А. Ю. Попов, Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 97–128

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm629

УДК 517.547

А. Ю. Попов

Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова

В шкале роста целых функций, задаваемой их типами относительно функций сравнения, найдены максимальные пространства сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова для классов узлов интерполяции (как произвольных комплексных, так и вещественных), определяемых последовательностью мажорант этих узлов.

Библиография: 25 названий.

Интерполяционная задача Абеля–Гончарова состоит в нахождении всех целых функций F из того или иного линейного топологического пространства $X \subset \mathscr{A}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих соотношениям

$$F^{(n)}(\lambda_n) = c_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольные допустимые для X последовательности комплексных чисел. Под $\mathscr{A}(D)$, как обычно, понимается пространство функций, аналитических в области $D \subset \mathbb{C}$, с топологией равномерной сходимости на любом компакте внутри D. Ниже будут рассматриваться различные пространства $X \subset \mathscr{A}(\mathbb{C})$, как правило, с некоторой более сильной топологией, нежели индуцированная на X из $\mathscr{A}(\mathbb{C})$.

Решение поставленной задачи обычно начинается с отыскания в определенном смысле максимальных для нее пространств сходимости и единственности. Пространством сходимости интерполяционной задачи (1) называется такое линейное подпространство $S \subset X$, что любая функция $F \in S$ представима в виде суммы интерполяционного ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\lambda_n) P_n(\lambda, z), \tag{2}$$

сходящегося в топологии X. Через $\{P_n(\lambda, z)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначена система полиномов Гончарова, соответствующих последовательности λ и задаваемых формулами [1; гл. 1] $P_0(\lambda, z) \equiv 1$,

$$P_n(\lambda, z) = P_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, z) = \int_{\lambda_0}^{z} \int_{\lambda_1}^{x_1} \cdots \int_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_1 \cdots dx_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Полиномы (3) образуют систему, биортогональную к системе функционалов

$$\left\{ \frac{d^n}{(dz)^n} \bigg|_{z=\lambda_n} \right\}_{n=0}^{\infty},$$

т.е. выполняются равенства $P_n^{(n)}(\lambda,\lambda_n) = 1$, $P_n^{(k)}(\lambda,\lambda_k) = 0$, $k \neq n$. Из формулы (3) видно, что n-й многочлен Гончарова имеет степень n по переменной z и зависит не от всей последовательности λ, а только от n первых ее элементов. Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1}$, то многочлены Гончарова являются многочленами Тейлора $P_n(\lambda_0,\lambda_0,\ldots,\lambda_0,z) = (z-\lambda_0)^n/n!$, а ряд (2) при совпадении всех узлов интерполяции становится классическим рядом Тейлора.

Пространством единственности E интерполяционной задачи (1) называется такое линейное подпространство X, что условия

$$F^{(n)}(\lambda_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad F \in E,$$

влекут за собой тождество $F(z) \equiv 0$. Из определений видно, что всякое пространство сходимости интерполяционной задачи (1) является ее пространством единственности. Обратное же утверждение, вообще говоря, неверно.

Приведем несколько известных результатов, относящихся к описанию пространств сходимости и единственности для задач (1) с последовательностями узлов интерполяции $\{\lambda_n\}$, лежащими на отрезке $[-1,1]$ и в единичном круге. Символом $[\exp,\sigma)$ обозначим множество целых функций экспоненциального типа, меньшего σ. В 1928 году С.Н. Бернштейн [2], [3] доказал, что $[\exp,\pi/4)$ является пространством единственности всех интерполяционных задач (1) с узлами $\{\lambda_n\}$, расположенными на отрезке $[-1,1]$. В то же время, целая функция $f(z) = \cos(\pi z/4) - \sin(\pi z/4)$ имеет экспоненциальный тип равный $\pi/4$, и ее n-я производная обращается в нуль в точке $(-1)^n$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, в классической шкале роста целых функций "порядок–тип" было найдено пересечение максимальных пространств единственности всех задач (1) с узлами интерполяции на отрезке $[-1,1]$.

В 1936 году И.Дж. Шёнберг [4] усилил этот результат С.Н. Бернштейна, доказав, что пространство $[\exp,\pi/4)$ с топологией $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ является пространством сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами из $[-1,1]$. Ш.С. Макинтайр в [5] уточнила теорему С.Н. Бернштейна в другом направлении. Она доказала, что $[\exp,\pi/4)$ является пространством единственности интерполяционных задач (1) с произвольной последовательностью узлов $\{\lambda_n\}$, все частичные пределы которой лежат на отрезке $[-1,1]$.

В дальнейшем много работ было посвящено интерполяционной задаче (1) с произвольными узлами внутри единичного круга и ее обобщениям. В.Л. Гончаров в [6] установил, что если $F \in [\exp, 1/(2e))$, то при условии $|\lambda_n| \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ряд (2) сходится к $F(z)$ в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$. С. Такенака в работе [7] доказал, что сходимость интерполяционного ряда (2) для таких узлов имеет место в более широком пространстве $[\exp,\ln 2)$. Впоследствии и этот результат был усилен и обобщен. Перед тем как сформулировать соответствующие утверждения, напомним несколько определений.

Определение 1. Целая функция $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ называется *функцией сравнения*, если

1) $A_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$,
2) $A_{n+1}/A_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$.

Класс всех функций сравнения обозначим через $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Целая функция $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ называется *сравнимой с* $A(z)\in\mathfrak{A}$, если существует постоянная $\tau>0$ такая, что отношение $|a(z)|/A(\tau|z|)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Нижняя грань таких чисел τ – обозначим ее $\sigma_A(a)$ – называется A-типом функции $a(z)$.

Для $A\in\mathfrak{A}$ известна теорема (полное ее доказательство имеется в [8; с. 34–38]), которая утверждает, что A-тип целой функции $a(z)$ выражается через коэффициенты рядов Маклорена $a(z)$ и $A(z)$ следующим образом:

$$\sigma_A(a)=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{A_n}\right|^{1/n}. \tag{4}$$

Множество всех целых функций, A-тип которых строго меньше заданного числа σ, будет обозначаться $[A,\sigma)$, а множество всех целых функций, A-тип которых не превосходит σ, – через $[A,\sigma]$. Заметим, что $\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}z^n/n!\in\mathfrak{A}$ и тип любой целой функции относительно $\exp z$ в смысле определения 2 совпадает с ее классическим экспоненциальным типом. Следовательно, введенное ранее обозначение $[\exp,\sigma)$ согласуется с принятым здесь для общего случая. В теории целых функций часто встречаются функции сравнения Миттаг-Леффлера $E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(1+k/\rho)$, а также $A_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/(k!)^{1/\rho}$ (очевидно, что $E_1(z)=A_1(z)=\exp z$). Об общих функциях $E_\rho(z,\mu)$ и их применениях см. монографию [9]. Нетрудно убедиться в том, что классический тип при порядке ρ функции $a(z)$, определяемый как

$$\sigma_\rho(a)=\limsup_{R\to+\infty}\Bigl(R^{-\rho}\ln\Bigl(\max_{|z|\leqslant R}|a(z)|\Bigr)\Bigr),$$

связан с ее E_ρ-типом и A_ρ-типом формулами

$$\sigma_\rho(a)=(\sigma_{E_\rho}(a))^\rho,\qquad \sigma_\rho(a)=\frac{(\sigma_{A_\rho}(a))^\rho}{\rho}.$$

Функции сравнения широко используются в качестве эталонов роста в $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ и для представления сравнимых с ними целых функций в виде интегральных преобразований (см. [1], [8]–[10]). Если $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\in\mathfrak{A}$, $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in[A,\sigma)$, то

$$a(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\sigma}A(zt)\gamma_{a,A}(t)\,dt, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{a,A}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{A_n}t^{-n-1}\in\mathscr{A}(|t|>\sigma). \tag{6}$$

Функция $\gamma_{a,A}(t)$ называется A-ассоциированной по Борелю с $a(z)$. Очевидно, что $\gamma_{a,A}(\infty)=0$. Подкласс функций, аналитических при $|t|\geqslant\sigma$ и обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке, будет обозначаться через $\mathscr{A}_0(|t|\geqslant\sigma)$. Представление (5) устанавливает изоморфизм между $[A,\sigma)$ и $\mathscr{A}_0(|t|\geqslant\sigma)$. Как известно, $\mathscr{A}_0(|t|\geqslant R)$ естественным образом отождествляется с пространством, сопряженным к $\mathscr{A}(|z|<R)$. Топология в $\mathscr{A}_0(|t|\geqslant R)$ задается равномерной сходимостью на

одной из окружностей $|t| = r < R$. Пространство $\mathscr{A}_0(|t| \geqslant R)$ с такой топологией является полным рефлексивным локально выпуклым пространством. Когда мы будем ниже говорить о топологии $[A,\sigma)$, не прибавляя к этому пояснений, всякий раз будет подразумеваться, что в $[A,\sigma)$ задана топология $\mathscr{A}^*(|t| < \sigma)$, где функция $a(z) \in [A,\sigma)$ отождествляется с ее образом $\gamma_{a,A}(t)$, задаваемым формулой (6). Известно, что последовательность функций $f_n(z)$ сходится в $[A,\sigma)$ к $f(z)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда при некотором $\alpha < \sigma$ справедлива оценка

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{|z|\leqslant R} |f_n(z)| = O(A(\alpha R)), \qquad R > 0, \tag{7}$$

и $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$. Рассматриваемая топология пространства $[A,\sigma)$ сильнее, чем топология $\mathscr{A}(\mathbb{C})$, индуцированная на $[A,\sigma)$, так как равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ на любом компакте, вообще говоря, не влечет за собой справедливости неравенств вида (7). Аналогичным образом посредством изоморфизма (5), (6) вводится топология и в пространстве $[A,\sigma]$, которое отождествляется с пространством $\mathscr{A}_0(|t| > \sigma)$, состоящем из функций $\gamma(t)$, аналитических при $|t| > \sigma$ и обращающихся в нуль на бесконечности, наделенном стандартной топологией, порождаемой равномерной сходимостью функциональных последовательностей на окружностях $|t| = \sigma + \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$. Такие топологические пространства в теории интерполяции целых функций рассматривались ранее в ряде работ (см., например, [10]). Если пространство $[A,\sigma)$, где $A \in \mathfrak{A}$, с определенной выше в нем топологией является пространством сходимости интерполяционной задачи (1), то будем говорить, что $[A,\sigma)$ – пространство A-сходимости.

В работах [1], [11] (см. также [12], [13]) было установлено существование постоянной W такой, что $[\exp, W)$ является пространством exp-сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами $|\lambda_n| \leqslant 1$, а $[\exp, W]$ не является даже пространством единственности для некоторой последовательности узлов $\{\lambda_n^*\}$ из единичного круга. Число W носит название постоянной Уиттекера. Оказалось, что $W > \ln 2$, следовательно, упомянутые выше первые в этом направлении результаты работ [6] и [7] были неточны. В настоящее время известно [13], что $0.7362 < W < 0.7378$.

В статьях М.М. Драгилева, О.П. Чухловой [14] и Ю.К. Суетина [15] было доказано[1], что для класса узлов интерполяции

$$\lambda_n = (n+1)^{-1+1/\rho}\mu_n, \qquad \rho \in (0,+\infty) \text{ фиксировано}, \quad |\mu_n| \leqslant 1, \tag{8}$$

пересечением пространств единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова (1) в шкале роста "порядок–тип" служит пространство $[A_\rho, W)$, и, более того, эти пространства являются пространствами A_ρ-сходимости для упомянутых интерполяционных задач. Иначе говоря, при условии (8) любая функция $F \in [A_\rho, W)$ представима рядом (2), сходящимся к ней в топологии этого пространства. С другой стороны, найдутся последовательность комплексных чисел $\{\mu_n^*\}$, $|\mu_n^*| \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$, и функция $f \in [A_\rho, W]$, $f(z) \not\equiv 0$, такие, что $f^{(n)}(n^{-1+1/\rho}\mu_n^*) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

[1] Первая часть формулируемого здесь результата была установлена в [14], а вторая – в [15]. При этом в работах [14], [15] рассматривалось интерполирование несколько более общими функционалами, чем $d^n/(dz)^n|_{z=\lambda_n}$.

Эта теорема стала усилением раннего результата М. М. Джрбашяна [16] о том, что для задач с узлами (8) пространством сходимости является $[A_\rho, \ln 2)$. Тем самым, был полностью решен вопрос о пространствах сходимости и единственности на классе интерполяционных задач (1) с произвольными узлами, в качестве мажоранты абсолютных величин которых выступает последовательность $x_n = (n+1)^p$, $-1 < p < +\infty$.

Приведенные результаты обобщены автором на широкий класс мажорант $\{x_n\}$ для узлов интерполяции $\{\lambda_n\}$. Поскольку С. Какейа [17] доказал, что $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ является пространством сходимости интерполяционной задачи Абеля–Гончарова с любой последовательностью узлов $\lambda_n = O(1/n)$, то на последовательность $\{x_n\}$, ограничивающую сверху $|\lambda_n|$ с точностью до множителя $1 + o(1)$, наложим требование

$$(n + 1)x_n \nearrow +\infty. \tag{9}$$

Поставим следующую задачу. Пусть дана произвольная последовательность положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (9). Через $\Lambda(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех последовательностей комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых выполняется предельное соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\lambda_n}{x_n}\right| \leqslant 1 \tag{10}$$

или, что то же самое, $|\lambda_n| \leqslant x_n(1 + o(1))$ $(n \to \infty)$. Требуется отыскать в определенном смысле максимальное пространство целых функций $V = V(\mathfrak{X})$, являющееся пространством сходимости *всех* интерполяционных задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$. Под словом “максимальное” понимается то, что даже “небольшие” в соответствующей шкале расширения $V(\mathfrak{X})$ уже не будут пространствами сходимости задачи (1) для *какой-то одной* последовательности узлов интерполяции $\{\lambda_n^*\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$. Аналогичный вопрос ставится и для пространств единственности класса интерполяционных задач Абеля–Гончарова с последовательностями узлов из $\Lambda(\mathfrak{X})$.

Сформулированная проблема решается в терминах функций сравнения, и первая трудность состоит в выборе “правильного” эталона роста. Зафиксируем последовательность $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (9), и возьмем произвольную функцию сравнения $A(z)$. Может оказаться, что пространства $[A, \sigma)$ при $\forall \sigma > 0$ будут пространствами A-сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$, либо наоборот, ни одно из указанных пространств не будет обладать этим свойством. В первом случае мы получим некоторое позитивное утверждение относительно пространств сходимости, во втором – негативное, но найти границу для роста целых функций, представимых рядами (2) для $\forall \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$, не сможем. Поэтому желательно отыскать функцию $A \in \mathfrak{A}$ такую, что пространства $[A, \sigma)$ при малых σ являются пространствами A-сходимости всех задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$, а при больших σ могут не оказаться даже пространствами единственности для какой-то одной из рассматриваемого класса интерполяционных задач. Существование такой функции сравнения является далеко не очевидным и устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (9). *Положим*

$$R_n = (n+1)x_n, \qquad A_{\mathfrak{X}}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \tag{11}$$

Тогда $A_{\mathfrak{X}}$ *– функция сравнения, а* $[A_{\mathfrak{X}},\sigma)$ *при любых* $\sigma \in (0,\ln 2]$ *являются пространствами* $A_{\mathfrak{X}}$*-сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$. *В то же время, найдутся последовательность действительных чисел* $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и функция* $f \in [A_{\mathfrak{X}},1]$, $f(z) \not\equiv 0$, *такие, что выполняются соотношения*

$$|\xi_n| \leqslant x_n, \quad f^{(n)}(\xi_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, $[A_{\mathfrak{X}},1]$ *не является пространством единственности некоторой интерполяционной задачи Абеля–Гончарова с узлами* $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$.

Замечание 1. Функции сравнения, построенные в (11) по мажоранте узлов интерполяции $\mathfrak{X}$, рассматривались В.А. Осколковым в работе [18]. Там он ограничил исследование быстро растущими последовательностями $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty. \tag{12}$$

В.А. Осколков доказал, что при условии (12) для всех интерполяционных задач (1) с узлами, лежащими в $\Lambda(\mathfrak{X})$, пространствами A-сходимости будут $[A_{\mathfrak{X}},1)$, а $[A_{\mathfrak{X}},1]$ могут не оказаться даже пространствами единственности.

Замечание 2. Из определения 1 нетрудно усмотреть, что если $\mathfrak{X}$ пробегает множество всех последовательностей, удовлетворяющих ограничению (9), то $A_{\mathfrak{X}}$ пробегает класс всех целых функций сравнения, нормированный условием $A(0)=1$. Легко видеть, что если $\mathfrak{X} = \{(n+1)^{-1+1/\rho}\}_{n=0}^{\infty}$, $0<\rho<+\infty$, то $A_{\mathfrak{X}} = A_\rho$.

Таким образом, теорема 1 является, с одной стороны, обобщением цитированного результата М.М. Джрбашяна из [16], а с другой стороны, – обобщением "негативной" части теоремы В.А. Осколкова из [18] на произвольные функции сравнения.

Теперь, когда выбран эталон роста целых функций, отражающий природу задачи, можно дать следующее

Определение 3. Пусть задана произвольная последовательность положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (9). *Постоянной сходимости* $\sigma_c(\mathfrak{X})$ класса интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$ назовем точную верхнюю грань чисел σ таких, что в топологии $[A_{\mathfrak{X}},\sigma)$ справедливы разложения (2) для любых $F \in [A_{\mathfrak{X}},\sigma)$ и $\{\lambda_n\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$. *Постоянной единственности* $\sigma_u(\mathfrak{X})$ назовем точную нижнюю грань чисел σ, для которых найдутся $f \in [A_{\mathfrak{X}},\sigma)$, $f \not\equiv 0$, и $\{\lambda_n^*\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$ такие, что $f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Другими словами, $[A_{\mathfrak{X}},\sigma)$ при любом $\sigma < \sigma_c(\mathfrak{X})$, а значит и при $\sigma = \sigma_c(\mathfrak{X})$ (см. выше определение топологии в этих пространствах), является пространством

$A_{\mathfrak{X}}$-сходимости всех задач (1) с узлами интерполяции, лежащими в $\Lambda(\mathfrak{X})$, а при любом $\sigma > \sigma_u(\mathfrak{X})$ $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ уже не будет пространством единственности какой-либо одной задачи (1) с узлами интерполяции из класса $\Lambda(\mathfrak{X})$.

Из определения 3 очевидным образом следует неравенство $\sigma_c(\mathfrak{X}) \leqslant \sigma_u(\mathfrak{X})$. Теорема 1 доказывает существование постоянных сходимости и единственности и устанавливает, что $\ln 2 \leqslant \sigma_c(\mathfrak{X}) \leqslant \sigma_u(\mathfrak{X}) \leqslant 1$. Однако найти $\sigma_c(\mathfrak{X})$ и $\sigma_u(\mathfrak{X})$ для последовательностей $\mathfrak{X}$ самого общего вида не удается. Основным результатом этой работы является теорема о совпадении постоянных сходимости и единственности при условии

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1. \tag{13}$$

В этом случае справедливо равенство $\sigma_c(\mathfrak{X}) = \sigma_u(\mathfrak{X}) = W$, где W – постоянная Уиттекера. Тем самым, получено обобщение сформулированной выше теоремы Драгилева–Чухловой–Суетина на произвольные мажоранты для узлов интерполяции, удовлетворяющие лишь условиям (9) и (13). Аналогичная задача решена и для более узких классов последовательностей

$$\Lambda_0(\mathfrak{X}) = \left\{ \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X}) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_n}{x_n} = 0 \right\}.$$

В частности, в $\Lambda_0(\mathfrak{X})$ входят все вещественные последовательности из $\Lambda(\mathfrak{X})$. Определенные таким же способом постоянные сходимости и единственности для классов $\Lambda_0(\mathfrak{X})$ оказались при условии (13) равными $\pi/4$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (9) и (13). Тогда $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ при любых $\sigma \in (0, W]$ являются пространствами $A_{\mathfrak{X}}$-сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$.*

В то же время, существуют последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n^*\}$, удовлетворяющих условию

$$|\lambda_n^*| \leqslant x_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

и функция $f \in [A_{\mathfrak{X}}, W]$, $f(z) \not\equiv 0$, такие, что $f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказан также аналог теоремы 2 для узлов интерполяции, лежащих “вблизи” действительной оси. Следующая теорема представляет собой обобщение цитированных выше теорем С. Н. Бернштейна, Ш. С. Макинтайр и И. Дж. Шёнберга.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (9) и (13). Тогда $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ при любых $\sigma \in (0, \pi/4]$ являются пространствами $A_{\mathfrak{X}}$-сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$. В то же время, существуют последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^*\}$ и функция $f \in [A_{\mathfrak{X}}, \pi/4]$, $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющие условиям*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^*(-1)^n}{x_n} = 1, \quad f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

В теоремах 2 и 3 по заданной мажоранте для $\{\lambda_n\}$ найдено пересечение максимальных пространств сходимости и единственности интерполяционных задач (1) для соответствующих классов узлов в терминах типов относительно функций сравнения. Возможна и иная постановка задачи. Для произвольной функции сравнения A требуется выделить в каком-то смысле максимальные классы узлов интерполяции, для которых пространства $[A,\sigma)$ (σ задано) будут пространствами сходимости. Из теорем 2 и 3 вытекает приводимое ниже следствие 1, решающее эту задачу для подкласса функций сравнения $\mathfrak{A}_1$, состоящего по определению из всех функций $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\in\mathfrak{A}$, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+2}A_n}{A_{n+1}^2}=1. \tag{14}$$

Следствие 1. *Пусть* $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\in\mathfrak{A}_1$, $\sigma>0$.

Тогда $[A,\sigma)$ *является пространством* A*-сходимости для задачи Абеля–Гончарова с произвольной последовательностью узлов интерполяции, удовлетворяющей одному из следующих условий* (*либо* (15), *либо* (16))

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n|\lambda_n|A_{n+1}}{A_n}\leqslant\frac{W}{\sigma}\,, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\operatorname{Im}\lambda_n)A_{n+1}}{A_n}=0\,,\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{n|\lambda_n|A_{n+1}}{A_n}\leqslant\frac{\pi}{4\sigma}\,. \tag{16}$$

С другой стороны, существуют две последовательности $\{\lambda_n\}$, *одна из которых удовлетворяет условию* (15), *а другая состоит из действительных чисел и удовлетворяет второму из условий* (16), *такие, что* $[A,\sigma]$ *не является даже пространством единственности задач* (1) *с этими узлами интерполяции.*

Таким образом, можно утверждать, что в пространствах целых функций вида $[A,\sigma)$ и $[A,\sigma]$, где $A\in\mathfrak{A}_1$, задача о сходимости интерполяционных рядов (2) и единственности решения бесконечной системы уравнений (1) на классах узлов интерполяции, определяемых "достаточно регулярными" мажорантами их модулей вида (9), (13), получила окончательное решение. В связи с этим возникает вопрос об "обширности" класса $\mathfrak{A}_1$. Дадим этому вопросу строгую формулировку. Как отмечалось выше, функции сравнения находят широкое применение в комплексном анализе как эталоны роста. Они составляют плотный класс сравнения в $\mathscr{A}(\mathbb{C})$, т.е. для любой целой функции $a(z)$, отличной от многочлена, найдется функция $A\in\mathfrak{A}$, относительно которой $a(z)$ имеет конечный и положительный A-тип (см. [19], [20]). Другими словами, класс $\mathfrak{A}$ "обслуживает" в качестве эталонов роста все множество $\mathscr{A}(\mathbb{C})$. В каком же подмножестве $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ плотен класс функций сравнения $\mathfrak{A}_1$? Иначе говоря, в каком подмножестве целых функций реально "работают" теоремы 2, 3 и следствие 1? Ответ на поставленный вопрос дает

Предложение 1. *Какова бы ни была целая функция* $a(z)$, *для которой выполнено предельное соотношение*

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{\ln\max_{|z|\leqslant R}|a(z)|}{\ln^2R}=+\infty, \tag{17}$$

найдется функция сравнения $A\in\mathfrak{A}_1$ *такая, что* A*-тип* $a(z)$ *равен* 1.

Тем самым, $\mathfrak{A}_1$ обслуживает в качестве эталонов роста все целые функции бесконечного порядка, конечного положительного порядка, а также часть целых функций нулевого порядка.

Сформулируем теперь следствие из теорем 2 и 3 для целых функций конечного и положительного порядка в классической шкале роста. Необходимые сведения об уточненных порядках изложены в [21; гл. 1]. Напомним лишь, что типом целой функции $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r) = \rho \in (0,+\infty)$, называется величина

$$\sigma(F) = \sigma_{\rho(r)}(F) = \limsup_{r\to+\infty}\Bigl(r^{-\rho(r)}\ln\max_{|z|\leqslant r}|F(z)|\Bigr),$$

которая может быть также вычислена по формуле

$$(\sigma(F)e\rho)^{1/\rho} = \limsup_{k\to\infty}\bigl(|a_k|^{1/k}v(k)\bigr), \tag{18}$$

где $v(y)$ – функция, обратная к $x^{\rho(x)}$. Определение уточненного порядка предполагает возрастание функции $x^{\rho(x)}$, следовательно, и $v(y)$ обладает тем же свойством. Поэтому

$$A_{\rho(r)}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \Bigm/ \prod_{n=1}^{k} v(n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

является функцией сравнения. Нетрудно найти асимптотику величин $-\ln A_k = \sum_{n=1}^{k}\ln v(n)$. Имеем

$$\begin{aligned} -\ln A_k = \sum_{n=1}^{k}\ln v(n) &= \int_1^k \ln v(y)\,dy + O\bigl(\ln v(k)\bigr) \\ &= k\ln v(k) - \int_1^k \frac{yv'(y)}{v(y)}\,dy + O\bigl(\ln v(k)\bigr). \end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) и известного предельного соотношения [21; гл. 1, § 13]

$$\lim_{y\to+\infty} y\frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{1}{\rho}$$

находим $(1/k)\ln(1/A_k) = \ln v(k) - 1/\rho + o(1)$ $(k\to\infty)$. Следовательно, справедлива эквивалентность $A_k^{-1/k} \sim v(k)\exp(-1/\rho)$ $(k\to\infty)$. Отсюда и из формул (4), (18) заключаем, что типы произвольной целой функции F при уточненном порядке $\rho(r)\to\rho$ $(r\to\infty)$ и относительно $A_{\rho(r)} \in \mathfrak{A}$ связаны соотношением (как и в случае $\rho(r)\equiv\rho$)

$$\sigma_{\rho(r)}(F) = \frac{(\sigma_{A_{\rho(r)}}(F))^{\rho}}{\rho}$$

или оба равны бесконечности. Через $[\rho(r),p)$, как обычно, обозначим пространство, состоящее из всех целых функций, тип которых при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше p, а через $[\rho(r),p]$ – пространство функций, тип которых не превосходит p. Ввиду равенств множеств

$$[A_{\rho(r)},\sigma) = [\rho(r),\sigma^{\rho}/\rho), \quad [A_{\rho(r)},\sigma] = [\rho(r),\sigma^{\rho}/\rho] \qquad \forall\,\sigma>0$$

считаем, что топология в $[\rho(r),\sigma^{\rho}/\rho)$ та же, что и в $[A_{\rho(r)},\sigma)$. Положив в теоремах 2 и 3 $x_n = v(n+1)/(n+1)$, $n\in\mathbb{N}_0$, получаем с учетом сказанного

Следствие 2. *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок,*

$$\lim_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho\in(0,+\infty),$$

$v(y)$ – функция, обратная к $x^{\rho(x)}$. Пусть затем $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n|\lambda_n|}{v(n)}\leqslant 1. \tag{20}$$

Тогда любая целая функция $F(z)$, тип которой при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше, чем W^ρ/ρ, представима рядом (2), сходящимся к ней в топологии $[\rho(r),W^\rho/\rho)$. Если же кроме (20) выполнено еще ограничение

$$\operatorname{Im}\lambda_n=o\biggl(\frac{v(n)}{n}\biggr)\qquad(n\to\infty),$$

то интерполяционный ряд (2) сходится в $[\rho(r),(\pi/4)^\rho/\rho)$ к любой функции F, тип которой при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше $(\pi/4)^\rho/\rho$. В то же время, найдутся последовательность комплексных чисел $\lambda^*_{n,1}$ такая, что $|\lambda^*_{n,1}|\leqslant v(n+1)/(n+1)$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$, и последовательность действительных чисел $\lambda^*_{n,2}$ с асимптотикой $\lambda^*_{n,2}\sim(-1)^n v(n)/n$ $(n\to\infty)$, а также функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ с типами при уточненном порядке $\rho(r)$, равными W^ρ/ρ и $(\pi/4)^\rho/\rho$ соответственно, для которых справедливы равенства $f_1^{(n)}(\lambda^*_{n,1})=0$, $f_2^{(n)}(\lambda^*_{n,2})=0$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$.

Следствие 2 содержит в себе цитированные выше теоремы Бернштейна–Шёнберга–Макинтайр и Драгилева–Чухловой–Суетина.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений.

Лемма 1. *Какова бы ни была последовательность $\mathfrak{X}=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (9) и (13), в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w)\prod_{j=0}^{n-1}x_j=e^w.$$

Доказательство. Дифференцируя почленно степенной ряд (11), находим

$$\begin{aligned}A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(z)&=\sum_{k=n}^{\infty}z^{k-n}\frac{k!}{(k-n)!}\prod_{j=0}^{k-1}R_j^{-1}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{z^{k-n}}{(k-n)!}\prod_{j=0}^{k-1}x_j^{-1}\\&=\biggl(\prod_{j=0}^{n-1}x_j^{-1}\biggr)\biggl(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\prod_{j=n}^{n+m-1}x_j^{-1}\biggr).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\biggl(\prod_{j=0}^{n-1}x_j\biggr)\cdot A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}\biggl(\frac{x_n}{x_{n+k}}\biggr). \tag{21}$$

Обозначим для краткости

$$b_{m,n} = \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{x_n}{x_{n+k}}\right), \qquad \varphi_n(w) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j\right) A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w) \equiv 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} w^n.$$

Ввиду (13) имеем

$$\lim_{n\to\infty} b_{m,n} = \frac{1}{m!} \qquad \forall\, m \geqslant 1. \tag{22}$$

Однако соотношения (22), вообще говоря, еще не влекут за собой сходимости в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ последовательности функций $\varphi_n(w) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} w^m$ к $\exp w$ при $n \to \infty$. Требуемое будет доказано, если установить, что последовательности $\{b_{m,n}\}$ имеют общую мажоранту $B_m = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{m,n}$, которая сама является строкой тейлоровых коэффициентов некоторой целой функции, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{B}_m = 0 \iff \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{B}_m < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{23}$$

(Модули всюду опущены, так как $b_{m,n} > 0$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$.)

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Положим $N = [2/\varepsilon]$. Очевидно равенство

$$B_m = \max(B_{m,1}, B_{m,2}), \quad \text{где} \quad B_m^{(1)} = \sup_{1\leqslant n<N} b_{m,n}, \quad B_m^{(2)} = \sup_{n\geqslant N} b_{m,n}. \tag{24}$$

Имеем

$$b_{m,n} = \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{R_n}{R_{n+k}}\right).$$

Так как последовательность R_n возрастает (может быть, нестрого), а последовательность $(n+k+1)/(n+1)$, наоборот, убывает по n при любом фиксированном k, то справедливы оценки

$$\begin{aligned} b_{n,m} &\leqslant \prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{R_n}{R_{n+k}}\right) \implies B_m^{(1)} \leqslant (R_{N-1})^m \prod_{k=0}^{m-1} R_k^{-1}, \\ b_{m,n} &\leqslant \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n+k+1}{n+1}\right), \\ B_m^{(2)} &\leqslant \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N+k+1}{N+1}\right) = \binom{N+m}{m}(N+1)^{-m}. \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда, пользуясь известным неравенством для биномиальных коэффициентов $\binom{p}{q} < 2^p$, $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant p$, находим

$$\sqrt[m]{B_m^{(2)}} < \frac{2^{1+N/m}}{N+1}, \qquad \sqrt[m]{B_m^{(1)}} \leqslant R_{N-1} \exp\left(-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \ln R_k\right). \tag{26}$$

Поскольку $\lim_{k\to+\infty} R_k = +\infty$, то и $\lim_{k\to+\infty} \ln R_k = +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{m\to+\infty}\left(m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\ln R_k\right) = +\infty. \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем соотношения

$$\limsup_{m\to\infty}\sqrt[m]{B_m^{(2)}} \leqslant \frac{2}{N+1}\,, \qquad \limsup_{m\to\infty}\sqrt[m]{B_m^{(1)}} = 0. \tag{28}$$

Соотношения (28) вместе с (24) и выбором N влекут за собой неравенство

$$\limsup_{m\to\infty}\sqrt[m]{B_m} < \varepsilon,$$

а это и требовалось установить. Этим лемма 1 полностью доказана.

Замечание 3. Соотношение (23) для общей мажоранты последовательностей $\{b_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$, было установлено без предположения (13). Условие (13) оказывается необходимым лишь для вывода равенств (22).

Теперь сформулируем следствие [10; с. 50] для пространств $[A,\sigma)$ из одной теоремы, относящейся к общей теории интерполяции целых функций.

Пусть $A(z)\in\mathfrak{A}$, $\sigma>0$, $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{A}(\mathbb{C})$, у которой есть биортогональная система функций $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, лежащая в пространстве $[A,\sigma)$. Для того чтобы любая функция $F\in[A,\sigma)$ представлялась рядом $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\ell_n(F)P_n(z)$, сходящимся к ней в топологии $[A,\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы система функций $f_n(t)=\ell_n(A(zt))$ образовывала базис в $\mathscr{A}(|t|<\sigma)$.

В нашем случае $\ell_n = d^n/(dz)^n\big|_{z=\lambda_n}$. Поэтому для того чтобы $[A,\sigma)$ было пространством A-сходимости интерполяционной задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы система функций

$$\{t^nA^{(n)}(\lambda_n t)\}_{n=0}^{\infty} \tag{29}$$

образовывала базис в $\mathscr{A}(|t|<\sigma)$.

Доказательство теоремы 1. Ввиду сказанного выше мы сначала должны доказать, что, каковы бы ни были последовательности $\mathfrak{X}=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ с условием (9) и $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}\in\Lambda(\mathfrak{X})$, система функций (29), где $A(z)=A_{\mathfrak{X}}(z)$, образует базис в $\mathscr{A}(|t|<\sigma)$ при всех $\sigma\in(0,\ln 2]$. Положим $\mu_n=\lambda_n/x_n$. Согласно обозначениям леммы 1 функции (29), умноженные на $\prod_{j=0}^{n-1}x_j$, имеют вид

$$t^n\varphi_n(\mu_n t) = t^n\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}b_{m,n}(\mu_n t)^m\right).$$

Один из признаков базисности таких систем функций в пространстве $\mathscr{A}(|t|<\sigma)$ [1; гл. 4], [22] состоит в выполнении неравенств

$$\limsup_{n\to\infty}\theta_n(r)<1 \quad \forall\, r<\sigma, \quad \text{где} \quad \theta_n(r)=\sum_{m=1}^{\infty}|b_{m,n}|(r|\mu_n|)^m. \tag{30}$$

Положим $p_n = [\sqrt[3]{n}\,]$, $a = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\mu_n|$. В лемме 1 (см. также замечание 3) было доказано существование у последовательностей $b_{m,n}$ общей мажоранты $B_m = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} b_{m,n}$, обладающей свойством (23). Следовательно, остатки рядов в (30) с номерами p_n оцениваются суммами (напомним, что $r < \ln 2 < 1$) $\sum_{m=p_n+1}^{\infty} B_m a^m$, которые представляют собой последовательность остатков ряда Тейлора некоторой целой функции в точке a и, следовательно, стремятся к нулю. Поэтому (см. (25))

$$\begin{aligned}
\theta_n(r) &= \sum_{m=1}^{p_n} b_{m,n}(|\mu_n|r)^m + o(1) \\
&< \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n|r)^m}{m!} \prod_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n+k+1}{n+1}\right) + o(1) \\
&< \prod_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{n+k+1}{n+1}\right) \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n|r)^m}{m!} + o(1) \\
&< \left(\frac{n+p_n}{n}\right)^{p_n} \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n|r)^m}{m!} + o(1) \\
&= \left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{p_n} \bigl(\exp(|\mu_n|r)-1\bigr) + o(1) \qquad (n\to\infty).
\end{aligned} \tag{31}$$

Переходя в соотношении (31) к верхнему пределу при $n\to\infty$, ввиду (10) получаем неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \theta_n(r) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \exp(|\mu_n|r) - 1 \leqslant e^r - 1 < 1 \qquad (\forall\, r < \ln 2).$$

Тем самым условие, достаточное для базисности в пространстве $\mathscr{A}(|z|<\sigma)$ $(\forall\,\sigma\in(0,\ln 2])$ системы функций (29), выполнено и первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 1 положим

$$q_k = \begin{cases} \;\;\,1, & k\equiv 0,\ k\equiv 3 \pmod 4, \\ -1, & k\equiv 1,\ k\equiv 2 \pmod 4), \end{cases} \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \tag{32}$$

По формуле (4) $A_{\mathfrak{X}}$-тип $f(z)$ равен 1. По аналогии с доказательством леммы 1 имеем

$$H_n(x) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j\right) f^{(n)}(z)\big|_{z=x_n x} = q_n + q_{n+1}x + \sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m,$$

где $b_{m,n}$ – последовательность, определенная в доказательстве леммы 1. Покажем, что при любом $n > n_0$ функция $H_n(x)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-1,1)$. Отсюда будет следовать, что при $n > n_0$ функция $f^{(n)}(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi_n \in I_n = (-x_n, x_n)$, а функция $f_1(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{n_0} f^{(n)}(0) z^n/n!$ будет иметь $A_{\mathfrak{X}}$-тип равный 1, те же нули n-ой производной, что и у $f(z)$ при $n > n_0$, а при всех $n \leqslant n_0$, очевидно, $f_1^{(n)}(0) = 0$. Тем самым, вторая часть теоремы 1 будет доказана.

Проверим сначала, что функция $h_n(x)=\sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m$ имеет при $n>n_0$ в точках ± 1 значения того же знака, что и q_{n+2}. Действительно,

$$h_n(x)=b_{2,n}x^2\biggl(q_{n+2}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{q_{n+m}x^{m-2}b_{m,n}}{b_{2,n}}\biggr).$$

А так как $q_j=\pm 1$, то заключаем, что для нашей цели достаточно установить неравенство

$$S_n=\sum_{m=3}^{\infty}\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}}<1, \qquad n>n_0. \tag{33}$$

Оценим сверху S_n тем же способом, что и $\theta_n(r)$ в первой части доказательства теоремы. Имеем

$$\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}}=\frac{2}{m!}\prod_{k=2}^{m-1}\biggl(\frac{x_n}{x_{n+k}}\biggr)=\frac{2}{m!}\prod_{k=2}^{m-1}\biggl(\frac{n+k+1}{n+1}\,\frac{R_n}{R_{n+k}}\biggr). \tag{34}$$

Учитывая монотонное неубывание $\{R_n\}$, из (34) получаем неравенство

$$\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}}\leqslant\frac{2}{m!}\prod_{k=2}^{m-1}\biggl(\frac{n+k+1}{n+1}\biggr)<\frac{2}{m!}\biggl(\frac{n+p_n}{n}\biggr)^{p_n} \qquad \forall\, m\leqslant p_n. \tag{35}$$

Из (34) видно, что последовательность $b_{m,n}/b_{2,n}$ имеет точно такую же структуру, как и $b_{m,n}$. Поэтому совершенно так же, как и в лемме 1, устанавливается наличие мажоранты $\widehat{B}_m=\sup_{n\in\mathbb{N}}(b_{m,n}/b_{2,n})$, являющейся строкой тейлоровых коэффициентов некоторой целой функции. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=p_n+1}^{\infty}\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}}=0.$$

Отсюда и из (35) выводим асимптотическое неравенство

$$\begin{aligned} S_n&<2\biggl(1+\frac{p_n}{n}\biggr)^{p_n}\sum_{m=3}^{p_n}\frac{1}{m!}+o(1)\\ &=2\bigl(1+o(1)\bigr)\sum_{m=3}^{p_n}\frac{1}{m!}+o(1)=2(e-2.5)+o(1) \qquad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Тем самым, $S_n<0.5$ при $n>n_0$ и (33) доказано. Легко видеть, что разность $H_n(x)-h_n(x)=q_n+q_{n+1}x$ обращается в нуль либо в точке $x=1$, либо в точке $x=-1$. Следовательно, либо $\operatorname{sgn} H_n(1)=\operatorname{sgn} h_n(1)=\operatorname{sgn} q_{n+2}$, либо $\operatorname{sgn} H_n(-1)=\operatorname{sgn} h_n(-1)=\operatorname{sgn} q_{n+2}$. А так как $H_n(0)=q_n$ и числа q_n и q_{n+2} всегда имеют противоположные знаки, то функция $H_n(x)$ имеет разные знаки либо на концах интервала $(0,1)$, либо на концах интервала $(-1,0)$. Поскольку функции $H_n(x)$ действительнозначны на $\mathbb{R}$, то из сказанного вытекает, что при $n>n_0$ функция $H_n(x)$ хотя бы один раз обращается в нуль на интервале $(-1,1)$, а это, как отмечалось выше, доказывает вторую часть теоремы 1.

Доказательство теорем 2 и 3. Сперва установим справедливость содержащихся в них "позитивных" утверждений, т.е. что при дополнительном условии (13) на мажоранту $\mathfrak{X}$ $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ являются пространствами сходимости всех интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$ при любых $\sigma \in (0, W]$, а если узлы взяты из $\Lambda_0(\mathfrak{X})$, то даже при любых $\sigma \in (0, \pi/4]$. Как отмечалось выше, для этого требуется доказать базисность в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$ всех систем функций (29), где $A = A_{\mathfrak{X}}$, для рассматриваемых нами $\{\lambda_n\}$ и σ.

Напомним теорему Казьмина [22] о базисности близких систем. Она гласит, что если в пространстве $\mathscr{A}(|z| < R)$ заданы две ограниченные[2] последовательности функций $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям нормировки $g_n(0) = G_n(0) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ и предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty}(g_n(z) - G_n(z)) = 0 \tag{$*$}$$

в топологии $\mathscr{A}(|z| < R)$, то либо обе системы функций

$$\{z^n g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \{z^n G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$$

образуют базис в $\mathscr{A}(|z| < R)$, либо ни одна из них не обладает этим свойством.

По лемме 1 при любом $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|w|\leqslant r} \left| \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A^{(n)}(x_n w) - \exp(w) \right| = 0. \tag{36}$$

Нетрудно убедиться в том, что каждая последовательность $\{\lambda_n\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$ может быть представлена в виде $\lambda_n = \mu_n x_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$, где $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет ограничению $\limsup_{n\to\infty} |\mu_n| \leqslant 1$. Включение же $\{\lambda_n\} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$ означает, что $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$. Применив (36) для $w = t\mu_n$, $r = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\mu_n|$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|t|\leqslant 1} \left| \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A^{(n)}(x_n \mu_n t) - \exp(\mu_n t) \right| = 0. \tag{37}$$

Положим $G_n(t) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j\right) A^{(n)}(\lambda_n t)$, $g_n(t) = \exp(\mu_n t)$. Так как $G_n(0) = 1$ (см. (21)), а последовательность функций $g_n(t)$ ограничена в любом пространстве $\mathscr{A}(|t| < R)$, то в силу (37) выполнены все условия теоремы Казьмина для произвольного $R > 0$. Следовательно, базисность системы (29) в $\mathscr{A}(|t| < R)$ равносильна базисности системы $\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ в этом же пространстве. (То, что мы нормировали систему (29), не влияет на ее базисность.)

---

[2] Семейство функций $f_\alpha(z) \in \mathscr{A}(|z| < R)$ (α пробегает некоторое множество E) является ограниченным в пространстве $\mathscr{A}(|z| < R)$, если максимумы модулей этих функций на окружностях $|z| = r$, $r < R$, имеют общую конечную (но не обязательно ограниченную на интервале $(0, R)$) мажоранту

$$M(r) = \sup_{\alpha\in E} \Bigl(\max_{|z|\leqslant r} |f_\alpha(z)| \Bigr) < +\infty \quad \forall\, r \in (0, R).$$

Таким образом, нам осталось доказать базисность в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant W$, произвольной системы вида

$$\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \limsup_{n\to\infty} |\mu_n| \leqslant 1,$$

и базисность этих же систем в $\mathscr{A}(|t| < \sigma, 0 < \sigma < \pi/4)$ при дополнительном условии $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$. Пусть α_n – ближайшая точка к μ_n в круге $|z| \leqslant 1$. Тогда системы $\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ являются близкими в смысле данного соотношения $(*)$, и, следовательно, по теореме Казьмина или обе эти системы образуют базис в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$, или ни одна из них не обладает этим свойством. Но давно известно (см. [11], [12]), что постоянная Уиттекера W как раз и является точной верхней гранью чисел σ таких, что все системы $\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$, какова бы ни была последовательность точек $\{\alpha_n\}$ из единичного круга. Первая часть теоремы 2 доказана.

Если $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$, то в качестве α_n берем ближайшую к μ_n точку отрезка $[-1, 1]$ и, применив еще раз цитированную теорему Казьмина, заключаем, что мы должны доказать базисность систем

$$\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty} \tag{38}$$

в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma < \pi/4$, где $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек отрезка $[-1, 1]$. Система (38) является биортогональной в пространствах $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$ к системе функций

$$\gamma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, 0) t^{-k-1}, \tag{39}$$

которые являются образами (43) при преобразовании Лапласа полиномов Гончарова $P_n(\{\alpha_n\}, z)$. Это легко следует из соотношений

$$\begin{aligned}\delta_n^k = P_n^{(k)}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, z)\big|_{z=\alpha_k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r>0} \frac{d^k}{(dz)^k} (e^{tz} \gamma_n(t))\bigg|_{z=\alpha_k} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r>0} t^k e^{\alpha_k t} \gamma_n(t)\, dt\end{aligned}$$

(δ_n^k – символ Кронеккера) и теоремы об общем виде линейного функционала в $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$. Но коль скоро $\mathscr{A}(|t| < \sigma)$ – рефлексивное пространство Фреше ($\forall\, \sigma > 0$), то базисность в нем какой-либо системы функций равносильна базисности биортогональной к ней системы в $\mathscr{A}^*(|t| < \sigma) = \mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$ (см. [23; гл. 6]). Следовательно, требуется установить базисность системы (39) в $\mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant \pi/4$. Этот факт, насколько мне известно, не был отмечен в публикациях. Поэтому я и привожу его доказательство, не претендуя, в то же время, на новизну. Читатель сам может убедиться в том, что все необходимое для этого было сделано в статье Шёнберга [4].

Возьмем произвольную функцию $\gamma(t) \in \mathscr{A}_0(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant \pi/4$. Через σ_0 обозначим модуль наиболее удаленной от нуля особой точки $\gamma(t)$. Ясно, что $0 \leqslant \sigma_0 < \sigma \leqslant \pi/4$ и σ_0 совпадает с экспоненциальным типом преобразования Бореля

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma} e^{zt} \gamma(t)\, dt. \tag{40}$$

Покажем, что при любом $\tau \in (\sigma_0, \sigma)$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n)\gamma_n(\lambda, t) \tag{41}$$

равномерно сходится на окружности $|t| = \tau$. Согласно теореме Шёнберга из работы [4] об оценке полиномов Гончарова с узлами $\lambda \subset [-1, 1]$ имеем

$$\sup_{\lambda \subset [-1,1]} |P_n(\lambda, 0)| \leqslant c(4/\pi)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0, \tag{42}$$

где c – абсолютная постоянная. (В [4] было получено более точное неравенство, но для наших целей достаточно и этого огрубления.) Из представления (3) вытекает, что производная

$$\frac{d^k P_n(\lambda, z)}{(dz)^k} = \int_{\lambda_k}^{z} \int_{\lambda_{k+1}}^{x_{k+1}} \cdots \int_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_{k+1} \cdots dx_n$$

является полиномом Гончарова степени $n-k$ для некоторой другой последовательности узлов интерполяции из отрезка $[-1, 1]$. Следовательно, из (42) находим

$$|P_n^{(k)}(\lambda, 0)| \leqslant c(4/\pi)^{n-k} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{43}$$

Из (43) и (41) получаем оценку

$$\begin{aligned}
\max_{|t|=\tau} |\gamma_n(\lambda, t)| &\leqslant c \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{n-k} \tau^{-k-1} \\
&= \frac{c}{\tau}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\pi}{4\tau}\right)^k = \frac{c}{\tau}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n \frac{(\pi/(4\tau))^{n+1} - 1}{\pi/(4\tau) - 1} \\
&< \frac{c}{\pi/4 - \tau}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4\tau}\right)^{n+1} < \frac{c\tau^{-n-1}}{\pi/4 - \tau}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Согласно определению величины σ_0 справедливо включение $\gamma \in \mathscr{A}_0(|t| > \sigma_0)$, поэтому в интеграле (40) можно интегрировать по любой окружности $|t| = \varkappa$ $\forall\, \varkappa > \sigma$. Ввиду сказанного имеем

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varkappa>\sigma} t^n e^{zt} \gamma(t)\, dt. \tag{45}$$

Из (45) получаем оценку

$$\max_{|z|\leqslant 1} |f^{(n)}(z)| \leqslant e^{\varkappa} \varkappa^n \max_{|t|=\varkappa} |\gamma(t)|. \tag{46}$$

А так как $\varkappa$ можно выбрать меньше, чем τ, то на основании (44) и (46) заключаем, что максимум на окружности $|t| = \tau$ n-го члена ряда (41) убывает не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Тем самым, установлена сходимость ряда (41) в топологии $\mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$. Нетрудно убедиться в том, что он сходится именно к $\gamma(t)$, поскольку его образ при преобразовании Бореля, равный $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n)P_n(\lambda,z)$, сходится в $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ к $f(z)$, как было доказано Шёнбергом в [4] для любой функции $f \in [\exp,\pi/4)$. А так как преобразование Бореля взаимно однозначно и f является образом γ, то ряд (41) сходится к $\gamma(t)$. Итак, установлено, что любая функция $\gamma \in \mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$ может быть разложена в ряд (41), сходящийся к ней в топологии этого пространства. Коэффициенты разложения в ряд по системе (39) определяются однозначно. Действительно, если $\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\gamma_n(\lambda,t)$ в $\mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant \pi/4$, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(\lambda,z)$ в $[\exp,\pi/4)$, а тем более в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$. Взяв от обеих частей k-ю производную в точке λ_k, получим $c_k = f^{(k)}(\lambda_k)$ (см. свойства полиномов Гончарова, отмеченные в начале статьи). Тем самым, базисность системы (39) в $\mathscr{A}_0(|t| \geqslant \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant \pi/4$, полностью доказана. Это завершает доказательство первой части теоремы 3.

Введем несколько необходимых в дальнейшем обозначений. Для произвольного набора из n комплексных чисел $(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ положим

$$\alpha_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1}) = P_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1},0) = \int_{\xi_0}^{0} dx_1 \int_{\xi_1}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{\xi_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_n$$

– значение в точке $z=0$ n-го интерполяционного многочлена Гончарова для узлов $(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$. Для любых $m,n \in \mathbb{N}_0$, $m<n$, и последовательности положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (9), определим величины

$$d(\mathfrak{X},m,n) = \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1}\right) \max_{|\xi_j|\leqslant x_j} |\alpha_{n-m}(\xi_m,\dots,\xi_{n-1})|.$$

Для краткости вместо $d(\mathfrak{X},0,n)$ будем писать $d_n(\mathfrak{X})$.

Лемма 2. *Если последовательность положительных чисел $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям* (9) *и* (13), *то справедливо предельное соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n(\mathfrak{X})} \geqslant \frac{1}{W}\,.$$

Доказательство. Установим сначала одно неравенство. Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $m<n$, $\mathscr{F} \subset \mathbb{C}^m$ – произвольный компакт, а $\mathscr{K} = (z_m,\dots,z_{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-m}$ представляет собой произведение звездообразного относительно точки $z_m = 0$ компакта в $\mathbb{C}$ на произвольный компакт в $\mathbb{C}^{n-m-1}$ (с координатами $z_{m+1},\dots,z_{n-1}$). Тогда

$$\begin{aligned} &\max_{(z_0,\dots,z_{m-1})\in\mathscr{F}} |\alpha_m(z_0,\dots,z_{m-1})| \cdot \max_{(z_m,\dots,z_{n-1})\in\mathscr{K}} |\alpha_{n-m}(z_m,\dots,z_{n-1})| \\ &\quad\leqslant 2 \max_{(\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1})\in\mathscr{F}\times\mathscr{K}} |\alpha_n(\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1})|. \end{aligned} \tag{47}$$

(Под декартовым произведением $\mathscr{F}\times\mathscr{K}$ понимается, как обычно, множество в $\mathbb{C}^n$, вектор из первых координат которого пробегает $\mathscr{F}$, а следующие $n-m$ координат независимо пробегают $\mathscr{K}$.) Воспользуемся следующим тождеством из работы [15]:

$$\begin{aligned} &\alpha_m(z_0,\dots,z_{m-1})\alpha_{n-m}(z_m,\dots,z_{n-1}) \\ &\quad= \alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1}) - \alpha_n(z_0,\dots,z_{m-1},0,z_{m+1},\dots,z_{n-1}). \end{aligned} \tag{48}$$

Из (48) находим

$$\begin{aligned}&|\alpha_m(z_0,\dots,z_{m-1})|\,|\alpha_{n-m}(z_m,\dots,z_{n-1})|\\&\qquad\leqslant|\alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1})|+|\alpha_n(z_0,\dots,z_{m-1},0,z_{m+1},\dots,z_{n-1})|.\end{aligned}\tag{49}$$

Очевидно, что неравенство (49) справедливо, в частности, для точек $(z_0^*,\dots,z_{m-1}^*)\in\mathscr{F}$ и $(z_m^*,\dots,z_{n-1}^*)\in\mathscr{K}$, в которых функции $|\alpha_m|$ и $|\alpha_{n-m}|$ достигают максимума на этих компактах. А так как ввиду специальной структуры $\mathscr{K}$ имеем $(0,z_{m+1}^*,\dots,z_{n-1}^*)\in\mathscr{K}$ и тем самым

$$(z_0^*,\dots,z_{n-1}^*),(z_0^*,\dots,z_{m-1}^*,0,z_{m+1}^*,\dots,z_{n-1}^*)\in\mathscr{F}\times\mathscr{K},$$

то приходим к неравенству

$$\begin{aligned}&\max_{(z_0,\dots,z_{m-1})\in\mathscr{F}}|\alpha_m(z_0,\dots,z_{m-1})|\cdot\max_{(z_m,\dots,z_{n-1})\in\mathscr{K}}|\alpha_{n-m}(z_m,\dots,z_{n-1})|\\&\quad=|\alpha_m(z_0^*,\dots,z_{m-1}^*)|\cdot|\alpha_{n-m}(z_m^*,\dots,z_{n-1}^*)|\\&\quad\leqslant|\alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1})|+|\alpha_n(z_0,\dots,z_{m-1},0,z_{m+1},\dots,z_{n-1})|\\&\quad\leqslant2\max_{(\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1})\in\mathscr{F}\times\mathscr{K}}|\alpha_n(\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1})|.\end{aligned}$$

Итак, (47) доказано. Теперь в качестве $\mathscr{F}$ и $\mathscr{K}$ возьмем произведения кругов $\mathfrak{F}=\{(z_0,\dots,z_{m-1})\subset\mathbb{C}^m\mid|z_j|\leqslant x_j,\ 0\leqslant j\leqslant m-1\}$, $\mathfrak{K}=\{(z_m,\dots,z_{n-1})\subset\mathbb{C}^{n-m}\mid|z_j|\leqslant x_j,\ m\leqslant j\leqslant n-1\}$. Умножая неравенства (47) для этих множеств на $\prod_{k=0}^{n-1}x_k^{-1}$ и распределяя этот множитель соответствующим образом, находим

$$\begin{aligned}&\biggl(\biggl(\prod_{k=0}^{m-1}x_k^{-1}\biggr)\max_{|\xi_j|\leqslant x_j,0\leqslant j\leqslant m-1}|\alpha_m(\xi_0,\dots,\xi_{m-1})|\biggr)\\&\qquad\times\biggl(\biggl(\prod_{k=m}^{n-1}x_k^{-1}\biggr)\max_{|\xi_j|\leqslant x_j,m\leqslant j\leqslant n-1}|\alpha_{n-m}(\xi_m,\dots,\xi_{n-1})|\biggr)\\&\quad\leqslant2\biggl(\prod_{k=0}^{n-1}x_k^{-1}\biggr)\max_{|\zeta_j|\leqslant x_j,0\leqslant j\leqslant n-1}|\alpha_m(\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1})|.\end{aligned}$$

Полученное неравенство с помощью введенных перед леммой 2 обозначений перепишется в виде

$$d_m(\mathfrak{X})d(\mathfrak{X},m,n)\leqslant2d_n(\mathfrak{X}).\tag{50}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}(R_{n+1}/R_n)=1$ (напомним, что $R_n=(n+1)x_n\nearrow+\infty$ при $n\to\infty$), то $\lim_{n\to\infty}(R_{n+q}/R_n)^q=1$ при любом фиксированном q. Следовательно, найдется неубывающая целозначная функция $q(n)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}q(n)=+\infty,\qquad\lim_{n\to\infty}\biggl(\frac{R_{n+q(n)}}{R_n}\biggr)^{q(n)}=1.\tag{51}$$

А так как при любом $n\in\mathbb{N}$ последовательность $(R_{n+q}/R_n)^q$ возрастает по q, то мы можем выбрать функцию q удовлетворяющей условию

$$q(n)=o\bigl(\sqrt{n}\,\bigr)\qquad(n\to\infty).\tag{52}$$

Теперь построим последовательность натуральных чисел $\{n_p\}$ по рекуррентной формуле $n_1 = 1, n_{p+1} = n_p + q(n_p)$. Для краткости обозначим $\nu_p = q(n_p)$. Из (51) и (52) заключаем, что

$$\begin{gathered} \lim_{p\to\infty} \frac{p}{n_p} = 0, \qquad \lim_{p\to\infty} \nu_p = +\infty, \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{\nu_p^2}{n_p} = 0, \\ \lim_{p\to\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p = 1}, \qquad \lim_{p\to\infty} \left(\frac{R_{n_{p+1}}}{R_{n_p}}\right)^{\nu_p} = 1. \end{gathered} \tag{53}$$

Докажем вначале неравенство

$$\liminf_{p\to\infty} \sqrt[n_p]{d_{n_p}(\mathfrak{X})} \geqslant \frac{1}{W}\,. \tag{54}$$

Последовательность $\mathfrak{X}$ считаем заданной и далее вместо $d_n(\mathfrak{X})$ и $d(\mathfrak{X}, m, n)$ будем писать соответственно d_n и $d(m, n)$. Согласно (50) при произвольном $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$d_{n_k} \cdot d(n_k, n_{k+1}) \leqslant 2 d_{n_{k+1}}.$$

Перемножая эти неравенства по k в пределах от 1 до $p-1$, находим

$$d_1 \prod_{k=1}^{p-1} d(n_k, n_{k+1}) \leqslant 2^{p-1} d_{n_p}. \tag{55}$$

Возводя обе части неравенства (55) в степень $1/n_p$, переходя к нижнему пределу и учитывая первое из соотношений (53), получаем оценку

$$\liminf_{p\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{p-1} d(n_k, n_{k+1})\right)^{1/n_p} \leqslant \liminf_{p\to\infty} (d_{n_p})^{1/n_p}. \tag{56}$$

Из определения величин $d(m, n)$ выводим очевидное в силу монотонности R_n неравенство

$$d(m, n) \geqslant \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1}\right) \max_{|\xi_j| \leqslant R_m/n} |\alpha_{n-m}(\xi_m, \dots, \xi_{n-1})|, \tag{57}$$

а однородность[3] функций α_s вместе с (57) приводит к оценке снизу

$$\begin{aligned} d(m, n) &\geqslant \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1}\right) \left(\frac{R_m}{n}\right)^{n-m} \max_{|z_j| \leqslant 1} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ &= \frac{n!}{m!} \left(\prod_{j=m}^{n-1} R_j^{-1}\right) \left(\frac{R_m}{n}\right)^{n-m} \max_{|z_j| \leqslant 1} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ &\geqslant \left(\frac{m R_m}{n R_n}\right)^{n-m} D_{n-m}, \end{aligned} \tag{58}$$

где $D_s = \max_{|z_j| \leqslant 1} |\alpha_s(z_0, \dots, z_{s-1})|$.

[3] Речь идет о тождестве $\alpha_s(\xi_0, \dots, \xi_{s-1}) = u^s \alpha_s(\xi_0/u, \dots, \xi_{s-1}/u)$, справедливом при любых $(\xi_0, \dots, \xi_{s-1}) \in \mathbb{C}^s$ и $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Полагая в (58) $m = n_k$, $n = n_{k+1}$, находим

$$d(n_k, n_{k+1}) > \left(\frac{n_k R_{n_k}}{n_{k+1} R_{n_{k+1}}}\right)^{\nu_k} D_{\nu_k}.$$

Отсюда и из (56), обозначая $(n_k/n_{k+1})^{\nu_k} = T_k$, $(R_{n_k}/R_{n_{k+1}})^{\nu_k} = T'_k$, получаем

$$\liminf_{p\to\infty}(d_{n_p})^{1/n_p} \geqslant \liminf_{p\to\infty}\left(\left(\prod_{k=1}^{p-1} D_{\nu_k}\right)^{1/n_p}\left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k\right)^{1/n_p}\right). \tag{59}$$

Докажем сейчас, что последовательность, стоящая в правой части неравенства (59) под знаком нижнего предела, в действительности имеет обычный предел, равный $1/W$. Из соотношений (53) вытекает, что $\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} T'_k = 1$. Следовательно,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k\right)^{1/p} = 1$$

и, тем более,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k\right)^{1/n_p} = 1. \tag{60}$$

В работе [12] было установлено, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{D_n} = 1/W$. Обозначим для краткости $\ell_n = (1/n)\ln D_n$. Тем самым, $\lim_{n\to\infty} \ell_n = -\ln W = \lim_{k\to\infty} \ell_{\nu_k}$, а значит,

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\nu_k}{n_p}\ell_{\nu_k} = -\ln W. \tag{61}$$

(Нетрудно убедиться в том, что $(t_{k,p})_{k,p\in\mathbb{N}}$, где $t_{k,p} = \nu_k/n_p$ при $1 \leqslant k \leqslant p-1$ и $t_{k,p} = 0$ при $k \geqslant p$, представляет из себя матрицу Тёплица.) Потенцируя соотношение (61), получаем

$$\lim_{p\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{p-1} D_{\nu_k}\right)^{1/n_p} = \frac{1}{W}\,.$$

Это вместе с (59) и (60) приводит к (54). Из (54) в силу условия $\lim_{p\to\infty} n_p/n_{p+1} = 1$ будет вытекать утверждение леммы, если установить монотонное неубывание величин d_n.

В статье [15] было показано, что

$$\alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r>0}\frac{\alpha_{n+1}(z_0,\dots,z_{n-1},w)}{w^2}\,dw. \tag{62}$$

Взяв $r = x_n$ и переходя в (62) к максимуму по $|z_j| \leqslant x_j$, получим неравенство

$$\max_{|z_j|\leqslant x_j}|\alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1})| \leqslant x_n^{-1}\max_{|z_j|\leqslant x_j}|\alpha_n(z_0,\dots,z_{n-1},z_n)|. \tag{63}$$

Умножив обе части (63) на $\prod_{j=0}^{n-1} x_j^{-1}$ и вспомнив определение d_n, приходим к неравенству $d_n \leqslant d_{n+1}$, которое и требовалось доказать. Тем самым, лемма 2 полностью доказана.

Перейдем к построению примеров, демонстрирующих точность полученных результатов. Сделаем это вначале в теореме 3. Построим функцию $f(z)$, $A_{\mathfrak{X}}$-тип которой равен $\pi/4$ и при любом целом неотрицательном n ее n-я производная обращается в нуль в точке $\lambda_n^* \sim (-1)^n x_n$ $(n \to \infty)$. Положим (см. выше (32))

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{\pi z}{4}\right)^k \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \tag{64}$$

По формуле (4) находим, что $A_{\mathfrak{X}}$-тип $f(z)$ равен $\pi/4$. При $z = 4x_n x/\pi$ имеем

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j\right) f^{(n)}(z) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left(q_n + q_{n+1}x + \sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m\right), \tag{65}$$

где $b_{m,n}$ – последовательность, определенная в доказательстве леммы 1. Ввиду (23) и наличия у последовательностей $\{b_{m,n}\}$ общей мажоранты B_m, удовлетворяющей условию (24), получаем предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j\right) f^{(n)} \frac{4x_n x}{\pi} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n - \psi_n(x)\right) = 0, \tag{66}$$

где

$$\psi_n(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{n+m} x^m}{m!} = \begin{cases} (-1)^k (\cos x - \sin x), & n = 2k, \\ (-1)^k (\cos x + \sin x), & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

а сходимость в (66) равномерна на любом компакте в $\mathbb{C}$. Рассмотрим последовательности интервалов $I_{p,0} = (\pi/4 - 1/p, \pi/4 + 1/p)$, $I_{p,1} = -I_{p,0}$, $p \in \mathbb{N}$. Из (66) и (67) заключаем, что для любого $p \in \mathbb{N}$ найдется такой номер ν_p, что функции $f^{(n)}(4x_n x/\pi)$ принимают на концах интервалов $I_{p,j}$ значения разных знаков при $n = 2\nu + j$, $\nu > \nu_p$, $j = 0, 1$. Отсюда вытекает существование у $f^{(n)}(4x_n x/\pi)$ по крайней мере одного нуля $\eta_n \in I_{p,j}$ при $n = 2\nu + j$, $j = 0, 1$, $\nu_p < \nu \leqslant \nu_{p+1}$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Тем самым $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \eta_n = \pi/4$. Из сказанного заключаем, что $f^{(n)}(z)$ имеет при любом $n > n_0$ действительный нуль λ_n^*, для последовательности которых справедлива асимптотика $\lambda_n^* \sim (-1)^n x_n$. Требуемый пример почти окончательно построен. Осталось обеспечить существование у каждой из функций $f^{(n)}(z)$ по крайней мере одного действительного нуля при $0 \leqslant n \leqslant n_0 = 2\nu_1 + 1$. Для этого (если потребуется) вместо $f(z)$ достаточно взять функцию $f_1(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n_0} f^{(k)}(0) z^k / k!$. Вычитание из целой функции полинома степени n_0 не меняет ни ее $A_{\mathfrak{X}}$-типа, ни ее производных порядка $n > n_0$. В то же время, все производные функции f_1 порядков $n \leqslant n_0$ обращаются в нуль в точке $z = 0$. Построение примера завершено, и теорема 3 полностью доказана.

Теперь завершим доказательство теоремы 2. Через K_m обозначим полидиск в $\mathbb{C}^m$, задаваемый неравенствами $K_m = \{(z_0, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \mid |z_j| \leqslant x_j, 0 \leqslant$

$j \leqslant m-1\}$, а через $\xi^{(m)} = (\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})$ – точку K_m, в которой функция $|\alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1})|$ достигает на K_m максимума. Положим

$$Q_m(z) = \frac{P_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, z)}{\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

Покажем, что последовательность полиномов (68) образует предкомпактное множество в топологическом пространстве $[A_{\mathfrak{X}}, W]$ или, что то же самое, множество $A_{\mathfrak{X}}$-ассоциированных по Борелю с $Q_m(z)$ функций

$$\gamma_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_m^{(k)}(0)}{k!\, A_k t^{k+1}} \tag{69}$$

образует предкомпактное множество в $\mathscr{A}_0(|t| > W)$. Здесь через A_k мы обозначили k-й коэффициент Тейлора функции сравнения $A_{\mathfrak{X}}$. Исходя из известного критерия Монтеля предкомпактности множеств в таких пространствах [24; гл. 6], убеждаемся в том, что для этого необходимо и достаточно доказать наличие общей мажоранты $V_k = \sup_{m \geqslant k} |Q_m^{(k)}(0)/(k! A_k)|$ последовательности лорановых коэффициентов функций (69) такой, что функция $V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k t^{-k-1}$ лежит в $\mathscr{A}_0(|t| > W)$, т.е. $\limsup_{k\to\infty} (V_k)^{1/k} \leqslant W$.

Имеем $Q_m^{(k)}(0) = P_{m-k}(\xi_k^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, 0)/\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})$, $0 \leqslant k \leqslant m$. По определению величин $d(k,m)$ справедлива оценка

$$|P_{m-k}(\xi_k^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, 0)| \leqslant \max_{|z_j| \leqslant x_j} |\alpha_{m-k}(z_k, \dots, z_{m-1})| = \biggl(\prod_{j=k}^{m-1} x_j\biggr) d(k,m), \tag{70}$$

а согласно выбору точек $\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}$ выполняется равенство

$$|\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})| = d_m \prod_{j=0}^{m-1} x_j. \tag{71}$$

Из (70), (71) и (11) находим

$$|Q_m^{(k)}(0)| \leqslant \biggl(\prod_{j=0}^{k-1} x_j^{-1}\biggr) d(k,m)/d_m = k!\, A_k d(k,m)/d_m,$$

а это вместе с (50) влечет за собой оценку

$$V_k = \sup_{k \leqslant m} \frac{|Q_m^{(k)}(0)|}{k!\, A_k} \leqslant \sup_{k \leqslant m} \frac{d(k,m)}{d_m} \leqslant \frac{2}{d_k}\,.$$

Следовательно, $\limsup_{k\to\infty} (V_k)^{1/k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} d_k^{-1/k}$, а последний предел согласно лемме 2 не превосходит W. Тем самым, предкомпактность множества функций (68) в $[A_{\mathfrak{X}}, W]$ доказана.

Из сказанного в силу полноты пространств $[A,\sigma]$ вытекает существование последовательности номеров $\{m_k\}$ и функции $f \in [A_{\mathfrak{x}}, W]$ таких, что $Q_{m_k}(z)$ сходится к $f(z)$ в топологии $[A_{\mathfrak{x}}, W]$. Заметим, что $f(0) = \lim_{k\to\infty} Q_{m_k}(0) = 1$, а значит, $f(z) \not\equiv 0$. Теперь вложим рассматриваемые выше полидиски K_n, поставив в соответствие каждой точке $(z_0,\dots,z_{n-1}) \in K_n$ бесконечную финитную последовательность $(z_0,\dots,z_{n-1},0,0,0,\dots)$, в множество $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^\infty$, состоящее из всех последовательностей комплексных чисел $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$, координаты которых удовлетворяют условиям $|\zeta_n| \leqslant x_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$. Пространство $\mathbb{C}^\infty$, как обычно, снабдим стандартной топологией произведения. Множество $\mathscr{K}$ представляет из себя компакт, поскольку является произведением счетного числа кругов. Рассмотрим определенные выше точки $\xi^{(m)} \in K_m$, координаты которых дополнены нулями до бесконечных последовательностей, как элементы $\mathscr{K}$. Поскольку компакт $\mathscr{K}$ метризуем, то из последовательности $\{\xi^{(m_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{\xi^{(\nu_s)}\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{\nu_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subset \{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, имеющую предел в топологии $\mathbb{C}^\infty$ (т.е. покоординатно сходящуюся) равный $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^\infty \in \mathscr{K}$. Итак, мы доказали существование функции f и последовательностей комплексных чисел $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ и натуральных чисел $\{\nu_s\}_{s=1}^\infty$ таких, что

$$\lim_{s\to\infty} Q_{\nu_s}(z) = f(z) \in [A_{\mathfrak{x}}, W], \qquad f(z) \not\equiv 0, \tag{72}$$

$$\lim_{s\to\infty} \xi_n^{(\nu_s)} = \eta_n, \qquad |\eta_n| \leqslant x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{73}$$

Осталось проверить, что $f^{(n)}(\eta_n) = 0$ при всех целых неотрицательных n. Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}_0$ и зафиксируем его. Напомним, что сходимость в (72) имеет место в топологии $[A_{\mathfrak{x}}, W]$, а значит, и в топологии $\mathscr{A}(\mathbb{C})$. Поэтому $Q_{\nu_s}(z)$ стремится при $s \to \infty$ к $f(z)$ равномерно в любом круге и то же самое верно относительно сходимости $Q_{\nu_s}^{(p)}(z)$ к $f^{(p)}(z)$ при каждом $p \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$f^{(n)}(\eta_n) = \lim_{s\to\infty} Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) = \lim_{s\to\infty} \bigl(Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) - Q_{\nu_s}^{(n)}(\xi_n^{(\nu_s)})\bigr). \tag{74}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $Q_m^{(n)}(\xi_n^{(m)}) = 0$ при любом $m \neq n$ ввиду того, что многочлен $Q_m(z)$ получается умножением на константу $\alpha_m^{-1}(\xi_0^{(m)},\dots,\xi_{m-1}^{(m)})$ полинома Гончарова m-го порядка для набора узлов $\xi_0^{(m)},\dots,\xi_{m-1}^{(m)}$. Теперь применим к разности, находящейся под знаком предела в (74), оценку, верную для любой целой функции $H(z)$:

$$|H(a) - H(b)| \leqslant |b-a| \max_{|z|\leqslant R} |H'(z)| \quad (\forall\, a,b \in \mathbb{C}), \quad \text{где} \quad R = \max(|a|,|b|).$$

Получим

$$|Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) - Q_{\nu_s}^{(n)}(\xi_n^{(\nu_s)})| \leqslant |\eta_n - \xi_n^{(\nu_s)}| \cdot \max_{|z|\leqslant x_n} |Q_{\nu_s}^{(n+1)}(z)|. \tag{75}$$

Поскольку производные $(n+1)$-го порядка (n фиксировано) функций $Q_{\nu_s}(z)$ ограничены в любом круге, то из (73)–(75) получаем $f^{(n)}(\eta_n) = 0$, а это полностью доказывает теорему 2.

Доказательство предложения 1 предварим одной леммой.

Лемма 3. *Пусть $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная невозрастающая и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда существует неубывающая и неограниченная последовательность положительных чисел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающая следующими свойствами*:

1) $\lim_{n\to\infty}(y_n\beta_n) = 0$,
2) $y_0 = y_1 = 1$, $y_{n+1} \leqslant y_n + 1/(4n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,
3) *последовательность* $\{y_n/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает и* $\lim_{n\to+\infty} y_n/\sqrt{n} = 0$.

Доказательство. Установим сначала, что свойство 3) следует из предыдущих. Действительно, при $n \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{y_n^2}{n} - \frac{y_{n+1}^2}{n+1} &= \frac{y_n^2 - n(y_{n+1}^2 - y_n^2)}{n^2+n} \geqslant \frac{y_n - n(y_{n+1}-y_n)(y_{n+1}+y_n)}{n^2+n} \\ &\geqslant \frac{y_n - (1/4)(y_{n+1}+y_n)}{n^2+n} = \frac{3y_n - y_{n+1}}{4n^2+4n} > 0,\end{aligned}$$

поскольку $y_{n+1} < 1 + y_n \leqslant 2y_n$ по свойству 2). Тем самым, последовательность y_n^2/n убывает, а значит, тем же свойством обладает и $\{y_n/\sqrt{n}\}$. Стремление к нулю $y_n/\sqrt{n}$ вытекает из 2):

$$\begin{aligned}y_n &= y_1 + \sum_{k=2}^{n}(y_k - y_{k-1}) \leqslant y_1 + \sum_{k=2}^{n}(4(k-1))^{-1} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{n-1}(4m)^{-1} = O(\ln n), \qquad n \geqslant 2.\end{aligned}$$

Теперь построим неубывающую и неограниченную последовательность y_n, обладающую свойствами 1) и 2). Положим $y_0 = y_1 = 1$. Согласно посылке леммы последовательность $1/\sqrt{\beta_n}$ является неубывающей и стремится к $+\infty$. Определим y_n рекуррентными соотношениями

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n, & \text{если } y_n > 1/\sqrt{\beta_n}, \\ y_n + 1/(4n) & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{76}$$

Монотонность построенной последовательности очевидна. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Предположим противное: существует постоянная $C > 0$ такая, что $y_n < C$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. В этом случае при всех достаточно больших n имеем $y \leqslant 1/\sqrt{\beta_n}$, а раз так, то $y_{n+1} = y_n + 1/(4n)$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Но тогда y_{n+1} отличается на $O(1)$ от n-ой частичной суммы гармонического ряда $(1/4)\sum_{k=1}^{n}(1/k)$, а ввиду расходимости этого ряда $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Теперь установим неравенства

$$y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \qquad \forall\, n \geqslant 2. \tag{77}$$

Снова предположим противное: множество $M = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \mid y_n \geqslant 1 + 1/\sqrt{\beta_n}\,\}$ непусто. Пусть m – наименьший его элемент. Тогда из (76) находим $y_{m-1} \geqslant y_m - (4m-4)^{-1} \geqslant y_m - 1/4 > 1/\sqrt{\beta_m}$. А так как $\{1/\sqrt{\beta_n}\,\}$ является неубывающей последовательностью, то $y_{m-1} > 1/\sqrt{\beta_{m-1}}$. Но тогда согласно (74) имеем $y_{m-1} = y_m \geqslant 1 + 1/\sqrt{\beta_m} \geqslant 1 + 1/\sqrt{\beta_{m-1}}$ и $m-1 \in M$, если только $m \neq 2$. Но m – наименьший элемент M, а значит, $m = 2$ и $y_1 > 1 + 1/\sqrt{\beta_1}$. Это противоречит выбору y_1 и тем самым доказывает неравенство (77). Из (77) немедленно следует свойство 1), а свойством 2) последовательность y_n обладает в соответствии со способом ее построения. Лемма 3 полностью доказана.

В дальнейшем будет использоваться еще одно важное свойство последовательности y_n. А именно, суммы $\sum_{k=0}^{n}(y_k)^{-1}$ допускают оценку сверху

$$\sum_{k=0}^{n}(y_k)^{-1} < 1 + \frac{5n}{y_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{78}$$

Действительно, пусть 2^p – наименьшая из целых степеней двойки, превосходящих n. Тогда, разбивая сумму $\sum_{k=0}^{2^p-1}$ на пачки, получим

$$\sum_{k=0}^{n}(y_k)^{-1} \leqslant \sum_{k=0}^{2^p-1}(y_k)^{-1} = (y_0)^{-1} + \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(y_k)^{-1} \leqslant 1 + \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{2^\nu}{y_{2^\nu}} \tag{79}$$

(сумму $\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(y_k)^{-1}$ мы оценили сверху через произведение количества слагаемых на наибольшее из них). Так как последовательность $\sqrt{n}/y_n$ возрастает, то $\max_{0\leqslant\nu\leqslant p-1}(2^{\nu/2}/y_{2^\nu}) = 2^{(p-1)/2}/y_{2^{p-1}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{2^\nu}{y_{2^\nu}} &\leqslant \frac{2^{(p-1)/2}}{y_{2^{p-1}}}\sum_{\nu=0}^{p-1}2^{\nu/2} = \frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}}\sum_{\nu=0}^{p-1}2^{(\nu+1-p)/2}\\ &< \frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j/2} < 3.5\frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}} \leqslant 3.5\frac{n}{y_{2^{p-1}}}\,.\end{aligned}$$

Используя неравенство $y_q \leqslant y_m + 1/4$, $m+1 \leqslant q \leqslant 2m$, которое немедленно вытекает из свойства 2, находим $1/y_{2^{p-1}} \leqslant 1/(y_n - 1/4) \leqslant (4/3)y_n^{-1}$. Отсюда и из (79) выводим

$$\sum_{k=0}^{n}(y_k)^{-1} < 1 + \frac{4}{3}\,\frac{3.5n}{y_n} < 1 + \frac{5n}{y_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а это и требовалось доказать.

Доказательство предложения 1. Пусть $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – произвольная целая функция, удовлетворяющая условию (17). Требуется построить функцию сравнения $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, для коэффициентов ряда Маклорена которой выполняется предельное соотношение (14) и A-тип $a(z)$ равен 1, т.е.

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{A_n}\right|^{1/n} = 1. \tag{80}$$

Из (17) следует, что $\liminf_{n\to\infty}(n^{-2}\ln|1/a_n|) = 0$[4]. (Всюду в доказательстве предложения 1 считаем, что если $a_n = 0$, то $\ln|1/a_n| = +\infty$.) Положим

$$u_n = \begin{cases} n^{-2}\ln|1/a_n|, & \text{если } n \geqslant 1,\ |a_n| < 1/e, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то при всех достаточно больших n имеем

$$u_n = n^{-2}\ln|1/a_n| \quad \text{и} \quad \liminf_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Если теперь взять $\beta_n = \min_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$, то получим, что $\{\beta_n\}$ является невозрастающей стремящейся к нулю последовательностью положительных чисел и $\beta_n = u_n$ для бесконечного количества номеров n. По последовательности $\{\beta_n\}$ построим $\{y_n\}$ согласно лемме 3 и обозначим $\varepsilon_n = 1/y_n$. Положим

$$c_n = \begin{cases} \varepsilon_n n^2, & \text{если } \ln|1/a_n| \geqslant \varepsilon_n n^2, \\ \ln|1/a_n| & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{81}$$

Из (81) и очевидного соотношения $\lim_{n\to\infty}(n^{-1}\ln|1/a_n|) = +\infty$ вытекают равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n} = +\infty. \tag{82}$$

В соответствии с (81) натуральный ряд разбивается на два множества $\mathscr{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid c_n < \varepsilon_n n^2\}$ и $\mathscr{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathscr{N}_1$. Множество $\mathscr{N}_2$ может быть и пустым, но в силу предельных соотношений

$$0 = \lim_{n\to\infty}(y_n\beta_n) = \liminf_{n\to\infty}\frac{u_n}{\varepsilon_n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{\ln|1/a_n|}{n^2\varepsilon_n}$$

получаем, что $\ln(1/|a_n|) < n^2\varepsilon_n$ для бесконечного количества номеров n, а значит, согласно (81) множество $\mathscr{N}_1$, на котором последовательности c_n и $\ln|1/a_n|$ совпадают, состоит из бесконечного числа элементов.

Наша цель состоит в том, чтобы построить на $\mathbb{R}_+$ функцию $L(x)$, обладающую следующими четырьмя свойствами.

1. График $L(x)$ является ломаной. На отрезках $[n, n+1]$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0)$ функция L линейна.

2. $L(x)$ является огибающей множества точек плоскости $\{(n, \ln|1/a_n|), n \in \mathbb{N}_0\}$, т.е. $L(n) \leqslant \ln|1/a_n|$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0)$ и равенство $L(n) = \ln|1/a_n|$ выполняется для бесконечного числа номеров n.

3. Угловые коэффициенты звеньев ломаной образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к $+\infty$.

4. Разности между угловыми коэффициентами двух последовательных звеньев ломаной L стремятся к нулю.

Убедимся в том, что этого достаточно для доказательства предложения 1. Положим $A_n = \exp(-L(n))$, $n \in \mathbb{N}_0$. Из свойств 1 и 3 следует включение $A(z) =$

[4]В противном случае $|a_n| = O(q^{-n(n+1)/2})$ при некотором $q > 1$, а тогда согласно оценкам роста функций $\sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n+1)/2}$ из [25] мы получили бы, что условие (17) не выполняется.

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$. Свойство 2 влечет за собой справедливость предельного соотношения (80). И, наконец, (14) вытекает из свойства 4.

Опишем процесс построения ломаной L и последовательности точек с абсциссами n_k, в которых ломаная L будет касаться множества E. Пусть $c_{n_0} = \min_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$, причем n_0 – наибольший из номеров, на которых достигается этот минимум. В силу (82) такой номер существует. Если $n_0 > 0$, то начальное звено ломаной L будет горизонтальным:

$$L(x) = c_{n_0}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant n_0.$$

Если же $n_0 = 0$, то построена начальная точка ломаной L: $(0, c_0)$. Теперь проведем в правую сторону горизонтальный луч из точки (n_0, c_{n_0}) и начнем его поворачивать относительно этой точки против часовой стрелки до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1) Луч коснулся множества E. 2) Тангенс угла наклона луча достиг значения $0.1\varepsilon_{n_0}$, но множество E лежит выше луча. В случае 1) в качестве n_1 берем абсциссу самой далекой точки касания[5] и полагаем $L(x) = c_{n_0} + (c_{n_1} - c_{n_0})(x - n_0)/(n_1 - n_0)$, $n_0 \leqslant x \leqslant n_1$. В случае 2) образовался луч ℓ_0, выходящий из точки (n_0, c_{n_0}) с угловым коэффициентом, равным $0.1\varepsilon_{n_0}$, и лежащий ниже множества E. Определим ломаную на отрезке $[n_0, 1+n_0]$ как часть луча ℓ_0 на этом отрезке:

$$L(x) = c_{n_0} + 0.1(x - n_0)\varepsilon_{n_0}.$$

Возьмем часть луча ℓ_0, начинающуюся в точке с абсциссой $1 + n_0$ и начнем его поворачивать относительно этой точки против часовой стрелки до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. $1'$) Повернутый луч коснулся множества E. $2'$) Тангенс угла наклона луча в процессе поворота достиг значения $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})$. В случае $1'$) в качестве n_1 берем абсциссу самой далекой точки касания (она существует в силу (82)) и полагаем

$$L(x) = L(1+n_0) + \frac{(c_{n_1} - L(1+n_0))(x - n_0 - 1)}{n_1 - n_0 - 1}, \qquad 1 + n_0 < x \leqslant n_1.$$

В случае $2'$) образовался луч ℓ_1, выходящий из точки $(1+n_0, L(1+n_0))$ с угловым коэффициентом $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})$ и лежащий ниже множества E. Тогда полагаем

$$L(x) = L(1+n_0) + 0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})(x - n_0 - 1), \qquad 1 + n_0 < x \leqslant 2 + n_0.$$

Потом берем часть луча ℓ_1, выходящую из точки $(2+n_0, L(2+n_0))$, и поворачиваем ее либо до касания множества E, либо до увеличения тангенса угла наклона до $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0} + \varepsilon_{2+n_0})$ и т. д.

Докажем, что описанный процесс не может продолжаться бесконечно, а именно на каком-то шаге этого алгоритма поворачиваемый луч ℓ_ν коснется множества E. Предположим противное. А именно, допустим, что все звенья ломаной L при $x \geqslant n_0$ имеют длину проекции на ось OX, равную 1, а угловой коэффициент звена, идущего от точки $(\nu + n_0, L(\nu + n_0))$ до $(\nu + 1 + n_0, L(\nu + 1 + n_0))$, увеличивается

[5] Она существует в силу равенства $\lim_{n\to\infty}(c_n/n) = +\infty$.

на $0.1\varepsilon_{\nu+n_0}$ по сравнению с предыдущим. При этом при всех $n > x_0$ выполнено неравенство $L(n) < c_n$ (это и означает, что ломаная лежит ниже E). В этом случае по построению получим

$$L(\nu+1+n_0) = L(\nu+n_0) + \sigma_\nu, \quad \text{где} \quad \sigma_\nu = 0.1\sum_{j=0}^{\nu}\varepsilon_{j+n_0}.$$

Отсюда в силу монотонного убывания ε_ν находим

$$L(\nu+1+n_0) \geqslant L(\nu+n_0) + 0.1(\nu+1)\varepsilon_{\nu+n_0}.$$

Тем самым,

$$L(m+n_0) \geqslant L(n_0) + 0.1\sum_{\nu=0}^{m-1}(k+1)\varepsilon_{\nu+n_0} \geqslant L(n_0) + 0.05m(m+1)\varepsilon_{m+n_0}.$$

Следовательно, $c_n > L(n) > L(n_0) + 0.05(n-n_0)^2 + \varepsilon_n$. Отсюда находим $\liminf_{n\to\infty}(n^{-2}c_n/\varepsilon_n) \geqslant 1/20$, а значит, по построению c_n и ε_n имеем

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n u_n) \geqslant \frac{1}{20}\,.$$

Но последовательность x_n строилась так, что $\liminf_{n\to\infty}(x_n u_n) = 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

В результате непрерывная кусочно-линейная функция L построена на отрезке $[0, n_1]$ и обладает следующими свойствами.

a) График функции $L(x)$ является ломаной, состоящей из нескольких звеньев (или одного звена, если $n_0 = 0$, т.е. $c_n - c_0 > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\min_{n\in\mathbb{N}}(c_n - c_0)/n \leqslant 0.1\varepsilon_0 = 0.1$), угловые коэффициенты которых возрастают. График функции $L(x)$ может иметь излом только в точках, абсциссы которых – натуральные числа.

b) Угловой коэффициент последнего звена всегда положителен, а первого – положителен или в случае $n_0 > 0$ равен нулю.

c) Если $L(x)$ имеет излом в точке с абсциссой $x = n \in \mathbb{N}$, то разность между угловыми коэффициентами звеньев, граничащих в точке $(n, L(n))$, не превосходит $0.1\varepsilon_n$, т.е. выполняются неравенства

$$L(n+1) - 2L(n) + L(n-1) \leqslant 0.1\varepsilon_n. \tag{83}$$

Если в точке $x = n$ график $L(x)$ не имеет излома, то неравенство (83) заведомо справедливо, так как в этом случае выражение, стоящее в левой части, обращается в нуль.

d) Имеет место равенство $L(n_1) = c_{n_1}$, а луч, являющийся продолжением последнего звена, лежит ниже множества $\{(n, c_n) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N},\ n > n_1\}$.

e) При всех $n \leqslant n_1$ справедливо неравенство $L(n) \leqslant c_n$.

Далее построим по индукции последовательность $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ и кусочно-линейную функцию L, принимающую значения c_{n_ν} в точках n_ν, а при остальных n удовлетворяющую неравенству $L(n) \leqslant c_n$. Основание индукции у нас имеется. Пусть теперь $k \in \mathbb{N}$ и на отрезке $[0, n_k]$ построена кусочно-линейная функция L, обладающая свойствами а)–е), в которых n_1 всюду заменено на n_k. Наша задача – построить номер $n_{k+1} > n_k$ и продолжить непрерывную кусочно-линейную функцию L на $[n_k, n_{k+1}]$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$L(m) \leqslant c_m, \quad n_k < m < n_{k+1}, \qquad L(n_{k+1}) = c_{n_{k+1}},$$
$$L(m+1) - 2L(m) + L(m-1) \leqslant 0.1\varepsilon_m, \quad n_k \leqslant m < n_{k+1},$$

и угловые коэффициенты звеньев графика $L(x)$ на отрезке $[0, n_{k+1}]$ (как и ранее на $[0, n_k]$) образовывали возрастающую последовательность. Через t_k обозначим тангенс угла наклона последнего звена ломаной.

Возьмем луч, являющийся продолжением последнего звена ломаной и начинающийся в точке $(n_k, L(n_k))$. Согласно свойству d), в котором n_1 заменено на n_k, этот луч лежит ниже множества $E_k = \{(n, c_n) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N},\ n > n_k\}$. Поворачиваем рассматриваемый луч относительно точки $(n_k, L(n_k))$ до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1) Повернутый луч коснулся множества E_k. 2) Тангенс угла наклона повернутого луча возрос в сравнении с прежним положением на $0.1\varepsilon_{n_k}$, но множество E_k лежит выше луча. В случае 1) в качестве n_{k+1} берем абсциссу самой далекой точки касания и полагаем

$$L(x) = L(n_k) + \frac{(c_{n_{k+1}} - c_{n_k})(x - n_k)}{n_{k+1} - n_k}, \qquad n_k < x \leqslant n_{k+1}.$$

(Напоминаем, что $L(n_k) = c_{n_k}$.) В случае 2) определяем $L(x)$ на отрезке $[n_k, 1+n_k]$ по формуле $L(x) = L(n_k) + (x - n_k)(t_k + 0.1\varepsilon_{n_k})$. После этого возьмем луч, выходящий из точки $(1 + n_k, L(1 + n_k))$ под углом $\operatorname{arctg}(t_k + 0.1\varepsilon_{n_k})$ с положительным направлением оси OX (он является продолжением построенного только что последнего звена ломаной), и снова будем поворачивать его против часовой стрелки, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1′) Повернутый луч коснулся множества E_k. 2′) Тангенс угла наклона повернутого луча возрос в сравнении с прежним положением на $0.1\varepsilon_{1+n_k}$, но множество E_k лежит выше луча. В случае 1′) в качестве n_{k+1} берем абсциссу самой далекой точки касания и полагаем

$$L(x) = L(1 + n_k) + \frac{(x - 1 - n_k)(c_{n_{k+1}} - L(1 + n_k))}{n_{k+1} - n_k - 1}, \qquad 1 + n_k < x \leqslant n_{k+1}.$$

В случае 2′) определяем $L(x)$ на отрезке $[1 + n_k, 2 + n_k]$ по формуле $L(x) = L(1 + n_k) + (x - n_k)(t_k + 0.1(\varepsilon_{n_k} + \varepsilon_{1+n_k}))$ и луч, являющийся продолжением последнего звена ломаной, вновь поворачиваем против часовой стрелки либо до его касания с множеством E_k, либо до увеличения тангенса угла наклона на $0.1\varepsilon_{2+n_k}$ и т.д. Описанный процесс не будет продолжаться бесконечно. На некотором шаге этого алгоритма поворачиваемый луч коснется множества E. Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством, проведенным выше в случае $k = 1$. Нужно лишь всюду n_0 заменить на n_k. Таким образом, точка n_{k+1} окажется построенной, и в силу проведенного построения свойства а)–е) ломаной L, в которых n_1 заменено на n_k, перенесутся с отрезка $[0, n_k]$ на $[0, n_{k+1}]$. Тем самым, общий шаг индукции сделан, и непрерывная кусочно-линейная функция $L(x)$ построена на всей полуоси. График $L(x)$ представляет из себя ломаную, которая в силу построения является огибающей для множества E и ее угловые коэффициенты строго возрастают. Разность между угловыми коэффициентами соседних звеньев стремится к нулю, так как при переходе от предыдущего звена к последующему мы следили за тем, чтобы тангенс угла наклона звена в точке m возрос не более чем на $0.1\varepsilon_m$, а последовательность ε_m была заранее построена стремящейся к нулю.

Из сказанного вытекает, что построенная функция L обладает свойствами $1, 3, 4$, сформулированными в начале доказательства предложения 1. А так как $L(n) \leqslant c_n$ и согласно (81) имеем $c_n \leqslant \ln|1/a_n|$, то $L(n) \leqslant \ln|1/a_n|$ и нам для проверки свойства 2 осталось установить, что уравнение $L(n) = \ln|1/a_n|$ имеет бесконечно много решений. Это верно относительно уравнения $L(n) = c_n$: ему удовлетворяют все элементы последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. По определению последовательности $\{c_n\}$ имеем $c_n = \ln|1/a_n|$, если $c_n < \varepsilon_n n^2$. Поэтому если при достаточно больших n установить неравенство $L(n) < \varepsilon_n n^2$ (оно же будет верно и в точках n_k при $k > k_0$) и поскольку $L(n_k) = c_{n_k}$, то тогда мы получим, что $L(n_k) = \ln|1/a_{n_k}|$ при всех достаточно больших k. Этим предложение 1 будет полностью доказано. Поэтому заключительным этапом его доказательства станет проверка справедливости предельного соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^{-2}L(n)}{\varepsilon_n} < 1. \tag{84}$$

С этой целью оценим $L(n)$ сверху. Имеем $L(n) = L(1) + \sum_{k=2}^{n}\big(L(k) - L(k-1)\big)$. Обозначив $\Delta_k = L(k) - L(k-1)$ и представив Δ_k в виде $\Delta_k = \Delta_1 + \sum_{m=2}^{k}(\Delta_m - \Delta_{m-1})$, учитывая равенство $\Delta_m - \Delta_{m-1} = L(m) - 2L(m-1) + L(m-2)$, находим

$$\begin{aligned} L(n) &= L(1) + \sum_{k=2}^{n}\Delta_k = L(1) + \sum_{k=2}^{n}\left(\Delta_1 + \sum_{m=2}^{k}(\Delta_m - \Delta_{m-1})\right) \\ &= O(n) + \sum_{k=2}^{n}\sum_{m=2}^{k}\big(L(m) - 2L(m-1) + L(m-2)\big). \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой сверху (83) второй разности для L, получим

$$L(n) \leqslant O(n) + 0.1\sum_{k=2}^{n}\sum_{p=1}^{k-1}\varepsilon_p. \tag{85}$$

Из (85) и (78) (напомним, что у нас $\varepsilon_p = 1/y_p$) вытекает неравенство

$$L(n) \leqslant O(n) + 0.1\sum_{k=2}^{n}(1 + 5k\varepsilon_k) = O(n) + 0.5\sum_{k=2}^{n}k\varepsilon_k.$$

Согласно утверждению 3) леммы 3 последовательность $y_k/\sqrt{k}$ убывает, а значит, $\sqrt{k}/y_k = \sqrt{k}\,\varepsilon_k$ возрастает. Следовательно, последовательность $k\varepsilon_k$ также возрастает и тем самым $\sum_{k=1}^{n}k\varepsilon_k \leqslant n^2\varepsilon_n$. Отсюда находим $L(n) \leqslant 0.5n^2\varepsilon_n + O(n)$, что и доказывает (84). Этим, как отмечалось выше, предложение 1 полностью доказано.

Список литературы

1. *Евграфов М. А.* Интерполяционная задача Абеля–Гончарова. М.: ГИТТЛ, 1954.
2. *Bernstein S. N.* Sur les fonctions réguliermеnt monotones // Atti del Congresso Internationale dei Matematici. Bologna, 3–10 Settembre. 1928. V. 2. P. 267–275.
3. *Бернштейн С. Н.* О некоторых свойствах циклически монотонных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 14. №5. С. 381–404.
4. *Schoenberg I. J.* On zeros of successives derivatives of integral functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 12–23.
5. *Macyntyre S. S.* On the zeros of successives derivatives of integral functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. №1. P. 241–251.
6. *Gontcharoff V. L.* Recherche sur les derivées successives des fonctions analytiques // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1930. V. 47. P. 1–78.
7. *Takenaka S.* On the expansion of analytic functions in generalized Taylor's series // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. (3). 1932. V. 14. №10. P. 529–542.
8. *Казьмин Ю. А.* Методы интерполяции аналитических функций и их приложения // Дисс. … докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1972.
9. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
10. *Евграфов М. А.* Основные понятия интерполяции целых фукнций // Препринт № 20. М.: Ин-т прикладн. математики АН СССР, 1975.
11. *Евграфов М. А.* Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применения к проблеме интерполяции // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 90–200.
12. *Осколков В. А.* О полноте и квазистепенной базисности систем $\{z^n f(\lambda_n z)\}$ // Матем. сб. 1989. Т. 130. №3. С. 375–384.
13. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. №1. С. 129–148.
14. *Драгилев М. М., Чухлова О. П.* О сходимости некоторых интерполяционных рядов // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4. №2. С. 287–294.
15. *Суетин Ю. К.* Совпадение постоянных единственности и сходимости некоторых интерполяционных задач // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1966. №5. С. 16–25.
16. *Джрбашян М. М.* Теорема единственности и представимости для аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. №3. С. 225–252.
17. *Kakeja S.* An extension of power series // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. (3). 1932. V. 14. №4. P. 125–138.
18. *Осколков В. А.* Некоторые базисы в пространствах регулярных функций и их применение в теории интерполяции // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). №2. С. 238–260.
19. *Казьмин Ю. А.* Сравнения функция // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. С. 160.
20. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля // Фундам. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №3. С. 817–841.
21. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
22. *Казьмин Ю. А.* Теорема о базисности близких систем и ее приложения // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №1. С. 80–88.
23. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
24. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1977.
25. *Казьмин Ю. А.* Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90. №4. С. 509–530.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
16.05.2001