А. Ю. Попов, Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 877–888

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm314

Математические заметки

том 74 выпуск 6 декабрь 2003

ОЦЕНКИ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

А. Ю. Попов

В статье получены двусторонние оценки с точными константами сумм рядов по синусам с выпуклой и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов.
Библиография: 7 названий.

В работе уточняются и дополняются некоторые теоремы Теляковского об оценках сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами, доказанные им в статьях [1], [2]. Всюду далее предполагается, что $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – невозрастающая и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Обозначим $m(x) = [\pi/|x|]$, $0 < |x| \leqslant \pi$,

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \qquad v(\mathbf{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k.$$

Проводимое здесь исследование касается сравнения поведения функции $g(\mathbf{b}, x)$ и более просто устроенной функции $v(\mathbf{b}, x)$. Ввиду нечетности $g(\mathbf{b}, x)$ и $v(\mathbf{b}, x)$ достаточно рассмотреть значения $x \in (0, \pi]$.

Первые результаты в этой области принадлежат Салему [3], [4]. Для некоторых подклассов монотонных последовательностей он доказал порядковое соотношение

$$g(\mathbf{b}, x) \asymp v(\mathbf{b}, x), \qquad x \to +0. \tag{1}$$

Его исследования были продолжены другими авторами [5], [6], [1], [2]. Приведем интересующие нас результаты работ [1], [2].

Теорема A [1]. *С абсолютной постоянной в символе O справедливо равенство*

$$g(\mathbf{b}, x) = v(\mathbf{b}, x) + O\biggl(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k\biggr), \qquad 0 < x \leqslant \pi. \tag{2}$$

Заметим, что отношение $\bigl(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k\bigr)/v(\mathbf{b}, x)$ для многих монотонных последовательностей $\mathbf{b}$ не является бесконечно малой величиной при $x \to +0$, но зато всегда не превосходит π^2 на $(0, \pi]$. Следовательно, с некоторой абсолютной постоянной C выполняется неравенство

$$|g(\mathbf{b}, x)| \leqslant C v(\mathbf{b}, x), \qquad 0 < x \leqslant \pi. \tag{3}$$

Теорема Б [1], [2]. *Если последовательность* $\mathbf{b}$ *выпукла, то при любых* $x \in (0, \pi/11]$ *справедливы неравенства (для краткости пишем* m *вместо* $m(x)$*)*

$$\frac{b_m}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi m}\sum_{k=1}^{m-1} k^2(b_k - b_{k+1}) \leqslant g(\mathbf{b}, x) \leqslant \frac{b_m}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{6}{m}\sum_{k=1}^{m-1} k^2(b_k - b_{k+1}).$$

Теорема Б вместе с равенством

$$\frac{1}{\pi m}\sum_{k=1}^{m-1} k^2(b_k - b_{k+1}) = -\frac{mb_m}{\pi} + \frac{2}{\pi m}\sum_{k=1}^{m}\left(k - \frac{1}{2}\right)b_k$$

немедленно влечет за собой следующую асимптотическую оценку снизу суммы ряда по синусам:

$$g(\mathbf{b}, x) \geqslant \bigl(2\pi^{-2} + o(1)\bigr)v(\mathbf{b}, x), \qquad x \to +0. \tag{4}$$

Теоремы А и Б позволили Теляковскому для любой выпуклой последовательности $\mathbf{b}$ вывести порядковое соотношение (1) с абсолютными постоянными в символе $\asymp$. Напомним, что запись $u(x) \asymp v(x)$, $x \to +0$, означает одновременное выполнение оценок $u(x) = O(v(x))$ и $v(x) = O(u(x))$ в некоторой правой окрестности нуля, а запись $u(x) \sim v(x)$, $x \to +0$, подразумевает справедливость предельного соотношения

$$\lim_{x \to +0}\frac{u(x)}{v(x)} = 1.$$

В настоящей работе теорема А уточняется. Доказывается, что второе слагаемое в правой части (2) при любом $x \in (0, \pi]$ отрицательно, и неравенство (3) верно с $C = 1$.

Теорема 1. *Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности положительных чисел* $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *выполняются неравенства*

$$-0.5b_1\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant g(\mathbf{b}, x) < 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k \qquad \forall x \in (0, \pi], \tag{5}$$

$$g(\mathbf{b}, x) < \sin x\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{6}$$

В том же духе уточняется оценка снизу теоремы Б.

Теорема 2. *Если последовательность* $\mathbf{b}$ *является выпуклой, то при любом* $x \in (0, \pi/2]$ *справедливо неравенство*

$$b_{m(x)}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1 + m(x)}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi^2}v(\mathbf{b}, x) \leqslant g(\mathbf{b}, x). \tag{7}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{m(x)}{\pi} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x},$$

а последняя функция убывает на $(0, \pi/2]$. Ввиду сказанного множитель при $b_{m(x)}$ в первом слагаемом левой части (7) на интервале $(0, \pi/2)$ превосходит свое значение в точке $x = \pi/2$, которое равно $1/2 - 3/\pi > -0.46$. Отсюда выводим

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любой выпуклой последовательности* $\mathbf{b}$ *выполняется неравенство*

$$-0.46\, b_{m(x)} + 2\pi^{-2} v(\mathbf{b}, x) < g(\mathbf{b}, x), \qquad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Из (8) совсем просто вытекает (4), поскольку $b_{m(x)} = O(xv(\mathbf{b}, x))$, $x \to +0$.

Итак, для сумм рядов по синусам с произвольной выпуклой и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов $\mathbf{b}$ имеют место асимптотические оценки

$$\bar{l}(\mathbf{b}) = \limsup_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} \leqslant 1, \qquad \underline{l}(\mathbf{b}) = \liminf_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} \geqslant \frac{2}{\pi^2}. \tag{9}$$

Сколь они точны? Следующая теорема демонстрирует не только точность каждой из оценок (9) в отдельности, но и их одновременную неулучшаемость как на классе выпуклых, так и на более узком подмножестве вполне убывающих последовательностей $\mathbf{b}$. Другими словами, точная верхняя грань отношения $\bar{l}(\mathbf{b})/\underline{l}(\mathbf{b})$, взятая по классу вполне убывающих и стремящихся к нулю последовательностей $\mathbf{b}$, равна $\pi^2/2$ и достигается на некоторой экстремальной последовательности.

Напомним, что последовательность $\{b_k\}$ называется *вполне убывающей*, если для любых k и $p \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} b_{k+n} \geqslant 0.$$

Эквивалентное определение вполне убывающей последовательности состоит в том, что ее k-й элемент является значением в точке k функции $\Phi \in C^\infty[1, +\infty)$ такой, что

$$\operatorname{sgn} \Phi^{(p)}(z) = (-1)^p \qquad \forall z \geqslant 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Как известно, любая функция $\Phi(z)$, обладающая указанным свойством, допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует целая функция* Φ *конечного экспоненциального типа действительнозначная и положительная на* $\mathbb{R}$, *для которой справедливы следующие утверждения*:

1) $\lim_{z\to+\infty} \Phi(z) = 0$;
2) $\operatorname{sgn} \Phi^{(p)}(z) = (-1)^p$ *для всех* $z \in \mathbb{R}$ *и для всех* $p \in \mathbb{N}$;
3) *для суммы ряда*

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(k) \sin kx$$

и ее мажоранты

$$V(x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k\Phi(k)$$

имеют место равенства

$$\limsup_{x\to+0} \frac{G(x)}{V(x)} = 1, \qquad \liminf_{x\to+0} \frac{G(x)}{V(x)} = \frac{2}{\pi^2}. \tag{10}$$

Заметим, что неулучшаемость каждой в отдельности из оценок (9) вытекает из следующих теорем.

Теорема В [1], [6]. *Если последовательность* $\mathbf{b}$ *выпукла вниз и медленно меняется* $(\lim_{k\to\infty}(b_{2k}/b_k)=1)$, *то справедлива асимптотика*

$$g(\mathbf{b},x)\sim x^{-1}b_{m(x)},\qquad x\to 0. \tag{11}$$

Ввиду медленного изменения последовательности $\mathbf{b}$ имеем

$$x\sum_{k=1}^{m(x)}kb_k\sim\frac{1}{2}xm^2(x)b_{m(x)}\sim\frac{1}{2}\pi^2x^{-1}b_{m(x)},\qquad x\to 0.$$

Отсюда и из (11) заключаем, что для суммы ряда по синусам с произвольной выпуклой и медленно меняющейся последовательностью коэффициентов выполняется предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\mathbf{b},x)}{v(\mathbf{b},x)}=2\pi^{-2}. \tag{12}$$

Теорема Г. *Если* $\mathbf{b}$ – *произвольная невозрастающая последовательность, удовлетворяющая условию* $b_k=O(k^{-2})$, *то*

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\mathbf{b},x)}{v(\mathbf{b},x)}=1.$$

Насколько известно автору, теорема Г не формулировалась в публикациях, но она представляет собой простое следствие теоремы А. Действительно, если $\sum_{k=1}^{\infty}kb_k=+\infty$, то второе слагаемое в (2) бесконечно мало при $x\to 0$ в сравнении с первым, поскольку

$$x^3\sum_{k=1}^{m(x)}k^3b_k=O\biggl(x^3\sum_{k=1}^{m(x)}k\biggr)=O(x^3m^2(x))=O(x),\qquad x\to 0.$$

Если же $\sum_{k=1}^{\infty}kb_k<+\infty$, то $g(\mathbf{b},\cdot)\in C^1(\mathbb{R})$, $g(0)=0$, поэтому при $x\to 0$ имеем

$$g(\mathbf{b},x)\sim xg'(\mathbf{b},0)=x\sum_{k=1}^{\infty}kb_k\sim x\sum_{k=1}^{m(x)}kb_k=v(\mathbf{b},x).$$

Перейдем к доказательству сформулированных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Сначала дадим оценку сверху остатка ряда по синусам с произвольной невозрастающей и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов. Воспользовавшись преобразованием Абеля и представлением сопряженных ядер Дирихле

$$\widetilde{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos x/2-\cos(n+1/2)x}{2\sin x/2},$$

находим

$$\begin{aligned}r_m(x)&=\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\sin kx=\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\bigl(\widetilde{D}_k(x)-\widetilde{D}_{k-1}(x)\bigr)\\&=-b_{m+1}\widetilde{D}_m(x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\widetilde{D}_k(x)(b_k-b_{k+1}).\end{aligned} \tag{13}$$

Ввиду неотрицательности всех разностей $b_k - b_{k+1}$ приходим к оценке

$$
\begin{aligned}
r_m(x) &\leqslant -b_{m+1}\widetilde{D}_m(x) + \Big(\sup_{k\geqslant m+1} \widetilde{D}_k(x)\Big) \sum_{k=m+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \\
&= b_{m+1} \sup_{k\geqslant m+1} \big(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_m(x)\big) = b_{m+1} \sup_{k\geqslant m+1} \frac{\cos(m+1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2\sin x/2}.
\end{aligned}
$$

А так как

$$
\sup_{k\geqslant m+1} \bigg(-\cos\Big(\frac{k+1}{2}\Big)x\bigg) \leqslant 1,
$$

то

$$
r_m(x) \leqslant b_{m+1}\frac{1+\cos(m+1/2)x}{2\sin x/2} = b_{m+1}\frac{\cos^2(m/2+1/4)x}{\sin x/2}. \tag{14}
$$

До сих пор $m \in \mathbb{N}$ было произвольным. Теперь возьмем $m = m(x)$. Тогда включение $x \in (\pi/(m+1), \pi/m]$ влечет за собой двойное неравенство

$$
\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \leqslant \Big(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\Big)x \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{x}{4},
$$

вследствие которого

$$
\left|\cos\bigg(\Big(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\Big)x\bigg)\right| \leqslant \sin\frac{x}{4}, \qquad m = m(x), \quad 0 < x < \pi. \tag{15}
$$

Из (14) и (15) находим

$$
\begin{aligned}
r_{m(x)}(x) &= \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \leqslant b_{m+1}\sin^2\frac{x}{4}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2}b_{m+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{2}b_{m+1}\sin\frac{x}{2}, \qquad m = m(x), \qquad 0 < x \leqslant \pi.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Перейдем к доказательству неравенств (5) и (6). Пусть сначала $x \in (\pi/2, \pi]$. Тогда $m(x) = 1$ и согласно (16)

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{b}, x) &= b_1\sin x + r_1(x) \leqslant b_1 \sin x + \frac{1}{2}b_2\sin\frac{x}{2} \\
&= 2b_1\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}b_2\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\bigg(b_1\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}b_2\bigg).
\end{aligned}
$$

В силу монотонности $\mathbf{b}$ имеем $b_2 \leqslant b_1$, а $\cos(x/2) \leqslant 1/\sqrt{2} < 0.71$ при $x \in (\pi/2, \pi]$. Поэтому

$$
g(\mathbf{b}, x) \leqslant 2\sin\frac{x}{2}(0.71\, b_1 + 0.25\, b_2) \leqslant 1.92\, b_1 \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}l\Big(\frac{x}{2}\Big).
$$

Правое неравенство (5) при $x \in (\pi/2, \pi]$ доказано.

Пусть теперь $x \in (0, \pi/2]$. Тогда $m(x) \geqslant 2$ и $g(\mathbf{b}, x)$ можно представить в виде

$$
g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{m-1} b_k \sin kx + b_m \sin mx + r_m(x), \qquad m = m(x).
$$

Для оценки сверху первого слагаемого воспользуемся очевидными неравенствами $\sin kx \leqslant k\sin x$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $0 < x \leqslant \pi/m$. Заметим далее, что в силу включения $x \in (\pi/(m+1), \pi/m]$ справедливо двойное неравенство $\pi - x < mx \leqslant \pi$, откуда $\sin mx \leqslant \sin x$. Сказанное вместе с (16) приводит к оценке

$$g(\mathbf{b}, x) \leqslant \sin x \sum_{k=1}^{m-1} kb_k + b_m \sin x + \frac{1}{2} b_{m+1} \sin\frac{x}{2}.$$

Воспользовавшись монотонностью $\mathbf{b}$ и тем, что $\sin(x/2) < \sin x$, получаем

$$g(\mathbf{b}, x) \leqslant \sin x \biggl(\sum_{k=1}^{m-1} kb_k + 1.5b_m\biggr) < \sin x \sum_{k=1}^{m} kb_k.$$

Неравенство (6) при $x \in (0, \pi/2]$ доказано, а правое неравенство (5) при этих значениях x является его следствием.

Оценка снизу в (5) делается совсем просто. Положив в (13) $m = 0$, получим тождество

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \widetilde{D}_k(x).$$

А так как при любых $k \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, \pi]$ сопряженные ядра Дирихле $\widetilde{D}_k(x)$ не меньше, чем

$$\frac{\cos(x/2) - 1}{2\sin(x/2)} = -\frac{\sin^2(x/4)}{\sin(x/2)} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \geqslant -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2},$$

то ввиду неотрицательности разностей $b_k - b_{k+1}$ находим

$$g(\mathbf{b}, x) \geqslant -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = -\frac{1}{2} b_1 \sin\frac{x}{2},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Здесь автор почти полностью следует рассуждениям Теляковского, проведенным им в доказательстве теоремы Б, но немного уточняет их в двух местах. Функцию $g(\mathbf{b}, x)$ Теляковский представил в виде суммы

$$g(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{2} b_m \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + A(x) + B(x), \tag{17}$$

где $m = m(x)$,

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \widetilde{D}_k(x), \qquad B(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}) \frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}.$$

Затем он вывел неравенство

$$A(x) \geqslant \frac{(b_m - b_{m+1})(m\sin x - \sin mx)}{4\sin^2(x/2)}, \tag{18}$$

а также оценку снизу $A(x)$ другого вида и оценку $B(x)$. Последние сейчас будут немного уточнены.

По условию теоремы вторые разности $\Delta^2 b_k = b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}$ неотрицательны, следовательно,

$$\begin{aligned} B(x) &\geqslant \inf_{k\geqslant m}\left(\frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}\right)\sum_{k=m}^{\infty}\Delta^2 b_k \\ &= (b_m - b_{m+1})\inf_{k\geqslant m}\frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)} \\ &\geqslant \frac{(b_m - b_{m+1})(\sin mx - 1)}{4\sin^2(x/2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (18) и (19) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A(x) + B(x) &\geqslant \frac{1}{8}\sin^{-2}\frac{x}{2}(b_m - b_{m+1})(m\sin x - \sin mx + 2(\sin mx - 1)) \\ &= \frac{1}{8}(b_m - b_{m+1})\sin^{-2}\frac{x}{2}(m\sin x + \sin mx - 2). \end{aligned} \tag{20}$$

На полуинтервале $\pi/(m+1) < x \leqslant \pi/m$ исследуем функцию

$$f_m(x) = m\sin x + \sin mx - 2.$$

Ввиду неравенства $\sin\pi t \geqslant 2t,\ 0 < t \leqslant 1/2$, и ограничения $m \geqslant 2$ имеем $f_m(\pi/m) = m\sin(\pi/m) - 2 \geqslant 0$, а так как $f_m'(x) = m(\cos x + \cos mx) = 2m\cos((m-1)x/2)\cos((m+1)x/2) < 0$ (при всех значениях x из рассматриваемого полуинтервала $0 < (m-1)x/2 < \pi/2 < (m+1)x/2 < \pi$), то $f_m(x) > 0$ при $x \in (\pi/(m+1), \pi/m)$. Отсюда и из (20) заключаем, что

$$\frac{1}{2}A(x) + B(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{21}$$

Это неравенство вместе с тождеством (17) дает

$$g(\mathbf{b}, x) \geqslant \frac{1}{2}b_m\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}A(x), \qquad m = m(x), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Теперь дадим другую оценку $A(x)$. В лемме из статьи [2] Теляковский получил неравенство $\widetilde{D}_k(x) \geqslant 2\pi^{-2}k(k+1)x,\ 1 \leqslant k \leqslant m-1,\ 0 < x \leqslant \pi/m,\ m \in \mathbb{N}$, которое затем огрубил. Но мы воспользуемся именно им:

$$\begin{aligned} A(x) &\geqslant 2\pi^{-2}x\sum_{k=1}^{m-1}k(k+1)(b_k - b_{k+1}) \\ &= 2\pi^{-2}x\left(-m(m+1)b_m + \sum_{k=1}^{m}b_k\big(k(k+1) - k(k-1)\big)\right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство $xm \leqslant \pi$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{2}A(x) \geqslant -\frac{(m+1)b_m}{\pi} + 2x\pi^{-2}\sum_{k=1}^{m}kb_k,$$

которое вместе с (17) доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 3. Положим $A_1 = 1$, $A_{n+1} = \exp\exp\exp A_n$, $B_n = \ln A_{n+1}$,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \dfrac{1}{A_{n+1}} < t \leqslant \dfrac{1}{A_n}, \quad n \text{ нечетно}, \\ t^{-1}\ln^{-4} t, & \dfrac{1}{A_{n+1}} < t \leqslant \dfrac{1}{A_n}, \quad n \text{ четно}, \end{cases}$$

$$\Phi(z) = \int_0^1 f(t)e^{-zt}\,dt, \qquad \Phi_1(z) = \int_0^1 te^{-zt}\,dt = z^{-2}(1 - e^{-z} - ze^{-z}),$$

$$\Phi_2(z) = \int_0^{1/A_2} t^{-1}\ln^{-4} te^{-zt}\,dt,$$

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1(k)\sin kx, \qquad g_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2(k)\sin kx.$$

Поскольку функции Φ, Φ_1, Φ_2 являются преобразованиями Лапласа положительных и суммируемых на $(0,1)$ (или на $(0,1/A_2) \subset (0,1)$) функций, то Φ, Φ_1, Φ_2 – целые функции экспоненциального типа, не превосходящего 1, положительные и вполне убывающие на $\mathbb{R}$. Явная формула для функции $\Phi_1(z)$ влечет за собой асимптотику

$$\Phi_1(z) \sim z^{-2}, \qquad z \to +\infty, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Докажем, что

$$\Phi_2(z) \sim \frac{1}{3}\ln^{-3} z, \qquad z \to +\infty, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

В интеграле, определяющем $\Phi_2(z)$, сделаем замену переменной $zt = u$. При $z > 1$ получим

$$\Phi_2(z) = \int_0^{z/A_2} u^{-1}(\ln u - \ln z)^{-4}e^{-u}\,du = J_1(z) + J_2(z) + J_3(z), \tag{25}$$

где в J_1 интегрирование идет по $(0,1)$, в J_2 – по $[1,\sqrt{z}\,]$, а в J_3 – по $[\sqrt{z}, z/A_2)$. (Можно считать, что $z > A_2^2$, так что $1 < \sqrt{z} < z/A_2$.) Если $u \in (\sqrt{z}, z/A_2)$, то $|\ln u - \ln z| > \ln A_2 = e^e > 1$. Следовательно,

$$J_3(z) < \int_{\sqrt{z}}^{z/A_2} u^{-1}e^{-u}\,du < z^{-1/2}\int_{\sqrt{z}}^{+\infty} e^{-u}\,du = z^{-1/2}\exp(-\sqrt{z}\,). \tag{26}$$

При $u \in [1,\sqrt{z}\,]$, $z > 1$, имеем $|\ln u - \ln z| \geqslant (1/2)\ln z$. Отсюда находим

$$J_2(z) \leqslant 16\ln^{-4} z\int_1^{\sqrt{z}} u^{-1}e^{-u}\,du < 16\ln^{-4} z\int_1^{+\infty} e^{-u}\,du = O(\ln^{-4} z), \qquad z \to +\infty. \tag{27}$$

Преобразуем интеграл $J_1(z)$ следующим образом:

$$J_1(z) = \int_0^1 u^{-1}(\ln u - \ln z)^{-4}\,du + \int_0^1 u^{-1}(e^{-u} - 1)(\ln u - \ln z)^{-4}\,du. \tag{28}$$

Ввиду ограниченности на $(0,1)$ функции $u^{-1}(e^{-u} - 1)$ второе слагаемое в (28) есть

$$O\biggl(\int_0^1 (\ln u - \ln z)^{-4}\,du\biggr) = O(\ln^{-4} z),$$

так как $|\ln u - \ln z| \geqslant \ln z$ при $u \in (0,1)$, $z > 1$. Последняя оценка вместе с (25)–(28) влечет за собой асимптотическое равенство

$$\Phi_2(z) = \int_0^1 u^{-1}(\ln u - \ln z)^{-4}\,du + O(\ln^{-4} z)$$
$$= \int_0^{+\infty} (\tau + \ln z)^{-4}\,d\tau + O(\ln^{-4} z) = \frac{1}{3}\ln^{-3} z + O(\ln^{-4} z)$$

(в интеграле производилась замена переменной $\tau = -\ln u$). Соотношение (24) доказано.

Изложим идеи дальнейших рассуждений. Функцию $\varphi \in L^1(0,+\infty)$ назовем согласно [7, гл. 8] *оригиналом* ее преобразования Лапласа

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-zt}\,dt.$$

Поскольку на достаточно длинных (в сравнении с величинами их левых концов) промежутках $(1/A_{2p+j+1}, 1/A_{2p+j}]$, $j = 1,2$, $p \in \mathbb{N}$, оригиналы преобразований Лапласа Φ и Φ_j совпадают, то естественно ожидать, что функции $\Phi(k)$ и $\Phi_j(k)$ “достаточно близки” между собой на последовательностях “длинных” (в сравнении с величинами их левых концов) промежутков значений k. Точнее говоря, имеем

$$\Phi_j(k) - \Phi(k) = O(k^{-3}), \qquad k \in [A^2_{2p+j}, B_{2p+j}], \quad j = 1,2, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Положим

$$v_1(x) = x\sum_{k=1}^{m(x)} k\Phi_1(k), \qquad v_2(x) = x\sum_{k=1}^{m(x)} k\Phi_2(k),$$

$x_n = \pi A_n^{-4}$, если n четно, и $x_n = \pi B_n^{-1}$, если n нечетно. Из (29) выводятся асимптотики

$$v_j(x_{2p+j}) \sim V(x_{2p+j}), \qquad p \to \infty, \quad j = 1,2, \tag{30}$$
$$g_j(x_{2p+j}) \sim G(x_{2p+j}), \qquad p \to \infty, \quad j = 1,2. \tag{31}$$

Согласно теоремам В и Г (возможность их применения обусловлена асимптотиками (23) и (24) функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$) имеем

$$g_1(x) \sim v_1(x), \qquad g_2(x) \sim 2\pi^{-2}v_2(x), \qquad x \to 0. \tag{32}$$

Из (30)–(32) вытекают предельные соотношения

$$\lim_{p\to\infty} \frac{G(x_{2p+1})}{V(x_{2p+1})} = 1, \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{G(x_{2p})}{V(x_{2p}) = 2\pi^{-2}}.$$

Отсюда находим

$$\limsup_{x\to 0} \frac{G(x)}{V(x)} \geqslant 1, \qquad \liminf_{x\to 0} \frac{G(x)}{V(x)} \leqslant 2\pi^{-2}. \tag{33}$$

Но по теореме 1 первый из пределов (33) не превосходит 1, а второй вследствие (4) (см. также теорему 2) не может быть меньше $2\pi^{-2}$. Следовательно, имеют место равенства (10).

Итак, осталось установить справедливость соотношений (29) и вывести из них (30) и (31). Легко сообразить, что разность между оригиналами функций Φ и Φ_1 равна нулю на полуинтервалах $\Delta_n = (1/A_{n+1}, 1/A_n]$ с нечетными номерами и не превосходит по абсолютной величине $t^{-1}\ln^{-4} t$ на полуинтервалах Δ_n с четными номерами. В силу сказанного при $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, $k \in [A_n^2, B_n]$ имеем

$$\begin{aligned}|\Phi_1(k) - \Phi(k)| &\leqslant \int_0^{1/A_{n+1}} t^{-1}\ln^{-4} t e^{-kt}\,dt + \int_{1/A_n}^{1/A_2} t^{-1}\ln^{-4} t e^{-kt}\,dt \\ &< \int_0^{1/A_{n+1}} t^{-1}\ln^{-4} t\,dt + \max_{1/A_n \leqslant t \leqslant 1/A_2}(t^{-1}\ln^{-4} t)\int_{1/A_n}^{1/A_2} e^{-kt}\,dt \\ &= \int_{\ln A_{n+1}}^{+\infty} \tau^{-4}\,d\tau + \frac{1}{k}(e^{-k/A_n} - e^{-k/A_2})\max_{1/A_n \leqslant t \leqslant 1/A_2}(t^{-1}\ln^{-4} t).\end{aligned}$$

Вспоминая обозначение $B_n = \ln A_{n+1}$ и оценивая сверху максимум функции $t^{-1}\ln^{-4} t$ на отрезке $[1/A_n, 1/A_2]$, $n \geqslant 3$, через A_n, находим

$$|\Phi_1(k) - \Phi(k)| \leqslant \frac{1}{3}B_n^{-3} + \frac{A_n}{k}\exp\biggl(-\frac{k}{A_n}\biggr). \tag{34}$$

А так как $A_n^2 \leqslant k \leqslant B_n$, то получаем оценку

$$|\Phi_1(k) - \Phi(k)| \leqslant \frac{1}{3}k^{-3} + \exp(-\sqrt{k}) = O(k^{-3}), \qquad k \in [A_n^2, B_n], \quad n \text{ нечетно}.$$

Таким образом, для $j = 1$ соотношение (29) доказано. Оценка разности $\Phi_2(k) - \Phi(k)$ для $k \in [A_n^2, B_n]$, n четно, делается совершенно аналогично, поскольку в этом случае разность между оригиналами функций Φ_2 и Φ равна нулю на полуинтервалах Δ_n с четными номерами и оценивается сверху по абсолютной величине той же функцией $t^{-1}\ln^{-4}$ на промежутках Δ_n с нечетными номерами, за исключением Δ_1, где она не превосходит t. Поэтому для $\Phi_2(k) - \Phi(k)$ при $k \in [A_n^2, B_n]$, n четно, верна оценка, к которой следует еще добавить экспоненциально малый интеграл $\int_{1/A_2}^1 te^{-zt}\,dt$. В результате получаем (29) и для $j = 2$.

Перейдем к доказательству асимптотик (30). В силу выбора x_n имеем

$$m(x_n) = \begin{cases} [B_n], & n \text{ нечетно}, \\ [A_n^4], & n \text{ четно}. \end{cases} \tag{35}$$

Из (23) заключаем, что

$$v_1(x) \sim x\ln\frac{1}{x}, \qquad x \to +0, \tag{36}$$

а если n нечетно, то согласно (35) и (29)

$$\begin{aligned}V(x_n) &= x_n\sum_{k=1}^{[B_n]} k\Phi(k) = x_n\sum_{k=1}^{[A_n^2]} k\Phi(k) + x_n\sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k(\Phi_1(k) + O(k^{-3})) \\ &= o\biggl(x_n\sum_{k=1}^{[A_n^2]} k\biggr) + x_n\sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k\Phi_1(k) + x_n\sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} O(k^{-2}) \\ &= o(x_nA_n^4) + v_1(x_n) - x_n\sum_{k=1}^{[A_n^2]} k\Phi_1(k) = v_1(x_n) + o(x_nA_n^4), \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

А так как $x_{2p+1}^{-1} \asymp [B_{2p+1}] = \exp\exp(A_{2p+1}),\ p \to \infty$, то получаем

$$V(x_{2p+1}) = v_1(x_{2p+1}) + o\biggl(x_{2p+1}\biggl(\ln\ln\frac{1}{x_{2p+1}}\biggr)^4\biggr), \qquad p \to \infty,$$

что вместе с (36) доказывает требуемую эквивалентность для $j = 1$. Если же n четно, то согласно (35) и (29)

$$\begin{aligned} V(x_n) &= x_n \sum_{k=1}^{[A_n^2]} k\Phi(k) + x_n \sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k(\Phi_2(k) + O(k^{-3})) \\ &= v_2(x_n) + o(x_n A_n^4), \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

В силу выбора x_n имеем $x_{2p}A_{2p}^4 \asymp 1,\ p \to \infty$, а так как $\lim_{x\to+0} v_2(x) = +\infty$ (см. (24)), то приходим к эквивалентности (30) и в случае $j = 2$.

В заключение выведем асимптотики (31). Разбивая ряды для G и g_j на три части и используя соотношение (29), находим

$$G(x_{2p+j}) - g_j(x_{2p+j}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi(k) - \Phi_j(k))\sin(kx_{2p+j}) = \sum_{i=1}^{3} S_{j,p}^{(i)}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} S_{j,p}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{[A_{2p+j}^2]} (\Phi(k) - \Phi_j(k))\sin(kx_{2p+j}), \\ S_{j,p}^{(2)} &= \sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} (\Phi(k) - \Phi_j(k))\sin(kx_{2p+j}) = O\biggl(\sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} k^{-3}|\sin(kx_{2p+j})|\biggr), \\ S_{j,p}^{(3)} &= \sum_{k=[B_{2p+j}]+1}^{\infty} \Phi(k)\sin(kx_{2p+j}) - \sum_{k=[B_{2p+j}]+1}^{\infty} \Phi_j(k)\sin(kx_{2p+j}). \end{aligned}$$

Сумму $S_{j,p}^{(1)}$ оценим, используя неравенство $|\sin kx| \leqslant kx,\ x > 0$, и предельные соотношения $\lim_{k\to\infty}\Phi(k) = \lim_{k\to\infty}\Phi_j(k) = 0,\ j = 1, 2$. Получим

$$|S_{j,p}^{(1)}| = o\biggl(x_{2p+j}\sum_{k=1}^{[A_{2p+j}^2]} k\biggr) = o(x_{2p+j}A_{2p+j}^2), \qquad p \to \infty. \tag{38}$$

Аналогично оценивая синусы в сумме $S_{j,p}^{(2)}$, находим

$$|S_{j,p}^{(2)}| = O\biggl(\sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} k^2 x_{2p+j}\biggr) = o(x_{2p+j}), \qquad p \to \infty. \tag{39}$$

Для нахождения верхней границы $|S^{(3)}_{j,p}|$ воспользуемся известной оценкой остатка произвольного ряда по синусам с невозрастающими и стремящимися к нулю коэффициентами $\{c_k\}$:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k \sin kx\right| = O\left(\frac{c_n}{x}\right), \qquad 0 < x < \pi$$

(постоянная в O абсолютная). Следовательно, в нашем случае имеем

$$|S^{(3)}_{j,p}| = O\left(\frac{\Phi([B_{2p+j}]+1) + \Phi_j([B_{2p+j}]+1)}{x_{2p+j}}\right),$$

а так как функции Φ, Φ_1 и Φ_2 убывают и величины $\Phi(B_{2p+j})$ и $\Phi_j(B_{2p+j})$ отличаются на $O(B^{-3}_{2p+j}) = O(x^3_{2p+j})$, то выводим оценку

$$|S^{(3)}_{j,p}| = O\left(\frac{\Phi_j(B_{2p+j})}{x_{2p+j}}\right) + O(x^2_{2p+j}). \tag{40}$$

Из (37)–(40) при $j = 1, 2$ и $p \to \infty$ находим

$$|G(x_{2p+j}) - g_j(x_{2p+j})| = O\left(x_{2p+j}A^4_{2p+j} + \frac{\Phi_j(B_{2p+j})}{x_{2p+j}}\right). \tag{41}$$

Из оценки (41) и асимптотик (32) вытекает, что для доказательства (31) достаточно установить малость остаточного члена в (41) в сравнении с $v_j(x_{2p+j})$ при $x \to +0$. При $j = 1$ с учетом (23) и (36) имеем

$$G(x_{2p+1}) - g_1(x_{2p+1}) = O\left(x_{2p+1} + x_{2p+1}\left(\ln\ln\frac{1}{x_{2p+1}}\right)^4\right) = o(v_1(x_{2p+1})), \qquad x \to +0,$$

а при $j = 2$ остаточный член в (41) по порядку не превосходит

$$O(1) + (x^{-1}_{2p+2}\ln^{-3} B_{2p+2}) = O(1) + O\big(A^4_{2p+2}\exp(-3A_{2p+2})\big) = O(1),$$

но $v_2(x) \to +\infty$, $x \to +0$, следовательно, требуемое доказано. Доказательство теоремы 3 завершено.

Автор благодарит профессора С. А. Теляковского за внимание к работе и полезные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Telyakovskiĭ S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle série. 1995. V. 58 (72). P. 43–50.
[2] Теляковский С. А. К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Прилози, Одд. мат. мех. науки, МАНУ. 2000. Т. 21. №1–2. С. 47–53.
[3] Salem R. Determination de l'ordre de grandeur á l'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. V. 186. P. 1804–1806.
[4] Salem R. Essais sur les séries trigonométriques. Paris, 1940.
[5] Izumi S. Some trigonometrical series // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. №4. P. 207–209.
[6] Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. V. 10. P. 101–120.
[7] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
28.11.2002