А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение плотности спектральной меры сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 455–458

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm550

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРЫ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор $\mathbb{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$\ell y(x) \equiv -y''(x) - q(x)y(x), \qquad q \in C[0,+\infty), \qquad q\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R},$$

и граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ – решения уравнения

$$\ell y = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с начальными условиями $\varphi(0,\lambda) = \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha,\ \theta(0,\lambda) = \cos\alpha$.

По теореме Г. Вейля [1] существует неубывающая и ограниченная снизу на $\mathbb{R}$ функция $\rho_\alpha(\lambda)$ (возможно не единственная) такая, что

1) $\forall f \in L_2[0,+\infty)$ существует предел (обобщенное преобразование Фурье функции f)

$$\hat f(\lambda) \underset{L_2(\mathbb{R},d\rho_\alpha)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat f(\lambda) - F_n(\lambda)\right)^2 d\rho_\alpha(\lambda) = 0,$$

где $F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx$;

2) функция f представляется как предел в $L_2[0,\infty)$ “преобразования Фурье по мере $d\rho_\alpha$” от функции $\hat f$:

$$f(x) \underset{L_2[0,+\infty)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat f(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\rho_\alpha(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \hat f(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\rho_\alpha(\lambda).$$

При $\operatorname{Im} z > 0$ рассмотрим функцию

$$m(z) = \begin{cases} -\operatorname{ctg}\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d\rho_\alpha(\lambda)}{z-\lambda}, & \sin\alpha \neq 0, \\ a + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{z-\lambda} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\rho_0(\lambda), & \sin\alpha = 0, \end{cases}$$

постоянная $a \in \mathbb{C}$ выбирается так, чтобы при $z \to i\infty$ имела место асимптотика

$$m(z) = -i\sqrt{z} + \rho_\alpha(-\infty) + o(1).$$

Тогда решение $\theta(x,z) + m(z)\varphi(x,z)$ уравнения (1) принадлежит пространству $L_2[0,\infty)$.

В точках непрерывности λ, μ функция $\rho_\alpha(\lambda)$ связана с функцией Вейля–Титчмарша $m(z)$ по формуле

$$\rho_\alpha(\lambda) - \rho_\alpha(\mu) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta\to+0} \int_\mu^\lambda \operatorname{Im} m(t+i\delta)\,dt.$$

Работа поддержана грантом президента Российской Федерации ведущих научных школ № НШ – 680.2003.1.

В случае $q(x) \equiv 0$ явный вид плотности спектральной меры $\rho'_\alpha(\lambda)$ был указан Титчмаршем [2]:

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \quad \operatorname{tg}\alpha < 0, \\ 2\cos\alpha \sin^{-3}\alpha\delta(\lambda - \lambda_0), & \lambda < 0, \quad \operatorname{tg}\alpha > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2\alpha$, δ – дельта-функция Дирака.

Впервые оценку сверху спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$ $(\sin\alpha \neq 0)$ при $\lambda \to +\infty$ для локально суммируемого потенциала $q(x)$ получил Левитан [3], а затем Марченко [4] установил асимптотическую формулу при $\lambda \to +\infty$:

$$\rho_\alpha(\lambda) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sin^2\alpha}\lambda^{1/2}, & \sin\alpha \neq 0, \\ \dfrac{2}{3\pi}\lambda^{3/2}, & \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Изучению спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$ посвятили свои работы Аткинсон [5], Беневитц [6], Харис [7], Истэм [8].

Уточнения асимптотики $\rho_\alpha(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ производились по двум направлениям условий на потенциал q:

I. $q \in L(0, +\infty)$,

II. $q(x) \to +\infty, x \to +\infty, \displaystyle\int^{+\infty} \frac{q'^2}{|q|^{5/2}}\,dx < \infty, \int^{+\infty} \frac{|q''|}{|q|^{3/2}}\,dx < \infty, \int^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|q|}}\,dx = \infty.$

Мы ограничимся рассмотрением случая II. Именно в этой ситуации для $q(x) = \varepsilon x$ и $q(x) = \varepsilon x^2$ мы изучали концентрацию отрицательного спектра (см. [9], [10]) в сколь угодно малой окрестности собственного значения невозмущенного оператора ($\varepsilon = 0$). Истэм [8] получил асимптотическое разложение $\rho'_0(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ для гладких на $[0, +\infty)$ потенциалов, имеющих порядок роста на бесконечности такой же как и у x^c, $0 < c \leqslant 2$.

Теорема А ([8]). *Пусть q дифференцируема $M+2$ раза ($M \geqslant 1$), причем $(M+1)$ производная локально абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$.*

В дополнении к условиям II выполнены оценки при $x \in [1, \infty)$

$$q(x) \geqslant Kx^c, \qquad |q^{(\nu)}(x)| \leqslant K_\nu x^{c-\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant M+2,$$

где K, K_ν – положительные постоянные, $0 < c \leqslant 2$. Тогда справедлива асимптотика

$$\pi\rho_0(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda^{3/2} - q(0)\lambda^{1/2} + c_0 + \sum_{r=1}^{[\frac{M}{2}]} c_r\lambda^{-(2r-1)/2} + O(\lambda^{-(M/2)+\varepsilon}), \qquad \lambda \to +\infty,$$

где $\{c_r\}_{r=0}^\infty$ – последовательность чисел, зависящих от потенциала q.

В той же статье Истэмом анонсирован аналогичный результат при произвольном значении $\alpha \in (0, \pi)$. Асимптотическое разложение $\pi\rho'_\alpha(\lambda)$ начинается с $\lambda^{-1/2}\sin^{-2}\alpha$ и далее идет по полуцелым отрицательным степеням λ.

Отметим, что потенциал

$$q(x) = x^p, \qquad 0 < p < 2, \qquad p \neq 1,$$

ввиду особенности производных в точке $x = 0$ не удовлетворяет условиям теоремы А.

В этой работе мы находим несколько первых слагаемых в асимптотике $\rho'_\alpha(\lambda)$, $0 < \alpha < \pi$, для существенно более широкого, чем в [8], класса потенциалов. Мы не требуем дифференцируемости $q(x)$ в нуле. Производная потенциала $q'(x)$ может неограниченно расти в окрестности нуля, однако $q'(x) = o(1/x)$ при $x \to +0$. Также снимается ограничение $q(x) \asymp x^c$ $(x \to +\infty)$. Неограниченность $q'(x)$ в окрестности нуля приводит к тому, что разложение $\rho'_\alpha(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$

идет уже не по полуцелым степеням λ, а по системе функций достаточно сложной природы (см. ниже (3)). Анализ формулы (3) показывает, что получение явной формы полного асимптотического разложения при $\lambda \to +\infty$ для произвольных бесконечно гладких на $(0, +\infty)$ и даже "достаточно правильно" ведущих себя на бесконечности потенциалов (в точке $x = 0$ гладкости может не быть!) является очень трудной задачей. В связи с этим мы ограничились написанием только первых слагаемых асимптотики $\rho'_\alpha(\lambda)$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что непрерывная и неубывающая на $[0, +\infty)$ действительнозначная функция $q(x)$, $q(0) = 0$, $q(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\int_0^{+\infty} (q(x))^{-1/2}\,dx = +\infty$;
2) $q \in C^3(0, +\infty)$, *$q''(x)$ сохраняет знак при больших x и $q'''(x)$ имеет ограниченную вариацию на* $[1, +\infty)$;
3) $\forall \delta > 0$ *при $x \to +\infty$ выполняются оценки*

$$q(x) = O(x^{2+\delta}), \qquad q^{(\nu)}(x) = O(q(x)x^{\delta-\nu}), \quad \nu = 1, 2, 3;$$

4) *при $x \to +0$ справедливы оценки*

$$q^{(\nu)}(x) = o(x^{-\nu}), \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Тогда для плотности спектральной меры оператора $\mathbb{L}$ верна асимптотика

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + S(\alpha, \lambda) + o(1/\lambda))}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} S(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2}\sin^2\alpha\biggl(&\int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x)\cos(2x\sqrt{\lambda})\,dx \\ &+ \frac{1}{4\lambda}q''\Bigl(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Bigr) - \frac{1}{4\lambda}\int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x)\cos(2x\sqrt{\lambda})\,dx\biggr) \\ + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\biggl(&-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x)\sin(2x\sqrt{\lambda})\,dx \\ &+ \frac{1}{2\lambda}q'\Bigl(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Bigr) + \frac{1}{4\lambda^{3/2}}\int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x)\sin(2x\sqrt{\lambda})\,dx\biggr). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если потенциал $q(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет дополнительным условиям $q \in C^1[0, +\infty)$, $q'' \in L(0, 1)$, то при $\lambda \to +\infty$*

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda}q'(0) + 0.5\sin^2\alpha S_1(\lambda) + o(\frac{1}{\lambda})},$$

где

$$S_1(\lambda) = \biggl(\int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x)\cos(2x\sqrt{\lambda})\,dx + \frac{1}{4\lambda}q''\Bigl(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Bigr) - \frac{1}{4\lambda}\int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x)\cos(2x\sqrt{\lambda})\,dx\biggr).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если потенциал $q(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет дополнительным условиям $q \in C^2[0, +\infty)$, $q'''(x) \in L(0, 1)$, то при $\lambda \to +\infty$*

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{8\lambda}q''(0) - \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda}q'(0) + o(\frac{1}{\lambda})}.$$

Следствие 3. *Для* $q(x)=\varepsilon x^p$, $\varepsilon>0$, $0<p\leqslant 2$, *плотность спектральной меры* $\rho'_\alpha(\lambda)$ *оператора* $\mathbb{L}$ *имеет асимптотику при* $\lambda\to+\infty$:

$$\rho'_\alpha(\lambda)=$$
$$=\frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2^{-p-1}\varepsilon\Gamma(1+p)\bigl(\sin^2\alpha\cos(\frac{\pi p}{2})\lambda^{-\frac{p}{2}}-\sin(2\alpha)\sin(\frac{\pi p}{2})\lambda^{-\frac{p+1}{2}}\bigr)+o(\frac{1}{\lambda})}$$

при $0<p\leqslant 1$ *и*

$$\rho'_\alpha(\lambda)=\frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2^{-p-1}\varepsilon\Gamma(1+p)\sin^2\alpha\cos(\frac{\pi p}{2})\lambda^{-p/2}+o(\frac{1}{\lambda})}$$

при $1<p\leqslant 2$.

Основой для получения асимптотики (3) стала формула, выражающая плотность спектральной меры через некоторые функционалы от потенциала q и решение уравнения (1) $\varphi(x,\lambda)$. Положим

$$\xi(x,\lambda,a)=\int_a^x\sqrt{\lambda+q(t)}\,dt,\qquad a\geqslant 0. \tag{4}$$

В силу положительности $q(x)$ функция $\xi(x,\lambda,a)$ возрастает по x при любых фиксированных $\lambda>0$ и $a\geqslant 0$, поэтому соотношение (4) задает x как функцию переменной ξ: $x=x(\xi,\lambda,a)$. Следовательно, корректно определена функция $\eta(\xi,\lambda,a)=(\lambda+q(x))^{1/4}\varphi(x,\lambda)$.

Введем преобразование Прюфера

$$\eta(\xi,\lambda,a)=r(\xi,\lambda,a)\sin(\Theta(\xi,\lambda,a)),\qquad \eta'_\xi(\xi,\lambda,a)=r(\xi,\lambda,a)\cos(\Theta(\xi,\lambda,a)), \tag{5}$$

где $r(\xi,\lambda,a)=\sqrt{\eta^2(\xi,\lambda,a)+\eta'^2_\xi(\xi,\lambda,a)}$. Функция Θ формулами (5) определена не однозначно; в дальнейшем выбирается ее непрерывная по ξ ветвь, удовлетворяющая условию $\Theta(0,\lambda,a)\in(-\pi,\pi]$.

При любом $a\geqslant 0$ справедливо следующее представление для $\rho'_\alpha(\lambda)$:

$$\rho'_\alpha(\lambda)=\pi^{-1}r^{-2}(0,\lambda,a)\exp\biggl(\int_0^{+\infty}\widetilde{R}(\xi,\lambda)\sin(2\Theta(\xi,\lambda,a))\,d\xi\biggr), \tag{6}$$

где $\widetilde{R}(\xi,\lambda)=(5/16)(q'(x))^2(\lambda+q(x))^{-3}-(1/4)q''(x)(\lambda+q(x))^{-2}$, $x=x(\xi,\lambda,a)$ – обратная функция по отношению к $\xi(x,\lambda,a)$. Формула (6) была доказана Истемом [8] при $a=0$; при произвольном $a>0$ ее доказательство является дословным повторением его рассуждений с соответствующими тривиальными изменениями. Впервые представление $\rho'_\alpha(\lambda)$ было получено Титчмаршем [11, гл. V], но записывалось в иной форме.

В рассматриваемой нами задаче выбор $a=0$ невозможен ввиду наличия особенностей производных потенциала q в нуле. Мы полагаем $a=a_\lambda=\pi/(2\sqrt{\lambda})$ и ниже под $\xi(x,\lambda)$ и $r(\xi,\lambda)$ понимаем соответственно $\xi(x,\lambda,a_\lambda)$ и $r(\xi,\lambda,a_\lambda)$. Для "составных частей" представления (6) выведены следующие асимптотики при $\lambda\to+\infty$:

$$\begin{aligned}r^2(0,\lambda)=\lambda^{1/2}\sin^2\alpha+\lambda^{-1/2}\cos^2\alpha+\frac12\lambda^{-1/2}\sin^2\alpha\int_0^{a_\lambda}q'(t)\cos(2t\sqrt{\lambda})\,dt\\+\frac12\lambda^{-1}\sin(2\alpha)\biggl(\frac12\lambda^{-1/2}q'(a_\lambda)-\int_0^{a_\lambda}q'(t)\sin(2t\sqrt{\lambda})\,dt\biggr)+o(\lambda^{-3/2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\widetilde{R}(\xi,\lambda)\sin(2\Theta(\xi,\lambda))\,d\xi=-\frac18\lambda^{-2}q''(a_\lambda)-\frac18\lambda^{-2}\int_{a_\lambda}^{+\infty}q'''(x)\cos(2\xi(x,\lambda))\,dx\\+\frac14\lambda^{-5/2}\operatorname{ctg}\alpha\int_{a_\lambda}^{+\infty}q'''(x)\sin(2\xi(x,\lambda))\,dx+o(\lambda^{-2}).\end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–268. **2**. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328. **3**. Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 4. С. 605–608. **4**. Марченко В. А. // Тр. ММО. 1951. Т. 1. С. 327–420. **5**. Atkinson F. V. Lecture Notes in Math. P. 964. **6**. Bennewitz C. // Proc. London Math. Soc. 1989. V. 59 (3). P. 294–338. **7**. Harris B. J. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1985. V. 100. P. 343–360. **8**. Eastham M. S. P. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1998. V. 128. P. 37–45. **9**. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 3. С. 336–344. **10**. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 303–306. **11**. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М., 1960.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `info@imscs.msu.ru`

Поступило
31.10.2003