, получаем выражение для начального состояния $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\varphi(y)\,dy - T\Delta\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

с функцией $g_T(x)$ из формулы (10). Будем считать $g_T(x)$ *функцией Грина* для рассматриваемой задачи (1), (2). Особая связь $g_T(x)$ с данной задачей окончательно раскрывается далее (см. замечание 2 после формулировки леммы 8 в § 8).

В случае, когда $\varphi(x)$ и $\Phi(\xi)$ быстро убывают на бесконечности, можно не разбивать (6) на два слагаемых, а записать непосредственно:

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} P_T(\xi)\Phi(\xi)\exp(i\xi x)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

с функцией $P_T(\xi)$ из формулы (7), $P_T(\xi) = G_T(\xi) + T|\xi|^2$. Соотношение (12) определяет *псевдодифференциальный оператор* (ПДО) от функции $\varphi(x)$, причем $P_T(\xi)$ является *символом* данного ПДО. Поскольку $P_T(\xi)$ не зависит от x, имеем ПДО *с постоянными коэффициентами* (см. [8; гл. I, § 1, п. 1.8]).

Естественно ожидать, что функция $u(x,t)$, построенная по формуле Пуассона (4) для указанного начального состояния $u_0(x)$, будет решением задачи (1), (2). Этот факт нетрудно обосновать при помощи классического (“неформального”) преобразования Фурье в пространствах типа $S(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$, где формулы (5) и (12) приобретают содержательный смысл. Но мы пойдем другим путем[2]. Покажем, что правило (11) является более универсальным – оно применимо в пространствах функций экспоненциального роста при условии, что показатель роста меньше, чем $\sqrt{\pi/T}$.

§ 3. Экспоненциальные классы функций

Пусть σ – фиксированное вещественное число $(-\infty < \sigma < +\infty)$. Обозначим через $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ класс функций $u(x,t)$, заданных на $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, для которых справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant M\exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13}$$

[1]Это утверждение допускает двойную трактовку. Во-первых, $g_T(x)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}^n$ при замене в (10) переменной $x = (x_1,\dots,x_n)$ на $z = (z_1,\dots,z_n)$. Полученный интеграл сходится при всех $z \in \mathbb{C}^n$. Во-вторых, из формулы (51) (см. далее в работе) следует, что $g_T(x)$ является целой функцией от $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

[2]В нашем исследовании теория ПДО никак не используется. Было бы интересно узнать, даст ли ее применение что-то принципиально новое для рассматриваемой задачи (1), (2).

с какой-то константой $M > 0$, зависящей от функции u. Аналогично через $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$|f(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

с константой $M > 0$, зависящей от функции f.

В дальнейшем без оговорок используется естественная связь между оценками вида (13) и (14). Например, если непрерывная функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, то ее интеграл (3) принадлежит $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$; кроме того, $u(\,\cdot\,,t) \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при каждом $t \in [0,T]$. Из формулы Пуассона (4) без труда выводится следующий "обратный" факт.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,t)$ выражается на $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ по формуле (4) с непрерывной функцией $u_0(x)$ из класса $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Тогда $u(x,t)$ принадлежит $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ с тем же значением $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. При $\sigma = 0$ утверждение леммы общеизвестно. Пусть $\sigma \neq 0$ и $|u_0(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|)$ с константой $M > 0$. Оценивая $u(x,t)$ при $t > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} M e^{\sigma|y|}\,dy \\ &= \frac{M e^{\sigma|x|}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(4t)} e^{\sigma(|x-y|-|x|)}\,dy. \end{aligned}$$

Из неравенства треугольника следует, что $\sigma(|x-y|-|x|) \leqslant \sigma|y|$ при $\sigma > 0$ и $\sigma(|x-y|-|x|) \leqslant -\sigma|y|$ при $\sigma < 0$. Таким образом,

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{M e^{\sigma|x|}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(4t)} e^{|\sigma|\cdot|y|}\,dy.$$

Учитывая, что $|y| \leqslant |y_1| + \dots + |y_n|$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant M e^{\sigma|x|} \biggl(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)} e^{|\sigma|\cdot|s|}\,ds \biggr)^n \\ &\leqslant M e^{\sigma|x|} \biggl(\frac{2}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)} e^{|\sigma| s}\,ds \biggr)^n. \end{aligned}$$

Последнее выражение в скобках $(\dots)^n$ равно $2\exp(\sigma^2 t)$. Заменяя его максимальным значением на промежутке $(0,T]$, заключаем, что

$$|u(x,t)| \leqslant M M^* \exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma^2 T)$. Лемма доказана.

Для наших целей важно знать асимптотическое поведение при $|x| \to \infty$ функции $g_T(x)$ из формулы (10). Элементарные рассуждения показывают, что $|g_T(x)|$ не может стремиться к нулю слишком быстро.

Лемма 2. *Функция* $g_T(x)$, *определенная формулой* (10), *не принадлежит* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *ни при каком* $\sigma < -\sqrt{\pi/T}$.

Доказательство. Допустим, что $|g_T(x)| \leqslant M\exp(\sigma|x|)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ с некоторым $\sigma < 0$. Покажем, что тогда $\sigma \geqslant -\sqrt{\pi/T}$. Функция $G_T(\xi)$ из формулы (9) является преобразованием Фурье для $g_T(x)$. Выберем аргумент $\xi \in \mathbb{R}^n$ "одномерным" вида $(s, 0, \ldots, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, и запишем

$$\frac{Ts^2}{\exp(Ts^2)-1} = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x)\exp(-isx_1)\,dx.$$

Аналитически продолжим последнее равенство в комплексную плоскость, заменив s на $z = s + i\tau$ с $|\tau| \equiv |\operatorname{Im} z| < -\sigma$. Эта процедура законна – в силу оценки для $|g_T(x)|$ интеграл сходится равномерно на любом компакте в указанной полосе и там

$$\left|\frac{Tz^2}{\exp(Tz^2)-1}\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} Me^{\sigma|x|}e^{\tau x_1}\,dx \leqslant M\int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma+|\tau|)|x|}\,dx < \infty,$$

ибо $\sigma + |\tau| < 0$. Но $z_1 \equiv (1+i)\sqrt{\pi/T}$ – полюс функции $Tz^2(\exp(Tz^2)-1)^{-1}$ и $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{\pi/T}$. Поэтому $\sqrt{\pi/T} \geqslant -\sigma$ и $\sigma \geqslant -\sqrt{\pi/T}$. Лемма доказана.

Далее, в § 7, мы покажем, что численная граница $\left(-\sqrt{\pi/T}\,\right)$, найденная в лемме 2, является точной и $g_T \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma = -\sqrt{\pi/T}$. Здесь доказательство намного сложнее, но в конечном счете оно также сводится к тому, что $\sqrt{\pi/T}$ есть мнимая часть "первого" полюса $z_1 = (1+i)\sqrt{\pi/T}$ функции $Tz^2(\exp(Tz^2)-1)^{-1}$.

§ 4. Предварительный результат о разрешимости и необходимость в его обобщении

Классы $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ тесно связаны с изучаемой задачей (1), (2). Из результатов [7] следует, что задача (1), (2) не может иметь двух различных решений в $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ при $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. И наоборот, при $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$ если решение существует, то оно заведомо неединственно. Таким образом, в классах $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ с $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$ интегральное условие (2) не определяет однозначно решение уравнения теплопроводности – задача (1), (2) оказывается некорректной. Поэтому будем изучать (1), (2) только в классах $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ с $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. Кроме того, пусть пока $\sigma > -\sqrt{\pi/T}$. Это ограничение подсказывается уже леммой 2. Там утверждается, что функция $g_T(x)$ стремится к нулю "не слишком быстро". Поэтому при свертке $g_T(x)$ по формуле (11) с функцией $\varphi(x)$, стремящейся к нулю быстрее, чем $g_T(x)$, трудно гарантировать, что полученное начальное состояние $u_0(x)$ будет так же быстро (как $\varphi(x)$) стремиться к нулю. Короче говоря, классы экспоненциально убывающих функций с $\sigma \leqslant -\sqrt{\pi/T}$ имеют свою специфику (подробности см. в теореме 3 и в § 9).

Случай $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$ является "регулярным". Удобная и простая форма теоремы о разрешимости выглядит так.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *и* $\Delta\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *при некотором фиксированном* σ, $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n\times[0,T])$. *Это решение выражается по формулам* (4), (11), *причем функция* $g_T(x)$ *в формуле* (11) *определяется формулой* (10). *Других решений у задачи* (1), (2) *в указанном классе* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *нет.*

Теорема 1 непосредственно следует из более общих теорем 2, 3 (см. § 6). Необходимость в обобщении объясняется тем, что даже в простом классе $\mathscr{E}_0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ теорема 1 не охватывает все возможные ситуации. При $n \geqslant 2$ для произвольного ограниченного решения $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ уравнения теплопроводности (1) интеграл в условии (2) может не принадлежать $C^2(\mathbb{R}^n)$ и оператор Лапласа от функции $\varphi(x)$ будет не определен. Такие решения нельзя восстановить при помощи теоремы 1. Указанный момент важен для дальнейшего, поэтому поясним его подробнее.

Лемма 3. *При любом* $n \geqslant 2$ *существует функция* $u(x,t)$, *определенная на* $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ *по формуле Пуассона* (4) *с непрерывной ограниченной функцией* $u_0(x)$, *такая, что интеграл* $\psi(x)$ *из формулы* (3) *не принадлежит* $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Напомним, что оператор Δ является замыкаемым (но не замкнутым!) в $C(\mathbb{R}^n)$. Это свойство (замыкаемость) можно выразить так. Пусть $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $w_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta w_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ в $\mathbb{R}^n$. Если $w_\varepsilon(x) \to 0$ и $f_\varepsilon(x) \to f_0(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$, то $f_0(x) \equiv 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [7; лемма 1]; отметим, что замыкание для Δ – расширенный оператор Лапласа Δ^* – рассматривается в следующем § 5 настоящей статьи).

Выберем теперь функцию $u_0(x)$, непрерывную и ограниченную в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, так, чтобы уравнение $\Delta v(x) = u_0(x)$ не имело решений $v(x)$ класса C^2 в шаре $|x| < r$ с некоторым $r > 0$ (см. [9; гл. IV, § 3, пример с задачей (20), (22)]). Рассмотрим решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности (1), полученное для $u_0(x)$ по формуле Пуассона (4), и обозначим как $\psi(x)$ интеграл (3) от $u(x,t)$. Покажем, что $\psi(x)$ не может принадлежать $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Допустим, что это не так и $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Из формулы Пуассона следует, что $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T])$. Поэтому на любом отрезке $[\varepsilon,\tau] \subset (0,T]$ (в том числе на $[\varepsilon,T]$) интеграл по t от $u(x,t)$ принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\Delta \int_\varepsilon^\tau u(x,t)\,dt = \int_\varepsilon^\tau \Delta u(x,t)\,dt = \int_\varepsilon^\tau \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dt = u(x,\tau) - u(x,\varepsilon). \tag{15}$$

Но тогда интеграл

$$\int_0^\varepsilon u(x,t)\,dt = \int_0^T u(x,t)\,dt - \int_\varepsilon^T u(x,t)\,dt = \psi(x) - \int_\varepsilon^T u(x,t)\,dt$$

также принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\Delta \int_0^\varepsilon u(x,t)\,dt = \Delta\psi(x) - u(x,T) + u(x,\varepsilon). \tag{16}$$

Ясно, что

$$\int_0^\varepsilon u(x,t)\,dt \to 0, \qquad \Delta\psi(x) - u(x,T) + u(x,\varepsilon) \to \Delta\psi(x) - u(x,T) + u_0(x)$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$. Используя в (16) замыкаемость Δ, получаем, что $\Delta\psi(x) - u(x,T) + u_0(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, уравнение $\Delta v(x) = u(x,T) - u_0(x)$ имеет классическое решение $v = \psi(x)$, определенное всюду в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, в шаре $|x| < r$. Так как $u(x,T)$ – гладкая функция от $x \in \mathbb{R}^n$, то уравнение $\Delta v(x) = u_0(x)$ тоже должно иметь классические решения в шаре $|x| < r$. Но это противоречит выбору $u_0(x)$. Условие $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ не может выполняться. Лемма доказана.

Для $u(x,t)$ из леммы 3 функция $\varphi(x) = T^{-1}\psi(x)$, вычисленная по формуле (2), также не принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$. Теорема 1 оказывается неприменимой. Из предыдущих рассуждений ясно, что: 1) поведение $u(x,t)$ на бесконечности не играет никакой роли; 2) возникший эффект связан исключительно с "несовершенством" оператора Лапласа Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ – у уравнения Пуассона $\Delta v(x) = f(x)$ при специальном выборе непрерывной правой части $f(x)$ отсутствуют классические решения [9; гл. IV, § 3]. Фактически, это проявление незамкнутости Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ на области определения $C^2(\mathbb{R}^n)$. Следующий параграф точнее разъяснит ситуацию.

§ 5. Расширенный оператор Лапласа

Построим замкнутое расширение оператора Лапласа Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$. Воспользуемся конструкцией И.И. Привалова [10] и введем *расширенный оператор Лапласа* Δ^* (обобщенный лапласиан, оператор Лапласа–Привалова) следующим образом.

При $n = 1$ в $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ положим $\Delta^* \equiv \Delta = d^2/dx^2$, понимая производную в классическом смысле. (Здесь достаточно стандартного определения.)

Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим функцию $w \in C(\mathbb{R}^n)$. Для $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta_r w(x) = \frac{1}{b_n r^n} \int_{|y-x|\leqslant r} w(y)\,dy - w(x) = \frac{1}{b_n r^n} \int_{|y-x|\leqslant r} (w(y) - w(x))\,dy,$$

где $b_n = 2\pi^{n/2}[n\Gamma(n/2)]^{-1}$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\Delta^* w(x) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{2(n+2)}{r^2}\Delta_r w(x)\right) = \lim_{r\to 0} \frac{2(n+2)}{b_n r^{n+2}} \int_{|y-x|\leqslant r} (w(y) - w(x))\,dy, \tag{17}$$

если этот предел существует. Вид предела (17) объясняется некоторыми простыми подсчетами, связанными с формулой Тейлора [10; ч. I, гл. I, § 1]. Перечислим основные свойства оператора Δ^*.

1. Если $w \in C^2(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\Delta^* w(x) = \Delta w(x)$ всюду в Ω. Таким образом, оператор Δ^* на функциях класса C^2 определен и совпадает с обычным оператором Лапласа [10; ч. I, гл. I, § 1].

2. Если $\Delta^* w(x) = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $w \in C^2(\Omega)$ и $\Delta w(x) = 0$ всюду в Ω. То есть непрерывное решение уравнения $\Delta^* w = 0$ является обычной гармонической функцией [10; ч. I, гл. I, § 2].

3. Пусть $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$E(x) = (2\pi)^{-1} \ln |x|, \quad n = 2; \qquad E(x) = -((n-2)\omega_{n-1})^{-1} |x|^{-(n-2)}, \quad n \geqslant 3;$$

$\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}[\Gamma(n/2)]^{-1}$ – площадь поверхности единичной $(n-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^n$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функции $f \in C(\overline{\Omega})$ рассмотрим объемный потенциал

$$v(x) = \int_\Omega E(x-y) f(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

Тогда $\Delta^* v(x) = f(x)$ всюду в Ω [10; ч. II, гл. I, § 1].

Данное свойство отличает оператор Δ^* от обычного оператора Лапласа. Хорошо известно, что потенциал (18) с произвольной непрерывной плотностью f может не удовлетворять (в классическом смысле) уравнению Пуассона $\Delta v(x) = f(x)$ во внутренних точках области Ω [11; гл. II, § 14].

Свойство 3 позволяет доказать следующие свойства 4, 5.

4. Пусть $\Delta^* w(x) = f(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^k(\Omega)$ с некоторым $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда $w \in C^{k+1}(\Omega)$. Например, если $f \in C(\Omega)$, то $w \in C^1(\Omega)$; если $f \in C^1(\Omega)$, то $w \in C^2(\Omega)$ и $\Delta^* w(x) = \Delta w(x)$ в Ω, и т.д.

Докажем свойство 4. Достаточно установить принадлежность $w \in C^{k+1}$ в произвольной гладкой ограниченной области, компактно вложенной в Ω. Рассмотрим такую область и снова обозначим ее Ω. Но теперь можно считать, что $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Определим объемный потенциал $v(x)$ формулой (18). По свойству 3 получаем, что $\Delta^*(w(x) - v(x)) = f(x) - f(x) = 0$ в Ω. Следовательно, $(w(x) - v(x))$ является гармонической функцией в Ω и гладкость $w(x)$ совпадает с гладкостью $v(x)$. Но гладкость потенциала $v(x)$ внутри Ω всегда хоть на единицу выше, чем гладкость плотности $f(x)$ (для $f \in C(\overline{\Omega})$ или $f \in C^1(\overline{\Omega})$ это классический факт; дальнейший переход легко осуществить по индукции при помощи формулы дифференцирования объемного потенциала, см. [9; гл. IV, § 3, доказательство леммы 2]). Таким образом, $w \in C^{k+1}(\Omega)$. Свойство 4 доказано.

Как обычно, в гёльдеровых классах происходит повышение гладкости сразу на две единицы: если $f \in C^{k+\alpha}(\Omega)$ для некоторых $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\alpha \in (0, 1)$, то $w \in C^{k+2+\alpha}(\Omega)$. Но такое уточнение нам не понадобится.

В качестве прямого следствия свойства 4 отметим, что всякая непрерывная собственная функция оператора Δ^* является обычной собственной функцией оператора Лапласа. Действительно, пусть $\Delta^* w(x) = \lambda w(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ с непрерывной функцией $w(x)$. Последовательно применяя свойство 4, получаем, что $w \in C^1(\Omega)$, затем, что $w \in C^2(\Omega)$, и тогда по свойству 1 $\Delta w(x) = \Delta^* w(x) = \lambda w(x)$, что и утверждалось.

Заключительное свойство 5 играет для нас ключевую роль. Оно и означает замкнутость оператора Δ^*.

5. Пусть $\Delta^* w_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ в $\mathbb{R}^n$ для функций $w_\varepsilon, f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, отвечающих малому параметру $\varepsilon > 0$. Если $w_\varepsilon(x) \to w_0(x)$ и $f_\varepsilon(x) \to f_0(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$, то $\Delta^* w_0(x)$ существует всюду в $\mathbb{R}^n$ и $\Delta^* w_0(x) = f_0(x)$.

Докажем свойство 5. Пусть B – произвольный открытый шар в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$v_\varepsilon(x) = \int_B E(x-y) f_\varepsilon(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \geqslant 0 \quad (\text{включая} \quad \varepsilon = 0).$$

В силу свойства 3 для $\varepsilon > 0$ все функции $w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)$ удовлетворяют в шаре B уравнению $\Delta^*(w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)) = 0$ и, значит, по свойству 2 являются гармоническими в B. При $\varepsilon \to 0$ имеем $(w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)) \to (w_0(x) - v_0(x))$ равномерно в $\overline{B}$. Поэтому функция $w_0(x) - v_0(x)$ также является гармонической в B. Тем самым, $\Delta^*(w_0(x) - v_0(x)) = \Delta(w_0(x) - v_0(x)) = 0$ всюду в B. Так как $v_0(x)$ есть объемный потенциал с непрерывной плотностью $f_0(x)$, то $\Delta^* v_0(x) = f_0(x)$ в шаре B. Но тогда существует $\Delta^* w_0(x) = \Delta^* v_0(x) = f_0(x)$ в шаре B. Выбор B был произвольным. Свойство 5 доказано.

При $n = 1$ в силу нашего определения $\Delta^* = \Delta = d^2/dx^2$ свойства 1, 2 очевидны. Свойство 3 с фундаментальным решением $E(x) = |x|/2$ проверяется непосредственно. Свойство 4 даже усиливается, а свойство 5 выводится из 3 так же, как при $n \geqslant 2$. Итак, свойства 1–5 присущи оператору Δ^* при любом $n \geqslant 1$. Именно на эти свойства и только на них опираются все последующие рассуждения, связанные с Δ^*.

Областью определения оператора Δ^* в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ считаем множество

$$\mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \equiv \{w \in C(\mathbb{R}^n) : \Delta^* w(x) \text{ существует всюду в } \mathbb{R}^n \text{ и } \Delta^* w \in C(\mathbb{R}^n)\}. \tag{19}$$

Из свойства 5 ясно, что Δ^* с указанной областью определения является замкнутым оператором в $C(\mathbb{R}^n)$. С учетом свойства 1 можно утверждать, что Δ^* есть замкнутое расширение для Δ. Отметим включения $C^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \subset C^1(\mathbb{R}^n)$, следующие из свойств 1, 4. При $n = 1$ справедливо равенство $\mathscr{O}(\mathbb{R}^1) = C^2(\mathbb{R}^1)$.

Дадим еще одно альтернативное описание для $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, имеющее “локальный” характер. Функция $w(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n$, принадлежит $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ данная функция разлагается в сумму гармонической функции и некоторого объемного потенциала вида (18) с плотностью $f \in C(\overline{\Omega})$. При этом $f(x) = \Delta^* w(x)$ в Ω.

Ввиду определения (19) и свойств Δ^* такая характеристика $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ очевидна.

§ 6. Формулировка основного результата

Введенное в (19) пространство $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ позволяет получить точное описание возможных правых частей $\varphi(x)$ в условии (2). Начнем со следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть $u(x,t)$ – любое решение уравнения теплопроводности* (1) *из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. При фиксированном $\tau \in (0,T]$ рассмотрим функцию*

$$\psi_\tau(x) \equiv \int_0^\tau u(x,t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Тогда $\psi_\tau \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \psi_\tau(x) = u(x,\tau) - u(x,0)$ в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для $\varepsilon \in (0,\tau)$ запишем равенства (15), заменив в крайней левой части Δ на Δ^* по свойству 1 оператора Δ^*. Получим

$$\Delta^* \int_\varepsilon^\tau u(x,t)\,dt = u(x,\tau) - u(x,\varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Устремим ε к нулю, учитывая, что

$$\int_\varepsilon^\tau u(x,t)\,dt \to \psi_\tau(x), \qquad u(x,\tau) - u(x,\varepsilon) \to u(x,\tau) - u(x,0)$$

равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$. На основании свойства 5 оператора Δ^* заключаем, что $\psi_\tau \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\psi_\tau(x) = u(x,\tau) - u(x,0)$ в $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1), (2). Если $u(x,t)$ – ее решение, то функция $\varphi(x)$ в условии (2) совпадает с $T^{-1}\psi_T(x)$, где функция $\psi_T(x) \equiv \psi(x)$ построена при $\tau = T$ по формуле (20) (или просто по формуле (3)). Из леммы 4 следует, что $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi(x) = T^{-1}(u(x,T) - u(x,0))$ в $\mathbb{R}^n$.

Итак, для получения разрешимой задачи (1), (2) функцию $\varphi(x)$ в условии (2) необходимо выбирать в $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, т.е. для нее должен быть корректно определен расширенный оператор Лапласа $\Delta^*\varphi(x)$ такой, что $\Delta^*\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Как известно из леммы 3, обычный оператор Δ для $\varphi(x) = T^{-1}\psi(x)$ может быть не определен.

Формула (11) для начального состояния $u_0(x)$ приобретает вид

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\varphi(y)\,dy - T\Delta^*\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Сформулируем уточненный результат о разрешимости задачи (1), (2). Он включает в себя предыдущую теорему 1.

Теорема 2. *Для того чтобы задача* (1), (2) *с функцией* $\varphi(x)$ *была разрешимой в классе* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *при некотором фиксированном* σ, $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *и* $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. *Для любой такой* $\varphi(x)$ *решение* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2), *принадлежащее* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, *будет единственным. Оно находится по формулам* (4), (21), *причем функция* $g_T(x)$ *в* (21) *определяется формулой* (10).

Теоремы 1, 2 легко обозримы и потому удобны для приложений. Мы получим их как следствия более полного основного утверждения, учитывающего практически все возможности. Для краткости используем обозначение $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$.

Теорема 3. *Пусть* σ *– фиксированное число,* $-\infty < \sigma < \sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *при любой функции* $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *задача* (1), (2) *в классе* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *может иметь не более одного решения*;
2) *для того чтобы задача* (1), (2) *была разрешимой в* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, *необходимо, чтобы* $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *и* $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$;

3) *обратно, пусть* $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *и* $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, *т.е.*

$$|\varphi(x)| \leqslant M\exp(\sigma|x|), \quad |\Delta^*\varphi(x)| \leqslant M\exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

с некоторой константой $M > 0$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет решение* $u(x,t)$, *которое находится по формулам* (4), (21), *причем функция* $g_T(x)$ *в* (21) *определяется формулой* (10). *Дальнейшее описание данного решения* $u(x,t)$ *зависит от того, в какой промежуток попадает исходное значение* σ;

4) *при* $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$ *решение* $u(x,t)$ *принадлежит* $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *и удовлетворяет оценке устойчивости*

$$|u(x,t)| \leqslant MN\exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{23}$$

где M *такая же, как в* (22), *а константа* $N > 0$ *зависит только от* n, T, σ, *но не зависит от* M *и* $\varphi(x)$;

5) *при* $\sigma < -\sigma_0$ *решение* $u(x,t)$ *принадлежит* $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *и удовлетворяет оценке устойчивости*

$$|u(x,t)| \leqslant MN\exp(-\sigma_0|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{24}$$

где M *такая же, как в* (22), *а константа* $N > 0$ *зависит только от* n, T, σ;

6) *наконец, при* $\sigma = -\sigma_0$ *можно утверждать, что*

$$u \in \bigcap_{\sigma_1 > -\sigma_0} \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0,T]), \tag{25}$$

причем для любого $\sigma_1 > -\sigma_0$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \leqslant MN\exp(\sigma_1|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{26}$$

где M *такая же, как в* (22), *а константа* $N > 0$ *зависит только от* n, T, σ_1.

Теоремы 1, 2 непосредственно следуют из общей теоремы 3, поэтому будем доказывать только ее. Прежде чем приступить к доказательству[3], изучим асимптотическое поведение функции $g_T(x)$, входящей в (21).

§ 7. Исследование $g_T(x)$

Получим вначале разложение $g_T(x)$ в сходящийся ряд по функциям Ханкеля, а затем выведем нужные оценки на бесконечности. Напомним, что всюду в статье символ n означает размерность основного пространства $\mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, в данном параграфе используется обозначение $\nu \equiv (n-2)/2$. Сведения по специальным функциям, приводимые без ссылок, см. в [12], [13].

[3] Доказательство основной теоремы 3 см. в § 8; дополнительный комментарий к пп. 4)–6) дан в § 9; некоторые специальные уточнения сделаны в § 10.

Теорема 4. *Для функции $g_T(x)$, определенной на $\mathbb{R}^n$ формулой* (10), *справедливо разложение в ряд*

$$g_T(x) = -2(\pi|x|)^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\biggl(\Bigl(\frac{z_k}{2}\Bigr)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\biggr), \tag{27}$$

сходящийся при $|x| \neq 0$. *Здесь* $\nu \equiv (n-2)/2$, $z_k \equiv (1+i)\sqrt{k\pi/T}$, $H_\nu^{(1)}$ – *первая функция Ханкеля индекса* ν.

Замечание 1. Прокомментируем формулу (27). Мы записали ее в виде, наиболее удобном для рассмотрений. Возможны "косметические" изменения, связанные с другими группировками сомножителей. В случае нечетного n, когда степень $\nu+2 = (n+2)/2$ является полуцелой, значение $(z_k/2)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)$ для комплексных $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T}$ вычисляется так. Учитывая, что индекс $\nu = (n-2)/2$ тоже полуцелый, выразим $H_\nu^{(1)}$ через функции Бесселя J_ν, $J_{-\nu}$ по формуле

$$H_\nu^{(1)}(z) \equiv (i\sin\nu\pi)^{-1}[J_{-\nu}(z) - \exp(-\nu\pi i)J_\nu(z)] = J_\nu(z) - i^{2\nu}J_{-\nu}(z).$$

Умножим на $(z/2)^{\nu+d}$ с натуральным d и перейдем к степенным рядам:

$$\Bigl(\frac{z}{2}\Bigr)^{\nu+d} H_\nu^{(1)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+2\nu+d}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} - i^{2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+d}}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}. \tag{28}$$

Здесь $2\nu = n-2$ – целое число, $2\nu + d = n + d - 2$ – неотрицательное целое число. Поэтому (28) определяет целую функцию $(z/2)^{\nu+d} H_\nu^{(1)}(z)$. Можно показать, что это элементарная функция, точнее, квазиполином вида $z^{d-1}p_\nu(z)\exp(iz)$, где полином $p_\nu(z)$ зависит только от ν (см. [12; формулы 7.11.(3) и 7.11.(17)]). В частности, при $d=2$ и $z = z_k|x|$ значение

$$\Bigl(\frac{z_k}{2}\Bigr)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|) = |x|^{-(\nu+2)} \Bigl(\frac{z_k|x|}{2}\Bigr)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)$$

однозначно вычисляется согласно (28). Вообще условимся, что потенциально многозначные функции типа z^α, $J_\alpha(z)$, $H_\alpha^{(1)}(z)$ и т.д. всегда рассматриваются только в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$ для главного значения аргумента z, $-\pi < \arg z < \pi$. Тогда эти функции определяются своими стандартными формулами однозначно.

Доказательство теоремы 4. В последующих выкладках используется функция

$$F_T(s) \equiv \frac{Ts^2}{\exp(Ts^2) - 1}$$

для вещественных или комплексных s. Заметим, что $G_T(\xi) = F_T(|\xi|)$ для функции $G_T(\xi)$ из формулы (9). Обозначим $|\xi| = r$ и преобразуем (10), интегрируя сначала по сферам радиуса r, а затем по $r \in (0, \infty)$. Получим

$$\begin{aligned} g_T(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty F_T(r)\,dr \int_{|\xi|=r} \exp(i\xi x)\,dS_\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty F_T(r) r^{n-1}\,dr \int_{|\xi|=1} \exp(ir\xi x)\,dS_\xi. \end{aligned}$$

Для точности формулировок считаем $|x| \neq 0$ (хотя многие последующие соотношения справедливы при $|x| = 0$ в "предельном" смысле). Согласно [14; п. 4.3.2.5] при интегрировании по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ имеет место формула

$$\int_{|\xi|=1} \exp(ir\xi x)\, dS_\xi = (2\pi)^{n/2}(r|x|)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r|x|).$$

Формула верна и при $n = 1$: надо понимать интеграл как $\exp(irx)+\exp(-irx)$ и заметить, что $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\cos z$. Таким образом, при любом n выполняется равенство

$$g_T(x) = (2\pi)^{-n/2}|x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty F_T(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|x|)\, dr. \tag{29}$$

Переменная интегрирования r утратила свой "физический" смысл, удобно обозначить ее через s. Полагая $\nu = (n-2)/2$ и учитывая, что $J_\nu(s|x|) = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(s|x|)$ при $s > 0$, перепишем (29) в виде

$$g_T(x) = \pi^{-(\nu+1)}|x|^{-\nu} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x|) F_T(s)\, ds. \tag{30}$$

(Как ясно из следующего абзаца, подынтегральное выражение в (30) не имеет особенности в нуле, интеграл сходится и потому знак Re можно вынести из-под интеграла[4].) Разложение (27) получим, интегрируя функцию $(s/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x|) F_T(s)$ не по лучу $[0,\infty)$, а по специальным контурам в комплексной плоскости.

Контуры принадлежат первому координатному углу

$$\mathbb{C}_{++} \equiv \{z : \operatorname{Re} z \geqslant 0,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Функция $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ голоморфна внутри $\mathbb{C}_{++}$ и непрерывна вплоть до границы. При полуцелом ν (когда n нечетно) это следует из представления (28), взятого с $d = 1$. Здесь функция $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ является целой. При целом ν (когда n четно) надо учесть, что функции Ханкеля голоморфны в $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$, причем при $z \to 0$ справедливы оценки $H_\nu^{(1)}(z) = O(|z|^{-\nu})$, $\nu \neq 0$, и $H_0^{(1)}(z) = O(\ln|z|)$, которые гарантируют непрерывность в нуле функции $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ (см. [13; формулы 9.1.8 и 9.1.9]). Аналогично, функция

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|) = |x|^{-(\nu+1)} \left(\frac{z|x|}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)$$

при фиксированном $|x| \neq 0$ голоморфна внутри $\mathbb{C}_{++}$ и непрерывна вплоть до границы.

[4] Сходимость интеграла "на бесконечности" очевидно следует из быстрого стремления к нулю функции $F_T(s)$ при $s \to +\infty$.

Функция $F_T(z) = Tz^2(\exp(Tz^2)-1)^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}$. В угол $\mathbb{C}_{++}$ попадают ее простые полюсы $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T}$, $k \in \mathbb{N}$.

Фиксируем числа $a_m \equiv \sqrt{(m+0.5)\pi/T}$, $m \in \mathbb{N}$, и для каждого m рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_m \equiv \{z : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2a_m,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant a_m\},$$

содержащий точки z_k с $k = 1, \dots, m$. По теореме о вычетах

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)F_T(z)\,dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{(z/2)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(z|x|)Tz^2}{\exp(Tz^2)-1} \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|). \qquad (31)\end{aligned}$$

Построим контур L_m, состоящий из трех отрезков $L_m^{(1)} = \{i\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant a_m\}$, $L_m^{(2)} = \{s + ia_m : 0 \leqslant s \leqslant 2a_m\}$, $L_m^{(3)} = \{2a_m + i\tau : a_m \geqslant \tau \geqslant 0\}$ и луча $L_m^{(4)} = [2a_m, \infty)$ положительной полуоси. Определим последовательность интегралов

$$\Upsilon_{T,m}(x) \equiv \int_{L_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)F_T(z)\,dz, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Так как $\partial\Pi_m$ является объединением отрезков $[0, 2a_m]$ и $L_m^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, то

$$\int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x|)F_T(s)\,ds = \Upsilon_{T,m}(x) + \int_{\partial\Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)F_T(z)\,dz.$$

Учитывая (30), а затем (31), приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\pi^{\nu+1}|x|^\nu g_T(x) &= \operatorname{Re}\Upsilon_{T,m}(x) + \operatorname{Re}\int_{\partial\Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)F_T(z)\,dz \\ &= \operatorname{Re}\Upsilon_{T,m}(x) - 2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m \left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|). \qquad (32)\end{aligned}$$

Теперь при фиксированном x, $|x| \neq 0$, перейдем к пределу в (32) по $m \to \infty$. Сами интегралы $\Upsilon_{T,m}(x)$ могут не стремиться к нулю, но мы докажем, что этим свойством обладают их действительные части.

Напомним (см. [15; столбец 870]), что функция $(z/2)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(z)$ принимает на верхней мнимой полуоси лишь вещественные значения[5]. Очевидно, что тем же

[5] Это следует, например, из формулы $(is/2)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(is) = 2\pi^{-1}(s/2)^{\nu+1}K_\nu(s)$, $s > 0$, связывающей функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}$ с функцией Макдональда K_ν. Как известно, при $s > 0$ значения $K_\nu(s)$ являются вещественными (см. [13; п. 9.6]).

свойством обладают функции $(z/2)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(z|x|)$ и $F_T(z)$. Поэтому интеграл, входящий в $\Upsilon_{T,m}(x)$, по отрезку $L_m^{(1)}$ мнимой оси – чисто мнимая величина. Но тогда $\operatorname{Re}\Upsilon_{T,m}(x)=\operatorname{Re}\sum_{j=2}^4\Upsilon_{T,m}^{(j)}(x)$, где

$$\Upsilon_{T,m}^{(j)}(x)\equiv\int_{L_m^{(j)}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(z|x|)F_T(z)\,dz.$$

Оценим сверху модуль каждого из интегралов $\Upsilon_{T,m}^{(j)}(x)$, $j=2,3,4$.

При $j=2$ имеем

$$\begin{aligned}|\Upsilon_{T,m}^{(2)}(x)|&\leqslant 2a_m\max_{z\in L_m^{(2)}}\left(\left|\frac{z}{2}\right|^{\nu+1}|H_\nu^{(1)}(z|x|)|\frac{T|z|^2}{|\exp(Tz^2)-1|}\right)\\&\leqslant 2^{-\nu}a_m\big(a_m\sqrt{5}\big)^{\nu+3}T\max_{0\leqslant s\leqslant 2a_m}|H_\nu^{(1)}((s+ia_m)|x|)|\cdot(C_m^{(2)})^{-1},\end{aligned}$$

где

$$C_m^{(2)}\equiv\min_{z\in L_m^{(2)}}|\exp(Tz^2)-1|\geqslant\frac{1}{2}\,,\qquad m\in\mathbb{N}. \tag{33}$$

Элементарные неравенства (33) докажем чуть позже, а пока отметим, что согласно оценкам Вебера [16; п. 7.33] для функции $H_\nu^{(1)}(z)$ выполняется соотношение

$$|H_\nu^{(1)}(z)|\leqslant\kappa_\nu|z|^{-1/2}\exp(-\operatorname{Im}z),\qquad z\in\mathbb{C}_{++},\quad |z|\geqslant 1, \tag{34}$$

с некоторой константой $\kappa_\nu>0$, зависящей только от ν. В частности,

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 2a_m}|H_\nu^{(1)}((s+ia_m)|x|)|\leqslant\kappa_\nu(a_m|x|)^{-1/2}\exp(-a_m|x|),\qquad a_m|x|\geqslant 1. \tag{35}$$

Воспользовавшись (33) и (35), получим

$$|\Upsilon_{T,m}^{(2)}(x)|\leqslant M_\nu^{(2)}T|x|^{-1/2}a_m^{\nu+3.5}\exp\left(-a_m|x|\right),\qquad a_m|x|\geqslant 1, \tag{36}$$

с константой $M_\nu^{(2)}>0$, зависящей только от ν.

Для окончательного обоснования (36) осталось доказать неравенства (33). Рассмотрим $z=s+ia_m$, $0\leqslant s\leqslant 2a_m$. Заметим, что

$$\exp(Tz^2)=\exp(T(s^2-a_m^2))(\cos(2Ta_ms)+i\sin(2Ta_ms)). \tag{37}$$

Здесь $a_m\equiv\sqrt{(m+0.5)\pi/T}$. Если $s\in(a_m-\pi/(4a_mT),a_m+\pi/(4a_mT))$, то $2Ta_ms\in(2m\pi+\pi/2,2m\pi+3\pi/2)$. При этих значениях s вещественная часть в (37) отрицательна и потому $|\exp(Tz^2)-1|>1$. Если же $|s-a_m|\geqslant\pi/(4a_mT)$, то

$$T|s^2-a_m^2|=T|s-a_m|\,|s+a_m|\geqslant T|s-a_m|a_m\geqslant\frac{\pi}{4}>\frac{3}{4}\,,$$

откуда $|\exp(Tz^2)| = \exp(T(s^2 - a_m^2)) \in (0, \exp(-3/4)) \cup (\exp(3/4), +\infty)$. Но тогда

$$|\exp(Tz^2) - 1| \geqslant \big||\exp(Tz^2)| - 1\big| \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{3}{4}\right) > \frac{1}{2}\,.$$

Итак, неравенства (33) выполнены, соотношение (36) обосновано. Из (36) следует, что $\Upsilon^{(2)}_{T,m}(x) \to 0$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного x, $|x| > 0$.

Перейдем к $\Upsilon^{(3)}_{T,m}(x)$. Здесь $L^{(3)}_m$ – вертикальный отрезок $[2a_m + ia_m, 2a_m]$. Его длина равна a_m. Функция $|z|$ принимает на $L^{(3)}_m$ максимальное значение $a_m\sqrt{5}$. Сравнивая с предыдущим, получаем

$$|\Upsilon^{(3)}_{T,m}(x)| \leqslant 2^{-(\nu+1)} a_m \big(a_m\sqrt{5}\,\big)^{\nu+3} T \max_{0\leqslant\tau\leqslant a_m} |H^{(1)}_\nu((2a_m + i\tau)|x|)| \cdot (C^{(3)}_m)^{-1},$$

где[6]

$$\begin{aligned} C^{(3)}_m &\equiv \min_{z\in L^{(3)}_m} |\exp(Tz^2) - 1| \geqslant \min_{0\leqslant\tau\leqslant a_m} |\exp(T(2a_m + i\tau)^2)| - 1 \\ &= \min_{0\leqslant\tau\leqslant a_m} \exp(T(4a_m^2 - \tau^2)) - 1 = \exp(3Ta_m^2) - 1. \end{aligned}$$

Поскольку $3Ta_m^2 = 3(m + 0.5)\pi \geqslant 9\pi/2 > 1 > \ln 2$ при $m \in \mathbb{N}$, то

$$(C^{(3)}_m)^{-1} \leqslant \frac{\exp(-3Ta_m^2)}{1 - \exp(-3Ta_m^2)} \leqslant \frac{\exp(-3Ta_m^2)}{1 - 2^{-1}} = 2\exp(-3Ta_m^2). \tag{38}$$

Согласно (34) справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant a_m} |H^{(1)}_\nu((2a_m + i\tau)|x|)| \leqslant \kappa_\nu (2a_m|x|)^{-1/2}, \qquad 2a_m|x| \geqslant 1. \tag{39}$$

Воспользовавшись (38) и (39), заключаем, что

$$|\Upsilon^{(3)}_{T,m}(x)| \leqslant M^{(3)}_\nu T|x|^{-1/2} a_m^{\nu+3.5} \exp\left(-3Ta_m^2\right), \qquad a_m|x| \geqslant \frac{1}{2}\,, \tag{40}$$

с константой $M^{(3)}_\nu > 0$, зависящей только от ν. Из (40) ясно, что $\Upsilon^{(3)}_{T,m}(x) \to 0$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного x, $|x| > 0$.

Рассмотрим, наконец, интеграл $\Upsilon^{(4)}_{T,m}(x)$ по лучу $L^{(4)}_m = [2a_m, \infty)$ вещественной оси. Вновь используя (34), получаем оценку

$$|\Upsilon^{(4)}_{T,m}(x)| \leqslant 2^{-(\nu+1)} \kappa_\nu |x|^{-1/2} T \int_{2a_m}^{\infty} \frac{s^{\nu+2.5}}{\exp(Ts^2) - 1}\, ds, \qquad 2a_m|x| \geqslant 1.$$

[6] В следующей выкладке (и только в ней) используется то, что в качестве Π_m удобно было взять прямоугольник со сторонами $2a_m \times a_m$, а не квадрат со сторонами $a_m \times a_m$.

Функция $s^{\nu+2.5}(\exp(Ts^2)-1)^{-1}$ суммируема на $[0,\infty)$. Последовательность интегралов по лучам $[2a_m,\infty)$ стремится к нулю при $m\to\infty$. Таким образом, $\Upsilon^{(4)}_{T,m}(x)\to 0$ при $m\to\infty$ для любого фиксированного x, $|x|>0$.

В итоге, $\operatorname{Re}\Upsilon_{T,m}(x)=\operatorname{Re}\sum_{j=2}^{4}\Upsilon^{(j)}_{T,m}(x)\to 0$ при $m\to\infty$ для любого фиксированного x, $|x|>0$. Переходя к пределу $m\to\infty$ в (32), получаем разложение (27). Сходимость ряда (27) к $g_T(x)$ при $|x|>0$ полностью обоснована. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 имеет, на наш взгляд, принципиальный характер. Используя разложение (27) и асимптотику функций Ханкеля в комплексной области, можно получать различные оценки для $g_T(x)$ при $|x|\to\infty$. Соответствующие результаты оформлены далее в виде лемм (см. леммы 6, 7 ниже). Предварительно удобно доказать элементарную лемму 5, связанную с одним асимптотическим разложением. Теория асимптотических разложений, как таковая, затрагивается здесь в минимальной степени; необходимые определения см. в [15; столбцы 337–338], [17; гл. I, §2].

Лемма 5. *Пусть $\beta\geqslant 0$ – фиксированное число. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr) \tag{41}$$

сходится при всех $\rho>0$ и при $\rho\to+\infty$ является асимптотическим разложением для своей суммы $S(\rho)$ по последовательности $\bigl\{\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr)\bigr\}_{k=1}^{\infty}$. Всякий остаток ряда оценивается через свое первое слагаемое по формуле

$$\sum_{k=m}^{\infty}k^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr)\leqslant 2m^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{m}\,\bigr),\qquad \rho\geqslant\rho_{\beta,m}, \tag{42}$$

с константой $\rho_{\beta,m}>0$, зависящей только от β и m. В частности, для суммы ряда $S(\rho)$ справедлива оценка

$$S(\rho)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}k^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr)\leqslant 2\exp(-\rho),\qquad \rho\geqslant\rho_{\beta}, \tag{43}$$

где $\rho_\beta>0$ зависит только от β.

Доказательство. Функция $h_\rho(s)\equiv s^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{s}\,\bigr)$ с параметром $\rho>0$ положительна при $s\geqslant 0$ и монотонно стремится к нулю при $s>(2\beta/\rho)^2$. Интеграл от $h_\rho(s)$ по промежутку $0\leqslant s<\infty$ конечен – он равен $2\rho^{-(2\beta+2)}\Gamma(2\beta+2)$. Применяя интегральный признак Коши, заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}h_\rho(k)$, т.е. ряд (41), сходится при любом $\rho>0$ к некоторой конечной сумме $S(\rho)$. Рассмотрим m-й остаток

$$R_m(\rho)\equiv S(\rho)-\sum_{k=1}^{m}k^{\beta}\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr)=\exp\bigl(-\rho\sqrt{m}\,\bigr)\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{\beta}\exp\bigl(-\rho\bigl(\sqrt{k}-\sqrt{m}\,\bigr)\bigr).$$

Пусть $\rho > 2\beta m^{-1/2}$. Тогда функция $s^\beta \exp\bigl(-\rho(\sqrt{s}-\sqrt{m}\,)\bigr) = \exp\bigl(\rho\sqrt{m}\,\bigr)h_\rho(s)$ переменной s заведомо убывает при $s \geqslant m$ и

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} k^\beta e^{-\rho(\sqrt{k}-\sqrt{m}\,)} \leqslant \int_m^\infty s^\beta e^{-\rho(\sqrt{s}-\sqrt{m}\,)}\,ds = 2\int_0^\infty \bigl(\tau+\sqrt{m}\,\bigr)^{2\beta+1} e^{-\rho\tau}\,d\tau.$$

Последний интеграл очевидно стремится к нулю при $\rho \to +\infty$. Тем самым,

$$R_m(\rho) = o\bigl(\exp\bigl(-\rho\sqrt{m}\,\bigr)\bigr), \qquad \rho \to +\infty.$$

По определению [17; гл. I, § 2] ряд (41) при $\rho \to +\infty$ является асимптотическим разложением для $S(\rho)$ (в смысле Пуанкаре) по асимптотической последовательности $\bigl\{\exp\bigl(-\rho\sqrt{k}\,\bigr)\bigr\}_{k=1}^{\infty}$. Для получения (42) достаточно заметить, что фигурирующий там остаток ряда имеет вид $m^\beta \exp\bigl(-\rho\sqrt{m}\,\bigr) + R_m(\rho)$, где $R_m(\rho) = o\bigl(\exp\bigl(-\rho\sqrt{m}\,\bigr)\bigr)$ при $\rho \to +\infty$. Отсюда (42) сразу и следует. Оценка (43) есть частный случай (42) при $m = 1$. Лемма доказана.

Итак, сумму $S(\rho)$ ряда (41) можно оценить при помощи первого слагаемого по формуле (43). Применим этот принцип к функции $g_T(x)$.

Лемма 6. *Для функции $g_T(x)$, определенной формулой* (10), *справедлива оценка*

$$|g_T(x)| \leqslant C_{T,n}|x|^{-(n-1)/2} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,|x|\biggr), \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{44}$$

с константой $C_{T,n} > 0$, зависящей лишь от T и размерности n пространства $\mathbb{R}^n$. В частности,

$$|g_T(x)| \leqslant D_{T,n} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,|x|\biggr), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{45}$$

с константой $D_{T,n} > 0$, зависящей лишь от T, n. При этом можно положить $C_{T,n} = T^{-(n+1)/4}C_{1,n}$ и $D_{T,n} = T^{-n/2}D_{1,n}$, где $C_{1,n}$ и $D_{1,n}$ – значения констант при $T = 1$, зависящие, тем самым, только от n.

Доказательство. Согласно (27) имеем

$$|g_T(x)| \leqslant 2(\pi|x|)^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \biggl|\frac{z_k}{2}\biggr|^{\nu+2} |H_\nu^{(1)}(z_k|x|)|, \qquad |x| > 0,$$

где $\nu = (n-2)/2$, $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T}$. Подставим численные значения z_k и воспользуемся оценкой Вебера (34). После элементарных подсчетов получим

$$|g_T(x)| \leqslant C_\nu T^{-(2\nu+3)/4}|x|^{-(\nu+0.5)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{(2\nu+3)/4} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,|x|\biggr) \tag{46}$$

при $|x| \geqslant \sqrt{T/(2\pi)}$ с константой $C_\nu > 0$, зависящей только от ν. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$, входящий в (46), есть ряд вида (41), где $\beta = (2\nu+3)/4 = (n+1)/4 > 0$ и $\rho = \sqrt{\pi/T}\,|x|$. Оценивая сумму ряда по принципу (43), заключаем, что

$$|g_T(x)| \leqslant C|x|^{-(\nu+0.5)} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,|x|\biggr), \qquad |x| \geqslant r, \tag{47}$$

с константами $C > 0$ и $r > 0$, зависящими только от ν и T. Функция $g_T(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Неравенство (47) можно распространить на все $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ при необходимом увеличении C. Так как $\nu + 0.5 = (n-1)/2$, получили оценку (44). Оценка (45) – очевидное следствие (44). Из определения (10) легко выводится, что $g_T(x) = T^{-n/2} g_1(T^{-1/2}x)$. Отсюда находятся значения $C_{T,n} = T^{-(n+1)/4} C_{1,n}$ и $D_{T,n} = T^{-n/2} D_{1,n}$. Лемма доказана.

В последующем доказательстве основной теоремы 3 используется именно лемма 6, точнее ее вариант с оценкой (45). Но в более специальных исследованиях может понадобиться дополнительная информация о поведении функции $g_T(x)$ на бесконечности. На этот случай отметим, что k-е слагаемое ряда (27) при $|x| \to \infty$ выражается приближенной формулой

$$\begin{aligned} &-2(\pi|x|)^{-\nu}\,\mathrm{Im}\biggl(\Bigl(\frac{z_k}{2}\Bigr)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\biggr) \\ &\quad = -(2\pi)^{-(n-3)/4}\Bigl(\frac{k}{T}\Bigr)^{(n+1)/4} |x|^{-(n-1)/2} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,|x|\biggr) \\ &\qquad \times \biggl[\sin\biggl(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,|x| - \frac{\pi}{8}(n-3)\biggr) + O(|x|^{-1})\biggr] \end{aligned} \tag{48}$$

с символом $O(|x|^{-1})$, равномерным по k. Формула (48) получается непосредственно при подстановке в левую часть $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T} = e^{\pi i/4}\sqrt{2k\pi/T}$, $\nu = (n-2)/2$ и использовании известной асимптотики функции Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\biggl(iz - \frac{\pi i}{4}(2\nu+1)\biggr)[1 + O(|z|^{-1})], \qquad |z| \to \infty, \tag{49}$$

на луче $\arg z = \pi/4$. Соответствующие вычисления элементарны, и мы их не приводим. При $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$ функции Ханкеля выглядят особенно просто – приближенная формула (49) заменяется точным равенством (без $O(|z|^{-1})$). Поэтому в формуле (48) при $n = 1$ и $n = 3$ символ $O(|x|^{-1})$ можно опустить[7].

При $|x| \to \infty$ все функции (48) являются осциллирующими с экспоненциально убывающими амплитудами. С помощью асимптотических разложений типа (41) можно показать, что при больших $|x|$ первое слагаемое ряда (27) является “доминирующим” по отношению к остатку. Точнее, при $|x| \to \infty$ ряд (27) дает асимптотическое разложение в смысле Эрдейи (но не Пуанкаре; см. [16; гл. I, § 2]) для $g_T(x)$ по асимптотической последовательности

$$\biggl\{|x|^{-(n-1)/2} \exp\biggl(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,|x|\biggr)\biggr\}_{k=1}^{\infty}.$$

[7] Случаи $n = 1$ и $n = 3$ наиболее интересны для приложений.

Отсюда, в частности, следует, что сама функция $g_T(x)$ осциллирует (меняет знак) при $|x| \to \infty$.

Действительно, в разложении (27) отбросим первое слагаемое (с $k = 1$) и оценим оставшееся так же, как в доказательстве леммы 6. Получим выражение типа (46), где $\sum$ начинается с $k = 2$. Рассмотрим эту сумму, как 1-й остаток ряда (41) с $\beta = (2\nu + 3)/4 = (n+1)/4 > 0$ и $\rho = \sqrt{\pi/T}\,|x|$. Воспользуемся оценкой (42) для $m = 2$. Аналогично (47) заключаем, что

$$\left|2(\pi|x|)^{-\nu}\sum_{k=2}^{\infty}\operatorname{Im}\biggl(\Bigl(\frac{z_k}{2}\Bigr)^{\nu+2}H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\biggr)\right| \leqslant C|x|^{-(\nu+0.5)}\exp\biggl(-\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\,|x|\biggr)$$

при достаточно больших $|x|$ с подходящей константой $C > 0$. После вынесения множителя $|x|^{-(\nu+0.5)} = |x|^{-(n-1)/2}$ имеем величину $O\bigl(\exp\bigl(-\sqrt{2\pi/T}\,|x|\bigr)\bigr)$ и, тем самым, $O\bigl(|x|^{-1}\exp\bigl(-\sqrt{\pi/T}\,|x|\bigr)\bigr)$. Совмещая это с приближенной формулой (48), взятой для первого слагаемого (с $k = 1$), получаем формулу для суммы:

$$\begin{aligned} g_T(x) = -(2\pi)^{-(n-3)/4}T^{-(n+1)/4}|x|^{-(n-1)/2}\exp\biggl(-\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,|x|\biggr)& \\ \times\left[\sin\biggl(\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,|x| - \frac{\pi}{8}(n-3)\biggr) + O(|x|^{-1})\right], \qquad |x| \to \infty. &\qquad (50)\end{aligned}$$

При $n = 1$ и $n = 3$ слагаемое $O(|x|^{-1})$ в (50) можно заменить на $O(\exp(-\gamma|x|))$ с $\gamma \equiv \bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\sqrt{\pi/T}$. Асимптотическая формула (50) и показывает, что функция $g_T(x)$ осциллирует при $|x| \to \infty$.

Кроме того, из (50) следует, что оценки сверху для $g_T(x)$, найденные в лемме 6, являются окончательными. Напомним, что уже согласно лемме 2 оценка (45) точна в экспоненциальных классах $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Теперь стало ясно, что "тонкая" оценка (44) будет "абсолютно неулучшаемой".

Лемма 7. *Функцию* $|x|^{-(n-1)/2}\exp\bigl(-\sqrt{\pi/T}\,|x|\bigr)$ *в оценке* (44) *нельзя заменить никакой функцией* $h(|x|)$ *вида* $o\bigl(|x|^{-(n-1)/2}\exp\bigl(-\sqrt{\pi/T}\,|x|\bigr)\bigr)$ *при* $|x| \to \infty$.

Доказательство. См. (50).

Функция $g_T(x)$ вообще весьма интересна. В ее исходном определении, в §2, использовалась функция $Q(s) \equiv s(\exp(s)-1)^{-1}$ – производящая функция чисел Бернулли. Поэтому в других представлениях для $g_T(x)$ появляются такие классические объекты анализа, как числа Бернулли, ζ-функция Римана и т.д. Например из (29) выводится разложение $g_T(x)$ в сходящийся степенной ряд:

$$g_T(x) = (4\pi T)^{-n/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Bigl(\frac{n}{2}+k\Bigr)\zeta\Bigl(\frac{n}{2}+k+1\Bigr)\Bigl(-\frac{|x|^2}{4T}\Bigr)^k, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (51)$$

напоминающий своими крайними частями фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Для получения (51) надо подставить в (29) стандартное разложение в степенной ряд для функции Бесселя $J_{(n-2)/2}(r|x|)$, провести элементарные преобразования интегралов (с заменой Tr^2 на s) и воспользоваться тождеством

$$\int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{e^s-1}\,ds = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha), \qquad \alpha > 1.$$

Несложные подсчеты дадут (51). Отсюда между прочим следует, что

$$g_T(0) = (4\pi T)^{-n/2}\frac{n}{2}\cdot\zeta\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Например при $n=2$ имеем $g_T(0) = (4\pi T)^{-1}(\pi^2/6) = \pi/(24T)$.

Формула (51) удобна для описания $g_T(x)$ вблизи нуля так же, как формула (50) – на бесконечности.

§ 8. Доказательство основной теоремы 3

Первое утверждение теоремы 3 о единственности решения задачи (1), (2) следует из результатов работы [7] (см. также [6]).

Второе утверждение о необходимости условий $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ фактически уже доказано. Действительно, пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1), (2), принадлежащее $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n\times[0,T])$. Согласно лемме 4 должно выполняться соотношение $\varphi\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, причем очевидно, что функции $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x) = T^{-1}(u(x,T)-u(x,0))$ принадлежат $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Докажем остальные утверждения теоремы. Зафиксируем число $\sigma < \sqrt{\pi/T}$ и функцию $\varphi\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\Delta^*\varphi\in\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам (22) с константой $M>0$. Покажем, что формулы (4), (21) действительно определяют решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), подпадающее под описание из пп. 4)–6) теоремы 3 в зависимости от значения σ. Поскольку размерность n, число $T>0$ и показатель σ считаются заданными, мы не будем указывать на зависимость от n, T, σ различных констант, возникающих в оценках. Однако будем следить за константой M, чтобы получить нужные оценки устойчивости.

Всюду в параграфе для краткости полагаем $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. Таким образом, $\sigma<\sigma_0$. Согласно лемме 6 для функции $g_T(x)$ можно указать число $D_0>0$ ($D_0\equiv D_{T,n}$ в лемме 6) такое, что $|g_T(x)|\leqslant D_0\exp(-\sigma_0|x|)$ для $x\in\mathbb{R}^n$. Другими словами, функция $g_T(x)$ принадлежит классу $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$.

Обратимся к формуле (21) для начального состояния $u_0(x)$. По условию второе слагаемое $T\Delta^*\varphi(x)$ непрерывно в $\mathbb{R}^n$ и принадлежит классу $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим первое слагаемое, т.е. интеграл

$$\chi(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\varphi(y)\,dy. \tag{52}$$

Для подынтегральной функции справедлива оценка

$$|g_T(x-y)\varphi(y)| \leqslant D_0\exp(-\sigma_0|x-y|)M\exp(\sigma|y|).$$

Если $|x|\leqslant r$, то $|g_T(x-y)\varphi(y)|\leqslant MD_0\exp(\sigma_0 r)\exp(-(\sigma_0-\sigma)|y|)$ при $y\in\mathbb{R}^n$. Поэтому интеграл (52) сходится при всех $x\in\mathbb{R}^n$ равномерно в любом шаре $|x|\leqslant r$ и представляет собой непрерывную функцию переменной $x\in\mathbb{R}^n$. Поведение интеграла при $|x|\to\infty$ зависит от того, в какой промежуток попадает исходное значение σ.

Пусть $|\sigma| < \sigma_0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leqslant MD_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sigma_0|x-y|} e^{\sigma|y|}\, dy \\ &\leqslant MD_0 e^{\sigma|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sigma_0-|\sigma|)|y-x|}\, dy = MD_1 e^{\sigma|x|}, \\ &x \in \mathbb{R}^n, \qquad D_1 \equiv D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sigma_0-|\sigma|)|y|}\, dy < \infty, \end{aligned}$$

т.е. интеграл (52) принадлежит классу $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функция $u_0(x)$, заданная формулой (21), непрерывна в $\mathbb{R}^n$, принадлежит классу $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет оценке $|u_0(x)| \leqslant M(D_1+T)\exp(\sigma|x|)$ всюду в $\mathbb{R}^n$.

Определим для данного начального состояния $u_0(x)$ функцию $u(x,t)$ по формуле Пуассона (4). Тогда $u(x,t)$ служит решением уравнения теплопроводности (1) и по лемме 1 принадлежит $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant M(D_1+T)M^* \exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma^2 T)$ как в доказательстве[8] леммы 1. Число $N \equiv (D_1+T)M^*$ зависит лишь от n, T и σ. Получили оценку устойчивости (23).

Пусть теперь $\sigma < -\sigma_0$. Тогда $\sigma + \sigma_0 < 0$ и

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leqslant MD_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sigma_0|x-y|} e^{\sigma|y|}\, dy \leqslant MD_0 e^{-\sigma_0|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma_0+\sigma)|y|}\, dy \\ &= MD_2 e^{-\sigma_0|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad D_2 \equiv D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma_0+\sigma)|y|}\, dy < \infty, \end{aligned}$$

т.е. интеграл (52) принадлежит классу $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функция $u_0(x)$, заданная формулой (21), непрерывна в $\mathbb{R}^n$, принадлежит $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет оценке $|u_0(x)| \leqslant M(D_2+T)\exp(-\sigma_0|x|)$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Снова определим функцию $u(x,t)$ по формуле Пуассона (4). Тогда $u(x,t)$ служит решением уравнения теплопроводности (1), принадлежит $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ и

$$|u(x,t)| \leqslant M(D_2+T)M^* \exp(-\sigma_0|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma_0^2 T) = 2^n \exp(n\pi)$. Получили оценку устойчивости (24) с константой $N \equiv (D_2+T)M^*$, зависящей лишь от n, T и σ.

Пусть, наконец, $\sigma = -\sigma_0$. Перейдем к чуть большему числу σ_1, считая, конечно, что $|\sigma_1| < \sigma_0$. Ясно, что $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$, причем $|\varphi(x)| \leqslant M\exp(\sigma_1|x|)$ и $|\Delta^*\varphi(x)| \leqslant M\exp(\sigma_1|x|)$ с той же константой $M > 0$, что и в (22). На основании доказанного выше, функция $u(x,t)$, определенная формулами (4), (21), служит решением уравнения теплопроводности (1), принадлежит

[8] Указанное там значение M^* несколько завышено. Более точное выражение получается через интеграл ошибок: $M^* = \big(1+\operatorname{erf}\big(|\sigma|\sqrt{T}\,\big)\big)^n \exp(n\sigma^2 T)$. В частности, при $\sigma = 0$ можно считать $M^* = 1$, а не $M^* = 2^n$.

классу $\mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости (26) с константой $N > 0$, зависящей от n, T, σ_1. Ввиду произвольности выбранного σ_1 получаем включение (25).

Итак, во всех трех случаях формулы (4), (21) корректно определяют решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности (1), подпадающее под описание из пп. 4)–6) теоремы 3 в зависимости от значения σ. Осталось показать, что при подстановке $u(x,t)$ в условие (2) получается исходная функция $\varphi(x)$. Собственно в этом и состоит основная часть доказательства.

Для сокращения записи обозначим через

$$\mu_t(x) \equiv (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{53}$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности. По формуле (4) функция $u(x,t)$ при $t > 0$ есть свертка $\mu_t(x)$ с начальным состоянием $u_0(x)$. Используя (21), разобьем $u(x,t)$ на два слагаемых:

$$u(x,t) = u_1(x,t) - Tu_2(x,t). \tag{54}$$

Здесь $u_1(x,t)$ – решение уравнения теплопроводности, полученное по формуле Пуассона для начального состояния $\chi(x)$ из (52), т.е.

$$u_1(x,t)\big|_{0<t\leqslant T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x-\xi)\,d\xi \int_{\mathbb{R}^n} g_T(\xi-y)\varphi(y)\,dy, \tag{55}$$

$$u_1(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\varphi(y)\,dy. \tag{56}$$

Второе решение $u_2(x,t)$ отвечает начальному условию $\Delta^*\varphi(x)$, т.е.

$$u_2(x,t)\big|_{0<t\leqslant T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x-y)\Delta^*\varphi(y)\,dy, \qquad u_2(x,0) = \Delta^*\varphi(x). \tag{57}$$

Рассмотрим эти решения отдельно.

Начнем с $u_1(x,t)$. Для функции $\mu_t(x-\xi)g_T(\xi-y)\varphi(y)$ при фиксированном $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}|\mu_t(x-\xi)g_T(\xi-y)\varphi(y)| &\leqslant (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-\xi|^2/(4t)} D_0 e^{-\sigma_0|\xi-y|} M e^{\sigma|y|} \\ &\leqslant C e^{-\alpha|\xi|^2+\beta|\xi|} e^{-(\sigma_0-\sigma)|y|}, \qquad (\xi,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

где положительные константы C, α, β зависят, вообще говоря, от (x,t). Подынтегральная функция в повторном интеграле (55) оказывается суммируемой на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ по мере $d\xi\,dy$, и, значит, в этом интеграле можно переменить порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned}u_1(x,t)\big|_{0<t\leqslant T} &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x-\xi)g_T(\xi-y)\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x-y-\xi)g_T(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{58}$$

Определим новую функцию:

$$v(x,t)\big|_{0<t\leqslant T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x-\xi) g_T(\xi)\, d\xi, \qquad v(x,0) = g_T(x), \tag{59}$$

т.е. решение уравнения теплопроводности с начальным состоянием $g_T(x)$. Учитывая (56) и (58), запишем функцию $u_1(x,t)$ в виде

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y,t)\varphi(y)\, dy, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{60}$$

Особая роль специального решения (59) ясна из следующей леммы.

Лемма 8. *Функция* $v(x,t)$, *определенная формулой* (59), *есть решение уравнения теплопроводности* (1) *из класса* $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, *удовлетворяющее оценке*

$$|v(x,t)| \leqslant C_0 \exp(-\sigma_0 |x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad \sigma_0 \equiv \sqrt{\frac{\pi}{T}}\,, \tag{61}$$

с некоторой константой $C_0 > 0$. *Кроме того*,

$$\frac{1}{T}\int_0^T v(x,t)\, dt = \mu_T(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{62}$$

Замечание 2. Равенство (62) окончательно раскрывает связь функции $g_T(x)$ с нелокальной задачей (1), (2). Оказывается, решение уравнения теплопроводности (1), отвечающее начальному состоянию $g_T(x)$, при подстановке в (2) дает фундаментальное решение $\mu_T(x)$ в момент времени $t = T$. Используя стандартное обозначение для свертки по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, равенство (62) можно записать в следующем наглядном виде:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mu_t * g_T\, dt = \mu_T. \tag{63}$$

Отметим соотношение $\mu_T * g_T = g_T + T\Delta\mu_T$, которое получается из (63) применением леммы 4 (или легко может быть проверено с помощью преобразования Фурье).

Доказательство леммы 8. Поскольку $|g_T(x)| \leqslant D_0 \exp(-\sigma_0|x|)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, то первая часть леммы, включая оценку (61), немедленно следует из формулы Пуассона (59) и леммы 1. Докажем равенство (62). Рассмотрим преобразование Фурье

$$V(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x,t) \exp(-i\xi x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{64}$$

Напомним, что все функции, входящие в (59), принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ (см. § 2) и, значит, манипуляции с преобразованием Фурье законны. Учитывая, что преобразование от $\mu_t(x)$ есть $\exp(-|\xi|^2 t)$, а преобразование от $g_T(x)$ есть функция $G_T(\xi)$ из (9), получаем по теореме о свертке:

$$V(\xi,t) = \exp(-|\xi|^2 t) G_T(\xi) = \exp(-|\xi|^2 t)\, \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1}\,,$$

причем это равенство справедливо также при $t = 0$ (см. (59)). Но тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(\xi,t)\,dt = \frac{|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1}\int_0^T \exp(-|\xi|^2 t)\,dt = \exp(-T|\xi|^2).$$

С помощью оценки (61) легко обосновать законность внесения интеграла по $t \in [0,T]$ под знак интеграла (64). Таким образом, преобразование Фурье от непрерывной, экспоненциально убывающей функции

$$\frac{1}{T}\int_0^T v(x,t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

совпадает с $\exp(-T|\xi|^2)$, т.е. с преобразованием от $\mu_T(x)$. Отсюда следует равенство (62). Лемма доказана.

Вернемся к представлению (60). Из той же оценки (61) вытекает, что

$$|v(x-y,t)\varphi(y)| \leqslant C_0 \exp(-\sigma_0|x-y|) M \exp(\sigma|y|) \leqslant C_0 M e^{\sigma_0|x|} \exp(-(\sigma_0 - \sigma)|y|),$$

т.е. при фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ функция $v(x-y,t)\varphi(y)$ является суммируемой на $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ по $dy\,dt$. Поэтому

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_1(x,t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{T}\int_0^T v(x-y,t)\,dt\right)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x-y)\varphi(y)\,dy. \tag{65}$$

Интеграл вида (2) от первого слагаемого в (54) вычислен.

Перейдем к $u_2(x,t)$. По определению (57) функция $u_2(x,t)$ есть решение уравнения теплопроводности, отвечающее начальному состоянию $\Delta^*\varphi(x)$. В силу леммы 4 при любом $\tau > 0$ имеем

$$\Delta^*\left(\int_0^\tau u_2(x,t)\,dt\right) = u_2(x,\tau) - \Delta^*\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда

$$\Delta^*\left(\varphi(x) + \int_0^\tau u_2(x,t)\,dt\right) = u_2(x,\tau), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{66}$$

Определим функцию

$$w(x,\tau) = \varphi(x) + \int_0^\tau u_2(x,t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \tag{67}$$

Ясно, что функции $w(x,\tau)$ и $\partial w(x,\tau)/\partial\tau = u_2(x,\tau)$ непрерывны в $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. В силу (66) при фиксированном $\tau_0 \in (0,T]$ функция $\Delta^* w(x,\tau_0)$ равна $u_2(x,\tau_0)$ и, следовательно, принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ (и даже $C^\infty(\mathbb{R}^n)$). По свойствам 4 и 1 оператора Δ^* (см. §5) функция $w(x,\tau_0)$ принадлежит $C^3(\mathbb{R}^n)$ (точнее $C^\infty(\mathbb{R}^n)$) и $\Delta w(x,\tau_0) = \Delta^* w(x,\tau_0)$. В любом случае заведомо можно утверждать, что $w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ и

$$\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial\tau} = u_2(x,\tau) = \Delta^* w(x,\tau) = \Delta w(x,\tau), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \tau \leqslant T.$$

Таким образом, функция $w(x,\tau)$ есть классическое решение уравнения теплопроводности, причем $w(x,0) = \varphi(x)$ (см. (67)). По условию $\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. По лемме 1 $u_2 \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ как функция, заданная формулой Пуассона (57) с начальным состоянием $\Delta^*\varphi(x)$. Но тогда и $w \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ согласно определению (67). При заданном начальном состоянии решение уравнения теплопроводности в классе $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ единственно; оно вычисляется по формуле Пуассона:

$$w(x,\tau)\big|_{0<\tau\leqslant T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_\tau(x-y)\varphi(y)\,dy, \qquad w(x,0) = \varphi(x).$$

Подставив в (67) значение $\tau = T$, имеем

$$\int_0^T u_2(x,t)\,dt = w(x,T) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x-y)\varphi(y)\,dy - \varphi(x). \tag{68}$$

Интеграл от второго слагаемого в (54) вычислен.

Используя найденные выражения (65) и (68), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T u_1(x,t)\,dt - \int_0^T u_2(x,t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x-y)\varphi(y)\,dy - \biggl(\int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x-y)\varphi(y)\,dy - \varphi(x)\biggr) = \varphi(x),\end{aligned}$$

т.е. функция $u(x,t)$, определенная по формулам (4), (21), обращает соотношение (2) в верное тождество. Итак, $u(x,t)$ является требуемым решением задачи (1), (2). Это завершает доказательство утверждений 3)–6) теоремы 3. Теорема 3 полностью доказана.

Напомним, что частные теоремы 1, 2 немедленно следуют из теоремы 3 и потому не нуждаются в отдельных доказательствах.

§9. Комментарий к теореме 3

Снова обозначим $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. Полученные результаты указывают на наличие у задачи (1), (2) не только верхнего "критического" значения $\sigma = \sigma_0$, после которого теряется единственность, но и нижнего значения $\sigma = -\sigma_0$.

При $|\sigma| < \sigma_0$ картина получается стереотипной: если $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, то формулы (4), (21) определяют решение $u(x,t)$, принадлежащее $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Здесь показатель роста для $u(x,t)$ не превосходит показателя для $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$. Значения $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$ являются "регулярными" для задачи (1), (2).

Это обстоятельство можно интерпретировать по-другому, по принципу "не от функции $\varphi(x)$ к решению $u(x,t)$", а наоборот, "от решения $u(x,t)$ к функции $\varphi(x)$" или, что эквивалентно, "к функции $\psi(x)$" из формулы (3). Зафиксируем регулярный показатель $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$. Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения теплопроводности (1), причем известно, что $u \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, но $u \notin \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ для любого $\sigma_1 < \sigma$. Определим функцию $\psi(x)$ по формуле (3). Очевидно, что $\psi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Но, кроме того, из теоремы 3 вытекает, что $\psi \notin \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma_1 < \sigma$. Другими словами, регулярный показатель роста σ не уменьшается при интегрировании по $t \in [0,T]$ решения $u(x,t)$.

При $\sigma < -\sigma_0$ ситуация меняется. Пусть $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\sigma < -\sigma_0$. Из теоремы 3 следует, что формулы (4), (21) определяют решение $u(x,t)$, принадлежащее $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, но остается ли решение в $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ заранее не ясно. То, что переход в более широкий класс действительно возможен, видно на примере функции $v(x,t)$ из леммы 8. Рассмотрим эту функцию как решение $u \equiv v(x,t)$ задачи (1), (2) с начальным состоянием $u_0(x) \equiv g_T(x)$ и функцией $\varphi(x) \equiv \mu_T(x)$. Здесь $\mu_T(x)$ – фундаментальное решение из формулы (53), взятое при $t = T$. Поэтому $\varphi(x)$ и $\Delta\varphi(x)$ принадлежат $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma < -\sigma_0$. В то же время $u_0(x) \equiv g_T(x)$ не попадает в $\mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma < -\sigma_0$, а принадлежит только $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ (см. леммы 2, 6). Соответственно, $u \notin \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ при $\sigma < -\sigma_0$. Итак, существуют функции $u(x,t)$, для которых утверждение 5) в теореме 3 является неулучшаемым.

Также неулучшаемым (по крайней мере, в экспоненциальных классах $\mathscr{E}_\sigma$) будет утверждение 6) теоремы 3. Оказывается, решение $u(x,t)$, полученное по формулам (4), (21) для $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$, может выходить из $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, сохраняясь лишь в классе (25). Этот эффект связан с появлением дополнительных степенных множителей типа $|x|^\alpha$ в асимптотике $|u(x,t)|$ при $|x| \to \infty$. Не проводя детальных исследований, ограничимся одним примером.

Пример. Пусть $n = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Положим также $T = 1$. Тогда $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T} = \sqrt{\pi}$. Функцию Грина из формулы (10) запишем в виде

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{\exp(s^2) - 1} \exp(isx)\, ds, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{69}$$

с преобразованием Фурье $G_1(s) = s^2(\exp(s^2) - 1)^{-1}$, $-\infty < s < \infty$. (Мы обозначаем одномерную переменную через s вместо прежней многомерной ξ.) Функция $g_1(x)$ является четной, в ее исследовании можно ограничиться $x > 0$.

Воспользуемся разложением в ряд для $g_1(x)$, указанным в § 7. Слагаемые ряда выражаются формулой (48), которая для $n = 1$ будет точной без символа $O(|x|^{-1})$. При $x > 0$ получаем

$$g_1(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k\pi} \exp\bigl(-\sqrt{k\pi}\, x\bigr) \sin\biggl(\sqrt{k\pi}\, x + \frac{\pi}{4}\biggr). \tag{70}$$

Ряд (70) можно почленно дифференцировать по x любое число раз – возникающие ряды из производных равномерно сходятся на лучах $[a,\infty)\subset(0,\infty)$. В частности, имеем

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k\pi \exp\bigl(-\sqrt{k\pi}\,x\bigr)\sin\bigl(\sqrt{k\pi}\,x\bigr), && x>0,\\ g_1''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^{3/2}\exp\bigl(-\sqrt{k\pi}\,x\bigr)\cos\biggl(\sqrt{k\pi}\,x+\frac{\pi}{4}\biggr), && x>0, \end{aligned}$$

и т.д. Используя элементарные оценки и лемму 5, заключаем, что все производные $g_1^{(j)}(x)$, включая саму функцию $g_1(x)$, принадлежат $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. С помощью той же леммы 5 можно оценивать остатки в разложениях для производных. Например можно утверждать, что

$$g_1'(x) = 2\pi\exp\bigl(-\sqrt{\pi}\,x\bigr)\sin\bigl(\sqrt{\pi}\,x\bigr) + O\bigl(\exp\bigl(-\sqrt{2\pi}\,x\bigr)\bigr) \tag{71}$$

при $x\to+\infty$.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \int_0^1 u(x,t)\,dt = g_1(x), \tag{72}$$

т.е. одномерную модель $(-\infty<x<\infty)$ для общей нелокальной задачи (1), (2). Здесь $\varphi(x)\equiv g_1(x)$ и $\Delta\varphi(x)\equiv g_1''(x)$ принадлежат классу $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. Поэтому задача (72) подпадает под утверждение 6) теоремы 3. Определим начальное состояние $u_0(x)$ по формуле (11). Точнее, воспользуемся тем, что функция $\varphi(x)\equiv g_1(x)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$, и перейдем к эквивалентной формуле (12), согласно которой получим

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(s)G_1(s)e^{isx}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^2e^{s^2}}{e^{s^2}-1}\cdot\frac{s^2}{e^{s^2}-1}\cdot e^{isx}\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^4e^{s^2}e^{isx}}{(e^{s^2}-1)^2}\,ds. \end{aligned}$$

Будем интегрировать по частям:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s^3e^{isx}\,d\biggl(\frac{1}{e^{s^2}-1}\biggr)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{s^3e^{isx}}{e^{s^2}-1}\biggl(\Big|_{-\infty}^{-0}+\Big|_{+0}^{+\infty}\biggr) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(3s^2+s^3\cdot ix)e^{isx}}{e^{s^2}-1}\,ds\\ &= 0 + \frac{3}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^2e^{isx}}{e^{s^2}-1}\,ds + \frac{x}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^2\cdot ise^{isx}}{e^{s^2}-1}\,ds. \end{aligned}$$

Вспоминая определение (69) функции $g_1(x)$, заключаем, что

$$u_0(x) = \frac{3}{2}g_1(x) + \frac{1}{2}xg_1'(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Воспользуемся соотношением (71) и тем, что $g_1 \in \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$ с $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi}$. В итоге имеем асимптотику

$$u_0(x) = \pi x \exp\bigl(-\sqrt{\pi}\,x\bigr)\sin\bigl(\sqrt{\pi}\,x\bigr) + O\bigl(\exp\bigl(-\sqrt{\pi}\,x\bigr)\bigr) \tag{73}$$

при $x \to +\infty$. Отсюда вытекает, что $u_0 \notin \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. Но тогда и решение $u(x,t)$ задачи (72), полученное по формулам (4), (11), не попадает в $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, хотя очевидно принадлежит соответствующему классу (25). Построение примера завершено.

Пример основан на появлении дополнительного степенного множителя x в разложении (73) перед $\exp\bigl(-\sqrt{\pi}\,x\bigr)$. Спрашивается, могут ли появиться x^2, x^3 и т.д.? В одномерном случае, по-видимому, нет, а в общем многомерном случае стоит ожидать $|x|^\alpha$ с показателем α, зависящим от размерности n. Дальнейшее исследование лучше провести в рамках полного изучения разрешимости нелокальной задачи (1), (2) в экспоненциально-степенных классах функций с мажорантами $|x|^a \exp(\sigma|x|)$. Этот круг вопросов открыт и весьма интересен. Подготовительные соображения имеются в §7 (см. лемму 6 с оценкой (44), лемму 7 и приближенные формулы (48), (50)).

§ 10. Специальные уточнения теоремы 3

В формулировке теоремы 3 функции $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$ были фактически равноправны – они фигурировали в схожих оценках (22) с единым показателем σ. Однако их "вклад" в основную формулу (21) очевидно различен: функция $\varphi(x)$ входит в оператор свертки с фиксированной функцией $g_T(x)$, а $\Delta^*\varphi(x)$ находится в отдельном слагаемом. Учитывая это различие, можно несколько дополнить теорему 3. Приведем следующие два результата.

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma_1 < \sqrt{\pi/T}$, а $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma_2 < \infty$. Тогда задача (1), (2) разрешима – формулы (4), (21) определяют решение $u(x,t)$ задачи (1), (2). При $\sigma_2 \geqslant \sqrt{\pi/T}$ это решение принадлежит $\mathscr{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, но является неединственным в данном классе (имеются другие решения, не связанные с формулами (4), (21)). При $\sigma_2 < \sqrt{\pi/T}$ решение $u(x,t)$ подпадает под описание теоремы 3 со значением $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.*

Теорема 6. *Пусть $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\sigma < -\sigma_0 \equiv -\sqrt{\pi/T}$, а $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда формулы (4), (21) определяют решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), принадлежащее $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.*

Теорема 5 показывает, что для применения формул (4), (21) существенно ограничение на рост ($\sigma < \sqrt{\pi/T}$) только для функции $\varphi(x)$. Например, по теореме 5 задача (1), (2) с функцией

$$\varphi(x) = \sin(\exp(x_1 + \dots + x_n)), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

будет разрешимой по формулам (4), (21) на любом промежутке $[0,T]$. Основная теорема 3 применима здесь лишь при $T < \pi/(4n)$ из-за поведения $|\Delta\varphi(x)|$ при $|x| \to \infty$: непосредственно проверяется, что $\Delta\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ для $\sigma = 2\sqrt{n}$ и данное значение σ нельзя уменьшить.

Теорема 6 уточняет утверждение 6) теоремы 3 (см. также пример в § 9). Оказывается, для перехода решения $u(x,t)$ в класс (25) необходимо, чтобы именно $\varphi(x)$ принадлежала $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Если $\Delta^*\varphi \in \mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$, но $\varphi \in \mathscr{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma < -\sigma_0$, то решение остается в $\mathscr{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ и переход в более широкий класс (25) не происходит.

Доказательство всех этих утверждений повторяет mutatis mutandis доказательство теоремы 3. Просматривая шаг за шагом рассуждения в § 8, убеждаемся в справедливости теорем 5 и 6. Неединственность решения (теорема 5) в классе $\mathscr{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ с $\sigma_2 \geqslant \sqrt{\pi/T}$ следует из результатов работы [7]. Например, наряду с $u(x,t)$ решением той же задачи (1), (2) будут функции

$$u(x,t) + \exp\biggl(\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,x_k\biggr)\cos\biggl(\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,x_k + \frac{2\pi}{T}t\biggr), \qquad k = 1,\dots,n,$$

где x_k есть k-я координата точки x.

Авторы благодарны В. А. Ильину и А. И. Прилепко за обсуждения и поддержку этой работы.

Список литературы

1. *Holmgren E.* Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur // Ark. Mat. 1924. V. 18. № 9. P. 1–9.
2. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.
3. *Täcklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique // Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. Ser. IV. 1936. V. 10. № 3. P. 1–57.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 2. С. 133–166.
6. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 4. С. 465–467.
7. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 396–405.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Физматлит, 1994.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
10. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.: ГРТТЛ, 1937.
11. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
13. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.)* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.

14. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
15. Математическая энциклопедия. Т. 1. А–Г. М.: СЭ, 1977.
16. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949.
17. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
14.10.2004