А. Ю. Попов, К гипотезе Островского–Пересёлковой о нулях функций Миттаг-Леффлера, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2001, том 7, номер 1, 160–174

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 7 № 1 2001

УДК 517.5

К ГИПОТЕЗЕ ОСТРОВСКОГО–ПЕРЕСЁЛКОВОЙ О НУЛЯХ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А. Ю. Попов

Получены лучшие на сегодняшний день границы на параметр μ, в которых функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,\mu)$ при $0.4 \leqslant \rho < 0.5$ имеют только отрицательные и простые нули. Предъявлен пример, показывающий, что результат нельзя значительно усилить.

В статье [1] И.В. Островский и И.Н. Пересёлкова поставили задачу описания множества $\mathcal{W}$, состоящего по определению из всех пар положительных чисел (ρ,μ) таких, что функции Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})} \tag{1}$$

имеют в $\mathbb{C}$ только вещественные отрицательные и простые нули. В [1] было отмечено, что если $(\rho,\mu) \in \mathcal{W}$, то $\rho \leqslant 1/2$ и доказаны включения:

$$\left\{(\rho,2):\ \rho \leqslant \frac{1}{2}\right\} \subset \mathcal{W},$$

$$\{(2^{-m},\mu):\ m \in \mathbb{N},\ 0 < \mu < 2^m + 1\} \subset \mathcal{W}.$$

Распределение нулей функций (1) изучали ранее многие математики. Вещественность, отрицательность и простоту всех нулей $E_\rho(z,1)$ при $0 < \rho \le 1/2$ установил А. Виман [2], см. также [3]. Случай $\rho = 1/2$ исследовался М.М. Джрбашяном и А.Б. Нерсесяном [4], которые доказали, что $\{(1/2,\mu):\ 1 \leqslant \mu < 3\} \subset \mathcal{W}$. Вопрос об асимптотическом поведении нулей функций Миттаг-Леффлера при всех значениях параметров $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ полностью решён А.М. Седлецким в работах [5,6]. Нелишне отметить, что функции $E_\rho(z,\mu)$ находят применение в теории дифференциальных уравнений, их нули являются собственными числами некоторых краевых задач. Соответствующие ссылки приведены в [1,5].

В [1] была выдвинута гипотеза, состоящая в том, что справедливо равенство

$$\mathcal{W} = \left\{(\rho,\mu):\ 0 < \rho \leqslant \frac{1}{2},\ 0 < \mu < 1 + \frac{1}{\rho}\right\}.$$

Выясняется, что эта гипотеза неверна: проекция множества $\mathcal{W}$ на вторую координатную ось μ при любом $\rho \in [0.4, 0.5)$ оказалась шире, чем предполагалось авторами статьи [1]. Основным результатом нашей работы является

Теорема 1. *Пусть $0.4 \leqslant \rho < 0.5$. Тогда при любом $\mu \in \left(0,\ \frac{2}{\rho} - 1\right]$ все нули функции $E_\rho(z,\mu)$ вещественны, отрицательны и просты.*

Доказательство теоремы 1 базируется на теореме А.М. Седлецкого [6] о количестве нулей функций Миттаг-Леффлера в достаточно большом круге и доказанных автором в статье оценках функций (1) на луче $(-\infty, 0)$.

При $1/6 < \rho < 1/2$ справедлива следующая асимптотика [7, гл. 18]:

$$E_\rho(-x^{1/\rho}, \mu) = 2\rho x^{1-\mu} \exp(x\cos(\pi\rho)) \cos(x\sin(\pi\rho) - \rho(\mu-1)\pi) - \frac{x^{-1/\rho}}{\Gamma(\mu - \frac{1}{\rho})} + O\left(x^{-2/\rho}\right) \qquad (x \to +\infty). \tag{2}$$

В теореме 2 при $0.4 \leqslant \rho < 0.5$ получены оценки остаточного члена в (2), асимптотически худшие, но зато верные при любых $x > 0$, а не только при достаточно больших x. Обозначим

$$\omega_\rho(x, \mu) = E_\rho(-x^{1/\rho}, \mu) - 2\rho x^{1-\mu} \exp(x\cos(\pi\rho)) \cos(x\sin(\pi\rho) - \rho(\mu-1)\pi). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $0.4 \leqslant \rho < 0.5$. *Тогда при любом* $x > 0$ *справедливы следующие неравенства*:

$$|\omega_\rho(x,\mu)| < \frac{3}{2} x^{-1/\rho}, \qquad 0 < \mu \leqslant \frac{1}{\rho}, \tag{4}$$

$$|\omega_\rho(x,\lambda)| < \frac{\Gamma(1-\lambda+1/\rho)}{\pi x^{1/\rho}} \left(\frac{3}{2}\sin(\pi\lambda) + \sin\frac{\pi}{\rho}\right), \qquad 0 < \lambda \leqslant 1, \tag{5}$$

$$|\omega_\rho(x,\lambda)| < \left(\frac{1}{\rho} - 2\right) \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) x^{-1/\rho}, \qquad 1 < \lambda \leqslant \frac{1}{\rho} - 1. \tag{6}$$

Сперва мы выведем теорему 1 из теоремы 2 и упомянутой теоремы А.М. Седлецкого [6], согласно которой при любых $\rho < 0.5$ и $\mu \in \mathbb{R}$ функция $E_\rho(z, \mu)$ имеет в круге

$$|z| < \xi_n^{1/\rho}, \qquad \text{где} \quad \xi_n = \xi_n(\rho, \mu) = \pi(n + \rho(\mu - 1)) \operatorname{cosec}(\pi\rho), \tag{7}$$

при всех достаточно больших n ровно n нулей с учётом кратности. После этого приведём доказательство теоремы 2. Центральным моментом в доказательстве теоремы 1 является получение равенств

$$\operatorname{sgn} E_\rho\left(-\xi_n^{1/\rho}(\rho,\mu), \mu\right) = (-1)^n \quad \text{для любых} \quad n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

при всех рассматриваемых значениях параметров ρ и μ. Этим теорема 1 и доказывается, так как в силу действительнозначности на $\mathbb{R}$ функции $E_\rho(z, \mu)$ выясняется, что на каждом интервале $(-\xi_n^{1/\rho}, -\xi_{n-1}^{1/\rho})$ $(n \in \mathbb{N})$ (по определению считаем, что $\xi_0 = 0$, а соотношения $E_\rho(\xi_0, \mu) = E_\rho(0, \mu) = 1/\Gamma(\mu) > 0$ при $\mu > 0$ очевидны) имеется по крайней мере один нуль функции $E_\rho(z, \mu)$, а следовательно, в круге $|z| < \xi_n^{1/\rho}$ у неё не менее n различных вещественных отрицательных нулей. Тогда из теоремы А.М. Седлецкого получим, что никаких других нулей у $E_\rho(z, \mu)$ нет и все найденные нули кратности 1.

Приступим к доказательству соотношений (8). Разберём сперва наиболее простой случай $0 < \mu \leqslant 1/\rho$. Согласно (3) имеем

$$E_\rho(-\xi_n^{1/\rho}, \mu) = 2\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos(\pi\rho)) \cos(\xi_n \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + \omega_\rho(\xi_n, \mu).$$

Из (7) вытекает, что $\xi_n \sin(\pi\rho) = \pi(n + \rho(\mu - 1))$. Следовательно,

$$\cos(\xi_n \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) = \cos \pi n = (-1)^n.$$

Отсюда при всех $n \in \mathbb{N}$ находим

$$E_\rho(-\xi_n^{1/\rho}, \mu) = (-1)^n 2\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos(\pi\rho)) + \omega_\rho(\xi_n, \mu). \tag{9}$$

Из (9) и оценки (4) остаточного члена $\omega_\rho(\xi_n, \mu)$ заключаем, что для доказательства соотношений (8) при $0 < \mu \leqslant 1/\rho$ достаточно установить неравенства

$$\frac{3}{2}\,\xi_n{}^{1/\rho} < 2\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos(\pi\rho)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mu \in \left(0, \frac{1}{\rho}\right],$$

которые в силу положительности аргумента в экспоненте являются следствием более простых неравенств

$$\frac{0.75}{\rho} < \xi_n^{1+\frac{1}{\rho}-\mu}(\rho,\mu) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mu \in \left(0, \frac{1}{\rho}\right], \quad \forall \rho \in [0.4, 0.5). \tag{10}$$

Если $0 < \mu < 1$, то $\xi_n^{1+1/\rho-\mu} > \xi_n^{1/\rho} > \xi_n^2$. А так как $\xi_n \geqslant \xi_1 > \pi(1 + \rho(\mu - 1)) > \pi(1 - \rho) > \pi/2$, то нам достаточно доказать, что $3/(4\rho) < (\pi/2)^2$. При $\rho \geqslant 0.4$ это неравенство верно, так как $3/(4\rho) \leqslant 3/1.6 < 2$, а $(\pi/2)^2 > 2$. В случае $1 \leqslant \mu \leqslant 1/\rho$ мы имеем $\xi_n \geqslant \xi_1 > \pi$, $\xi_n^{1+1/\rho-\mu} \geqslant \xi_n$ и, значит, можем заменить соотношение (10) более сильным $3/(4\rho) < \pi$, которое, очевидно, верно. Таким образом, утверждение теоремы 1 для $0 < \mu \leqslant 1/\rho$ доказано.

Перейдём к рассмотрению случая $1/\rho < \mu \leqslant 2/\rho - 1$. Обозначим $\lambda = \mu - 1/\rho$. Ввиду тождества [7, гл. 18]

$$E_\rho(z,\lambda) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)} = zE_\rho(z,\mu)$$

и отрицательности $-\xi_n^{1/\rho}$ соотношения (8) принимают вид

$$\operatorname{sgn}\left[E_\rho\left(-\xi_n^{1/\rho}(\rho,\mu),\lambda\right) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\right] = (-1)^{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 1\right], \quad \forall \rho \in [0.4, 0.5).$$

Но так как $\xi_n(\rho,\mu) = \xi_{n+1}(\rho,\lambda)$, то, полагая $m = n + 1$, заключаем, что требуется доказать равенства

$$\operatorname{sgn}\left[E_\rho\left(-\xi_m^{1/\rho}(\rho,\lambda),\lambda\right) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\right] = (-1)^m \tag{11}$$

$$\forall m \geqslant 2, \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 1\right], \quad \forall \rho \in [0.4, 0.5).$$

Формула (9) убеждает нас в том, что (11) вытекает из неравенств

$$|\omega_\rho(\xi_m,\lambda)| + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho\xi_m^{1-\lambda}\exp(\xi_m\cos(\pi\rho)) \tag{12}$$

$$\forall m \geqslant 2, \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 1\right], \quad \forall \rho \in [0.4, 0.5).$$

Напомним, что здесь

$$\xi_m = \xi_m(\rho,\lambda) = \pi(m + \rho(\lambda - 1))\operatorname{cosec}(\pi\rho). \tag{13}$$

Для оценки сверху суммы $|\omega_\rho(\xi_m,\lambda)| + 1/\Gamma(\lambda)$ нам потребуется

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\min_{0\leqslant u\leqslant 1}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Gamma(u)}\right) = \max_{1\leqslant u}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Gamma(u)}\right) = \gamma,$$

где γ — постоянная Эйлера.

Доказательство. По формуле логарифмической производной $\Gamma'(z)/\Gamma(z) = \psi(z)$ гамма-функции, приведенной, например, в [8], имеем

$$\left(\frac{1}{\Gamma(u)}\right)' = -\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma^2(u)} = -\frac{\psi(u)}{\Gamma(u)} = \left(\gamma + (1-u)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+u)}\right)\frac{1}{\Gamma(u)}. \tag{14}$$

Отсюда находим $\left(1/\Gamma(u)\right)'\big|_{u=1} = \gamma$, $\left(1/\Gamma(u)\right)'\big|_{u=0} = 1$. Следовательно, нам осталось установить неравенства

$$\gamma < \left(\frac{1}{\Gamma(u)}\right)', \qquad 0 < u < 1,$$
$$\gamma > \left(\frac{1}{\Gamma(u)}\right)', \qquad 1 < u,$$

которые с учётом (14) и положительности $\Gamma(u)$ при $u > 0$ переписываются в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} &\gamma\Gamma(u) - \gamma < (1-u)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+u)}, \qquad 0 < u < 1, \\ &(1-u)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+u)} < \gamma\Gamma(u) - \gamma, \qquad 1 < u. \end{aligned} \tag{15}$$

Разделим обе части неравенств (15) на $1-u$. В первом из них знак неравенства сохранится, так как $1-u > 0$, а во втором, поскольку $1-u < 0$, изменится на противоположный. Получим следующее равносильное (15) неравенство:

$$\gamma\frac{\Gamma(u)-1}{1-u} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+u)}, \qquad u \in (0,1)\cup(1,+\infty). \tag{16}$$

Умножив на u обе части (16) и воспользовавшись тождеством $u\Gamma(u) = \Gamma(u+1)$, придём к неравенству, которое мы и должны доказать:

$$\gamma\frac{\Gamma(u+1)-u}{1-u} < 1 + u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+u)}, \qquad u \in (0,1)\cup(1,+\infty). \tag{17}$$

При $u \in (0,1)$ имеем $\Gamma(u+1) < 1$, а если $u > 1$, то $\Gamma(u+1) > 1$. Отсюда находим:

$$\frac{\Gamma(u+1)-u}{1-u} < \frac{1-u}{1-u} = 1, \qquad 0 < u < 1,$$
$$\frac{\Gamma(u+1)-u}{1-u} = \frac{u-\Gamma(u+1)}{u-1} = 1, \qquad 1 < u.$$

Следовательно, левая часть неравенства (17) меньше $\gamma < 0.6$, а правая очевидным образом превосходит 1. Этим соотношение (17) доказано, а из него, как показывают предыдущие рассуждения, вытекает лемма 1. Из леммы 1 и теоремы Лагранжа о конечных приращениях сразу же следуют необходимые для дальнейшего неравенства:

$$\frac{\gamma\sin(\pi\lambda)}{\pi} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \leqslant 1, \qquad 0 < \lambda \leqslant 1, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \leqslant 1 + \gamma(\lambda - 1), \qquad 1 < \lambda. \tag{19}$$

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть сначала $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда согласно (5) при любых $\rho \in [0.4, 0.5)$ выполняется оценка

$$|\omega_\rho(\xi_m,\lambda)| < \frac{\Gamma(1+1/\rho)}{\pi\xi_m^{1/\rho}}\left(\frac{3}{2}\sin(\pi\lambda) + \sin\frac{\pi}{\rho}\right) < \frac{\Gamma(7/2)}{\pi\xi_m^2}\left(\frac{3}{2}\sin(\pi\lambda) + \sin\frac{\pi}{\rho}\right).$$

А так как ввиду (13) при рассматриваемых значениях λ и ρ имеем

$$\xi_m(\rho,\lambda) \geqslant \pi(m-\rho)\operatorname{cosec}(\pi\rho) > \frac{3\pi}{2}\operatorname{cosec}(\pi\rho) > \frac{3\pi}{2} \qquad \forall m \geqslant 2, \tag{20}$$

то

$$\frac{1}{\xi_m^2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \leqslant \frac{4}{(3\pi)^2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{(3\pi)^2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{15}{9\pi^2} < 0.2\,.$$

Отсюда при всех $\lambda \in (0,1]$, $\rho \in [0.4, 0.5)$, $m \geqslant 2$ находим

$$|\omega_\rho(\xi_m, \lambda)| < \frac{0.3\sin(\pi\lambda)}{\pi} + \frac{0.2\sin(\frac{\pi}{\rho})}{\pi}. \tag{21}$$

Из (21) и (18) при всех $m \geqslant 2$, $\lambda \in (0,1]$, $\rho \in [0.4, 0.5)$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\lambda)} + |\omega_\rho(\xi_m, \lambda)| &< \frac{0.3\sin(\pi\lambda)}{\pi} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} + \frac{0.2\sin(\frac{\pi}{\rho})}{\pi}\\ &\leqslant 1 + \frac{0.2\sin(\pi(\frac{1}{\rho}-2))}{\pi} < 1 + 0.2\left(\frac{1}{\rho}-2\right).\end{aligned}$$

Найденная оценка даёт возможность заменить неравенство (12), которое мы должны доказать, более сильным

$$1 + 0.2\left(\frac{1}{\rho}-2\right) < \xi_m^{1-\lambda}\exp(\xi_m\cos(\pi\rho)).$$

Поскольку согласно (20) имеем $\xi_m \geqslant (3\pi/2)\operatorname{cosec}(\pi\rho)$ $(\forall m \geqslant 2)$, а значит, и $\xi_m^{1-\lambda} \geqslant 1$ при $0 < \lambda \leqslant 1$, то осталось установить, что

$$1 + 0.2\left(\frac{1}{\rho}-2\right) < \exp\left(\frac{3\pi}{2}\operatorname{ctg}(\pi\rho)\right) \qquad \forall \rho \in [0.4, 0.5). \tag{22}$$

Обозначим $\delta = 1/\rho - 2$. Тогда $\delta \in (0, 1/2]$ и при этих значениях δ имеем

$$\operatorname{ctg}(\pi\rho) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\delta}{2(\delta+2)}\right) > \frac{\pi\delta}{2(\delta+2)} > \frac{\delta}{2}. \tag{23}$$

В соответствие с (23) заменим неравенство (22) более сильным

$$1 + 0.2\delta < \exp\left(\frac{3\pi\delta}{4}\right),$$

которое очевидным образом вытекает из оценки $e^x > 1 + x$ $(\forall x > 0)$. Итак, при $0 < \lambda \leqslant 1$ неравенство (12) доказано.

Теперь рассмотрим $1 < \lambda \leqslant 1/\rho - 1$. Здесь уже ввиду (13)

$$\xi_m(\rho, \lambda) > 2\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho), \quad m \geqslant 2. \tag{24}$$

Из (6) и (24) находим

$$|\omega_\rho(\xi_m, \lambda)| < \left(\frac{1}{\rho}-2\right)\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)(2\pi)^{-2} < 0.04\left(\frac{1}{\rho}-2\right). \tag{25}$$

Из (25) и (19) получаем при $1 < \lambda \leqslant 1/\rho - 1$ и $m \geqslant 2$ следующую верхнюю оценку левой части соотношения (12), которое мы должны доказать:

$$\begin{aligned}|\omega_\rho(\xi_m, \lambda)| + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} &< 0.04\left(\frac{1}{\rho}-2\right) + 1 + \gamma(\lambda-1)\\ &\leqslant 1 + (\gamma + 0.04)\left(\frac{1}{\rho}-2\right) < 1 + 0.62\delta < \exp(0.62\delta).\end{aligned} \tag{26}$$

Теперь дадим оценку снизу для правой части (12). При $\xi > 1$ и $\lambda \in (1, 1/\rho - 1]$ имеем

$$\xi^{1-\lambda}\exp(\xi\cos(\pi\rho)) \geqslant \xi^{2-1/\rho}\exp(\xi\cos(\pi\rho)) = \xi^{-\delta}\exp(\xi\cos(\pi\rho)).$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $f(\xi) = \xi^{-\delta}\exp(\xi\cos(\pi\rho))$ строго возрастает при $\xi \geqslant \delta\sec(\pi\rho) = \delta\,\mathrm{cosec}(\pi\delta/(4+2\delta))$. А так как ввиду известного неравенства $\mathrm{cosec}(\pi\alpha/2) < 1/\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ верна оценка

$$\delta\,\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi\delta}{4+2\lambda}\right) \leqslant \delta + 2 \leqslant 2.5,$$

то ввиду (24) имеем $f(\xi) > f(2\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\delta))$, $\xi \geqslant \xi_2(\rho,\lambda)$. Из сказанного заключаем, что при рассматриваемых сейчас значениях параметра λ правая часть соотношения (12) больше

$$\frac{\exp(2\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\rho))}{(2\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\rho))^{\delta}}.$$

Отсюда и из (26) видно, что (12) будет следовать из неравенства

$$0.62\delta < 2\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\rho) - \delta\ln(2\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\rho)),$$

которое с учётом (23) можно заменить на более сильное:

$$0.62\delta + \delta\ln(2\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\rho)) < \pi\delta. \tag{27}$$

При $\rho \in [0.4, 0.5)$ имеем

$$\mathrm{cosec}(\pi\rho) \leqslant \mathrm{cosec}(0.4\pi) = \frac{1}{\cos(0.1\pi)} < 1.1.$$

Следовательно, $\ln(2\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\rho)) < 2$, и мы получаем (27). Из (27), как показывает ход предыдущих рассуждений, вытекает неравенство (12) при $\lambda \in (1, 1/\rho - 1]$, и этим теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что фактически доказано более сильное утверждение, нежели сформулированное в теореме 1.

Пусть $\rho \in [0.4, 0.5)$, $\mu \in (0, 2/\rho - 1]$. Тогда внутри каждого кругового кольца

$$\xi_{n-1}^{1/\rho}(\rho,\mu) \leqslant |z| \leqslant \xi_n^{1/\rho}(\rho,\mu),$$

начиная с $n = 1$ (полагаем $\xi_0 = 0$, $\xi_n(\rho,\mu) = \pi(n + \rho(\mu - 1))\,\mathrm{cosec}(\pi\rho))$, лежит ровно один нуль функции $E_\rho(z,\mu)$, который является простым, вещественным и отрицательным.

Теперь, как было обещано, докажем теорему 2. Воспользуемся интегральным представлением функций Миттаг-Леффлера [7, гл. 18]:

$$E_\rho(z,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(a)} \frac{w^{1/\rho-\mu}e^{w}}{w^{1/\rho} - z}\,dw. \tag{28}$$

Предполагается, что в w-плоскости сделан разрез по лучу $(-\infty, 0]$ и выбрана ветвь аргумента $\arg w \in [-\pi, \pi]$ (точки $r\exp(-\pi i)$ и $r\exp(\pi i)$ считаются различными). В соответствии с этим под нецелой степенью понимается $w^{\alpha} = \exp(\alpha\ln w) = \exp(\alpha(\ln|w| + i\arg w))$. Через $\mathcal{L}(a)$, $a > |z|^{\rho}$, обозначена петля Ханкеля, состоящая из луча $(-\infty, -a]$ нижнего берега разреза, дуги окружности $\{ae^{i\varphi} : -\pi < \varphi < \pi\}$ и луча $(-\infty, -a]$ верхнего берега разреза. Полагая $z = -x^{1/\rho}$ и делая в интеграле (28) замену переменного $z = \zeta x$, получаем формулу

$$E_\rho(-x^{1/\rho},\mu) = \frac{x^{1-\mu}}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(a')} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu}\exp(\zeta x)\,d\zeta}{\zeta^{1/\rho}+1}, \qquad a' > 1. \tag{29}$$

Внутри контура $\mathcal{L}(a')$ подынтегральная функция имеет лишь два простых полюса в точках $\zeta = \exp(\pm\pi i\rho)$, а сумма вычетов в них равна

$$\begin{aligned} S_\rho &= \operatorname{Res} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu}\exp(\zeta x)}{\zeta^{1/\rho}+1}\Big|_{\zeta=\exp(\pi i\rho)} + \operatorname{Res} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu}\exp(\zeta x)}{\zeta^{1/\rho}+1}\Big|_{\zeta=\exp(-\pi i\rho)} \\ &= 2\mathrm{Re}\, \frac{\exp(\pi i\rho(1/\rho-\mu))\exp(x\exp(\pi i\rho))}{\frac{d}{d\zeta}(\zeta^{1/\rho}+1)\big|_{\zeta=\exp(\pi i\rho)}} \\ &= 2\rho\exp(x\cos(\pi\rho))\cos(x\sin(\pi\rho)-\pi\rho(\mu-1)). \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, по теореме Коши о вычетах в (29) можно перейти к интегрированию по петлям $\mathcal{L}(b)$ при любом $b \in (0,1)$, добавив к интегралу сумму вычетов $S_\rho(x,\mu)$. Устремляя b к нулю, получаем в пределе контур $\mathcal{L}_0$, являющийся объединением нижнего и верхнего берегов разреза комплексной плоскости по лучу $(-\infty, 0]$. Предельный переход при интегрировании к такому контуру законен при $\mu \in (0, 1/\rho]$, поскольку подынтегральная функция, доопределённая в точке $\zeta = 0$ нулём при $0 < \mu < 1/\rho$ и единицей при $\mu = 1/\rho$, является непрерывной на множестве $\{\zeta = re^{i\varphi} : r \geqslant 0, -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ (напоминаем, что точки $r\exp(-\pi i)$ и $r\exp(\pi i)$ $(\forall r > 0)$ находятся на разных берегах разреза и не отождествляются). Из сказанного вытекает представление

$$E_\rho(-x^{1/\rho},\mu) = x^{1-\mu}S_\rho(x,\mu) + \omega_\rho(x,\mu), \qquad 0 < \mu \leqslant \frac{1}{\rho}, \quad x > 0,$$

где функция $S_\rho(x,\mu)$ найдена в (30),

$$\omega_\rho(x,\mu) = x^{1-\mu}J_\rho(x,\mu), \tag{31}$$

а $J_\rho(x,\mu)$ является суммой интегралов от функции

$$\frac{\zeta^{1/\rho-\mu}}{2\pi i(1+\zeta^{1/\rho})}\exp(\zeta x)$$

по нижнему и верхнему берегам разреза $(-\infty, 0]$. Запишем $J_\rho(x,\mu)$ в виде интеграла по лучу $[0,+\infty)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_\rho(x,\mu) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{0} \frac{\left(re^{-\pi i}\right)^{1/\rho-\mu} e^{-xr}\,d(-r)}{1+\left(re^{-\pi i}\right)^{1/\rho}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty} \frac{\left(re^{\pi i}\right)^{1/\rho-\mu} e^{-xr}\,d(-r)}{1+\left(re^{\pi i}\right)^{1/\rho}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} r^{1/\rho-\mu}e^{-xr}\left(\frac{\exp(\pi i(\mu-\frac{1}{\rho}))}{1+r^{1/\rho}\exp(-\frac{\pi i}{\rho})} - \frac{\exp(\pi i(\frac{1}{\rho}-\mu))}{1+r^{\frac{1}{\rho}}\exp(\frac{\pi i}{\rho})}\right)dr \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} r^{1/\rho-\mu}e^{-xr}\frac{\left(\exp(\pi i(\mu-\frac{1}{\rho}))-\exp(-\pi i(\mu-\frac{1}{\rho}))\right)+r^{1/\rho}\left(\exp(\pi i\mu)-\exp(-\pi i\mu)\right)}{1+2r^{1/\rho}\cos(\frac{\pi}{\rho})+r^{2/\rho}}\,dr. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая $1/\rho = \alpha$, находим

$$J_\rho(x,\mu) = \frac{\sin(\pi(\mu-\alpha))}{\pi}I_{1,\rho}(x,\mu) + \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}I_{2,\rho}(x,\mu), \tag{32}$$

где

$$I_{1,\rho}(x,\mu)=\int\limits_0^\infty \frac{r^{\alpha-\mu}e^{-xr}\,dr}{1+2r^\alpha\cos(\pi\alpha)+r^{2\alpha}},$$
$$I_{2,\rho}(x,\mu)=\int\limits_0^\infty \frac{r^{\alpha-\mu}e^{-xr}\,dr}{r^{-\alpha}+2\cos(\pi\alpha)+r^{\alpha}}. \tag{33}$$

Так как $\alpha\in(2,2.5]$, то $\cos(\pi\alpha)\geqslant 0$ и подынтегральные функции в (33) положительны при любом $r>0$. Следовательно,

$$0<I_{1,\rho}(x,\mu)\leqslant\int\limits_0^\infty \frac{r^{\alpha-\mu}e^{-xr}}{1+r^{2\alpha}}\,dr,$$

$$0<I_{2,\rho}(x,\mu)\leqslant\int\limits_0^\infty \frac{r^{\alpha-\mu}e^{-xr}}{r^{-\alpha}+r^{\alpha}}\,dr.$$

Оценив снизу знаменатели подынтегральных функций $1+r^{2\alpha}\geqslant 1$, $r^{-\alpha}+r^\alpha\geqslant 2$, приходим к неравенствам

$$0<I_{1,\rho}(x,\mu)<\int\limits_0^\infty r^{\alpha-\mu}e^{-xr}\,dr=x^{\mu-1-\alpha}\Gamma(\alpha+1-\mu),$$
$$0<I_{2,\rho}(x,\mu)<0.5\int\limits_0^\infty r^{\alpha-\mu}e^{-xr}\,dr=0.5x^{\mu-1-\alpha}\Gamma(\alpha+1-\mu). \tag{34}$$

Из (31), (32) и (33) находим

$$|\omega_\rho(x,\mu)|<\frac{1}{\pi x^\alpha}\Gamma(\alpha+1-\mu)\sigma(\rho,\mu), \tag{35}$$

где $\sigma(\rho,\mu)=|\sin(\pi(\mu-\alpha))|+(1/2)|\sin(\pi\mu)|$. Отсюда сразу же получаем оценку

$$\sigma(\rho,\mu)\leqslant 1.5|\sin(\pi\mu)|+|\sin(\pi\alpha)|. \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает (5), так как при $\mu=\lambda\in(0,1]$ и $\alpha\in(2,2.5]$ функции, стоящие под знаком модуля, неотрицательны. Для получения неравенства (4) дадим иную оценку $\sigma(\rho,\mu)$. Обозначив

$$\varkappa_1=\operatorname{sgn}\sin(\pi(\mu-\alpha)),\qquad \varkappa_2=\operatorname{sgn}\sin(\pi\mu),$$

получим

$$\begin{aligned}\sigma(\rho,\mu)&=\varkappa_1\sin(\pi(\mu-\alpha))+0.5\varkappa_2\sin(\pi\mu)\\&=\varkappa_1(\sin(\pi\mu)\cos(\pi\alpha)-\sin(\pi\alpha)\cos(\pi\mu))+0.5\varkappa_2\sin(\pi\mu)\\&=-\varkappa_1\sin(\pi\alpha)\cos(\pi\mu)+(0.5\varkappa_2+\varkappa_1\cos(\pi\alpha))\sin(\pi\mu).\end{aligned}$$

Отсюда и из известного неравенства $|a\cos\varphi+b\sin\varphi|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi\in\mathbb{R}$, выводим оценку

$$\begin{aligned}\sigma(\rho,\mu)&\leqslant\sqrt{\sin^2(\pi\alpha)+(0.5\varkappa_2+\varkappa_1\cos(\pi\alpha))^2}\\&=\sqrt{\sin^2(\pi\alpha)+\tfrac14\pm\cos(\pi\alpha)+\cos^2(\pi\alpha)}\\&=\sqrt{\tfrac54\pm\cos(\pi\alpha)}\leqslant\sqrt{\tfrac54+\cos(\pi\alpha)}.\end{aligned} \tag{37}$$

Из (35) и (37) видно, что для получения (4) осталось доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\pi\alpha)}\,\Gamma(\alpha+1)<\frac{3\pi}{2},\qquad 2<\alpha\leqslant 2.5. \tag{38}$$

Положим $\beta=2-\alpha$. Тогда неравенство (38) перепишется в виде

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\pi\beta)}\,\Gamma(\beta+3)<\pi,\qquad 0<\beta\leqslant 0.5.$$

Если $0<\beta\leqslant 1/3$, то

$$\Gamma(\beta+3)=(\beta+2)(\beta+1)\Gamma(\beta+1)<(\beta+2)(\beta+1)\leqslant\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=3+\frac{1}{9}<\pi,$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\pi\beta)}\leqslant 1,$$

и требуемое доказано. Если же $1/3<\beta\leqslant 1/2$, то

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\pi\beta)}\leqslant 1\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{7}{9}}<0.9,$$

$$\Gamma(\beta+3)\leqslant\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}<3.4.$$

Следовательно, левая часть (38) меньше $0.9\cdot 3.4<3.1$, и цель достигнута. Таким образом, оценка (4) получена. Для доказательства (6) заметим, что при $\mu=\lambda\in(1,1/\rho-1]$ функции $\sin(\pi(\lambda-\alpha))$ и $\sin(\pi\lambda)$ имеют разные знаки. Действительно, положим $\theta=\lambda-1$. Тогда $0<\theta\leqslant\alpha-2=\beta\leqslant 0.5$ и

$$\sin(\pi(\lambda-\alpha))=\sin(\pi(1+\theta-2-\beta))=\sin(\pi(\beta-\theta))\geqslant 0,$$
$$\sin(\pi\lambda)=-\sin(\pi\theta)<0.$$

Из сказанного, а также из соотношений (32) и (34) при $\lambda\in(1,1/\rho-1]$ вытекает оценка

$$\begin{aligned}|J_\rho(x,\lambda)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\max\left(|\sin(\pi(\lambda-\alpha))|I_{1,\rho}(x,\lambda),\frac{1}{2}|\sin(\pi\lambda)|I_{2,\rho}(x,\lambda)\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\max\left(\sin(\pi(\beta-\theta))I_{1,\rho}(x,\lambda),\frac{1}{2}\sin(\pi\theta)I_{2,\rho}(x,\lambda)\right)\\ &< \frac{x^{\lambda-1-\alpha}}{\pi}\Gamma(\alpha+1-\lambda)\max\left(\sin(\pi(\beta-\theta)),\frac{1}{2}\sin(\pi\theta)\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{\lambda\in(1,1/\rho-1]}|J_\rho(x,\lambda)x^{1-\lambda}|\leqslant\frac{1}{\pi}x^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin(\pi\beta). \tag{39}$$

Из (39) и (31) при всех $\lambda\in(1,1/\rho-1]$ и $\rho\in[0.4,0.5)$ получаем

$$|\omega_\rho(x,\lambda)|<\beta\Gamma(\alpha)x^{-\alpha}=\left(\frac{1}{\rho}-2\right)\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)x^{-1/\rho},$$

а это и требовалось доказать. Теорема 2 полностью доказана.

В заключительной части статьи обсудим вопрос о точности теоремы 1. Анализ её доказательства наводит на мысль, что при $\rho\in[0.4,0.5)$ границу для значений μ, при которых все нули $E_\rho(z,\mu)$ вещественны, отрицательны и просты, можно ещё увеличить. Используя введенное ранее обозначение $\beta = 1/\rho - 2$, мы видим, что согласно теореме 1 при

$$0.4 \leqslant \rho < 0.5, \qquad 0 < \mu \leqslant 3 + 2\beta \tag{40}$$

все нули $E_\rho(z,\mu)$ вещественны, отрицательны и просты (в [1] справедливость этого утверждения предполагалась только лишь при $0 < \mu < 3+\beta$). Оказывается, что существенно расширить указанную в (40) область изменения μ из теоремы 1 при ρ, близких к 0.5, все же нельзя.

Теорема 3. *Пусть* $0.49 \leqslant \rho < 0.5$. *Тогда функция* $E_\rho(z, 3+3.5\beta)$ *имеет два простых нуля, не лежащих на действительной оси, а все остальные её нули вещественны, отрицательны и просты.*

Доказательство. Обозначим $\lambda = 1 + 2.5\beta$,

$$\xi_n = \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}(n + 2.5\beta\rho), \qquad \eta = \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}(3.5 + 2.5\beta\rho)$$

и убедимся сперва в том, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить справедливость соотношений

$$E_\rho(-x^{1/\rho}, \lambda) < \frac{1}{\Gamma(\lambda)}, \qquad 2 \leqslant x \leqslant \eta, \tag{41}$$

$$\operatorname{sgn}\left(E_\rho(-\xi_n^{1/\rho}, \lambda) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\right) = (-1)^n \qquad \forall n \geqslant 4. \tag{42}$$

Действительно, ввиду тождества $E_\rho(z,\lambda) - 1/\Gamma(\lambda) = zE_\rho(z, \lambda + 1/\rho)$ из (42) и (41) получим, что функция $E_\rho(z, 3 + 3.5\delta) \equiv E_\rho(z, \lambda + 1/\rho)$ на концах интервалов

$$(-\xi_4^{1/\rho}, -\eta^{1/\rho}), \qquad (-\xi_{n+1}^{1/\rho}, -\xi_n^{1/\rho}), \qquad n \geqslant 4, \tag{43}$$

принимает значения разных знаков, а так как она действительнозначна на $\mathbb{R}$, то у неё на каждом из интервалов (43) имеется по крайней мере один нуль. Следовательно, в кругах $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \xi_n^{1/\rho}\}$ $(\forall n \geqslant 4)$ рассматриваемая функция имеет не менее $n-3$ различных вещественных отрицательных нулей. Всего же в K_n при достаточно больших n число нулей $E_\rho(z, \lambda + 1/\rho)$ согласно цитировавшейся в начале статьи теореме А.М. Седлецкого равно $n-1$. Тем самым нам осталось доказать, что в круге $|z| < \eta^{1/\rho}$ есть два нуля рассматриваемой функции, но они не вещественны.

В полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ рассмотрим функции (как обычно, под нецелой степенью w^τ здесь понимается $\exp(\tau \ln w)$ и выбирается главная ветвь логарифма)

$$F_\rho(w) = 2\rho w^{1-\lambda} \exp(w \cos(\pi\rho)) \cos(w \sin(\pi\rho) - 2.5\pi\rho\beta) + \omega_\rho(w, \lambda),$$

где $\omega_\rho(w,\lambda) = w^{1-\lambda} J_\rho(w,\lambda)$, а функция $J_\rho(w,\lambda)$ задаётся формулами (32) и (33). Легко видеть, что функция $J_\rho(w,\lambda)$, а вместе с ней и $F_\rho(w)$ аналитичны при $\operatorname{Re} w > 0$. На основании этого тождество $F_\rho(w) = E_\rho(-w^{1/\rho}, \lambda)$, установленное в доказательстве теоремы 2 при $w \in (0, +\infty)$, оказывается справедливым во всей правой полуплоскости. Из сказанного заключаем, что уравнение $E_\rho(z, \lambda + 1/\rho) = 0$ в круге $|z| < \eta^{1/\rho}$ равносильно уравнению $F_\rho(w) = 1/\Gamma(\lambda)$ в открытом секторе $S_\rho = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < \eta,\ |\arg w| < \pi\rho\}$.[1] Существование его двух корней мы сейчас и докажем. Определим прямоугольник

$$\Pi_\rho = \{w = x + iy : \ \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_3,\ |y| \leqslant 0.6\pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)\}.$$

[1] Мы полагаем $z = -w^{1/\rho}$ и учитываем, что открытый угол $|\arg w| < \pi\rho$ взаимно однозначно отображается на $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ в z-плоскости, а $E_\rho(z,\mu)$ при $\mu > 0$ на $[0, +\infty)$ принимает только положительные значения.

Он целиком лежит в секторе S_ρ, поскольку

$$\max_{w\in\Pi_\rho}|w| = \sqrt{\xi_3^2 + (0.6\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho))^2} = \pi\operatorname{cosec}(\pi\rho)\sqrt{(3+2.5\rho\beta)^2+(0.6)^2}$$

$$\leqslant \pi\operatorname{cosec}(\pi\rho)\sqrt{(3.05)^2+0.36} < 3.11\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho), \tag{44}$$

$$\max_{w\in\Pi_\rho}|\arg w| = \operatorname{arctg}\left(\frac{0.6\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho)}{\xi_1}\right) < \operatorname{arctg}(0.6) < 0.545$$

(мы воспользовались очевидной оценкой $2.5\rho\beta = 2.5(1/\rho-2)\rho = 2.5(1-2\rho) \leqslant 2.5\cdot 0.02 = 0.05$). Введём функции:

$$\Phi_\rho(w) = \exp(w\cos(\pi\rho))\cos(w\sin(\pi\rho) - 2.5\pi\rho\beta),$$
$$G_\rho(w) = 2\rho w^{1-\lambda}(\Phi_\rho(w)-1),$$
$$g_\rho(w) = 2\rho w^{1-\lambda} + \omega_\rho(w,\lambda) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)}.$$

Очевидно тождество

$$G_\rho(w) + g_\rho(w) = F_\rho(w) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)}. \tag{45}$$

Заметим, что функция $G_\rho(w)$ по крайней мере дважды обращается в нуль внутри прямоугольника Π_ρ. Действительно, имеем

$$\Phi_\rho(\xi_k) = (-1)^k\exp(\xi_k\cos(\pi\rho)) \qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

откуда находим $G_\rho(\xi_1) < 0$, $G_\rho(\xi_2) > 0$, $G_\rho(\xi_3) < 0$. А так как функция действительнозначна на $\mathbb{R}$, то она обращается в нуль хотя бы один раз на интервалах (ξ_1,ξ_2) и (ξ_2,ξ_3). Теперь оценим функцию $G_\rho(w)$ снизу, а $g_\rho(w)$ — сверху на границе прямоугольника Π_ρ. Займёмся сперва вертикальными сторонами

$$l_k = \{w = \xi_k + iy:\ |y| \leqslant 0.6\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho)\}, \qquad k=1,\ k=3.$$

Нетрудно убедиться в том, что при нечётных номерах k выполняется тождество

$$\Phi_\rho(\xi_k+iy) = -\operatorname{ch}(y\sin(\pi\rho))\exp(\xi_k\cos(\pi\rho) + iy\cos(\pi\rho)),$$

а значит, при $|y| \leqslant 0.5\pi\sec(\pi\rho)$ имеем

$$\operatorname{Re}\Phi_\rho(\xi_k+iy) \leqslant -\operatorname{ch}(y\sin(\pi\rho))\cos(y\sin(\pi\rho)).$$

Легко проверяется, что если $0 < b < a/2$, то функция $\operatorname{ch}(ay)\cos(by)$ возрастает на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi/(4b)$. Так как в нашем случае ввиду включения $\rho\in[0.49, 0.5)$ все эти условия выполнены, то приходим к оценке

$$\operatorname{Re}\Phi_\rho(w) \leqslant -1, \qquad w\in l_k,\ \ k=1,\ k=3. \tag{46}$$

На горизонтальных сторонах прямоугольника Π_ρ (обозначим их объединение l) имеем

$$\operatorname{Im}(w\sin(\pi\rho) + 2.5\pi\rho\beta) = \operatorname{Im}(w\sin(\pi\rho)) = 0.6\pi.$$

Отсюда и из неравенства $|\cos(x+iy)| \geqslant |\operatorname{sh} y|$ $(x,y\in\mathbb{R})$ получаем оценку

$$|\Phi_\rho(w)| \geqslant \operatorname{sh}(0.6\pi) > 3, \qquad w\in l. \tag{47}$$

Из (46) и (47) находим

$$\min\{|\Phi_\rho(w)-1|:\ w\in\partial\Pi_\rho\} \geqslant 2. \tag{48}$$

Очевидно, что

$$\min\{|2\rho w^{1-\lambda}| :\ w \in \partial\Pi_\rho\} \geqslant 0.98M^{-2.5\beta}, \tag{49}$$

где $M = \max\{|w| :\ w \in \Pi_\rho\}$. Из (44) следует, что

$$M \leqslant 3.11 \cdot 3.142 \cdot \operatorname{cosec}(0.49\pi) = 9.77162 \sec(0.01\pi) < 9.8. \tag{50}$$

Из (48)–(50) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\min\{|G_\rho(w)| :\ w \in \partial\Pi_\rho\} &\geqslant 1.96 \cdot (9.8)^{-2.5\beta} = 1.96\exp(-2.5\beta\ln 9.8)\\ &\geqslant 1.96\exp\left(-\frac{\ln 9.8}{9.8}\right) > 1.96\exp(-0.24) > 1.5\end{aligned} \tag{51}$$

(мы воспользовались очевидной оценкой $2.5\beta \leqslant 2.5(1/0.49 - 2) = 1/9.8$).

Займемся оценкой сверху $|g_\rho(w)|$ в прямоугольнике Π_ρ. Из известного неравенства

$$|1 - \exp\zeta| \leqslant |\zeta|, \qquad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0,$$

применённого к

$$2\rho w^{1-\lambda} = 2\rho w^{-2.5\beta} = \exp\left(-\left(\ln\frac{1}{2\rho} + 2.5\beta\ln w\right)\right) \equiv \exp(\zeta(w)),$$

находим

$$|g_\rho(w)| \leqslant |\omega_\rho(w,\lambda)| + \left|\frac{1}{\Gamma(\lambda)} - 1\right| + 2.5\beta\,|\ln w| + \ln\left(\frac{1}{2\rho}\right). \tag{52}$$

Из формул (32) и (33) видно, что

$$|J_\rho(w,\lambda)| \leqslant \frac{|\sin(\pi(\alpha-\lambda))|}{\pi} I_{1,\rho}(\operatorname{Re} w,\lambda) + \frac{|\sin(\pi\lambda)|}{\pi} I_{2,\rho}(\operatorname{Re} w,\lambda).$$

Отсюда, действуя так же, как и в доказательстве теоремы 2, при $0 < \lambda \leqslant 1/\rho$, $\operatorname{Re} w > 0$ получаем оценку

$$|\omega_\rho(w,\lambda)| \leqslant \frac{3}{2}|w|^{1-\lambda}(\operatorname{Re} w)^{\lambda-1-1/\rho}.$$

Следовательно,

$$\max_{w\in\Pi_\rho} |\omega_\rho(w, 1+2.5\beta)| \frac{3}{2\xi_1^{1/\rho}} < \frac{3}{2\xi_1^2} < \frac{3}{2\pi^2} < 0.16. \tag{53}$$

Лемма 1 даёт неравенство

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\lambda)} - 1\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(1+2.5\beta)} - 1\right| \leqslant \gamma\cdot 2.5\beta \leqslant \frac{\gamma}{9.8} < 0.06. \tag{54}$$

Далее, имеем

$$\ln\left(\frac{1}{2\rho}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{0.98}\right) < 0.021. \tag{55}$$

Из (44) находим

$$\begin{aligned}\max\{|w| :\ w \in \Pi_\rho\} &\leqslant 3.11\pi\operatorname{cosec}(\pi\rho) \leqslant 3.11\pi\operatorname{cosec}(0.49\pi) < 9.772\operatorname{cosec}(0.49\pi)\\ &< 9.772\cdot 1.001 < 9.782.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\max_{w\in\Pi_\rho} |\ln w| &\leqslant \max_{w\in\Pi_\rho}\sqrt{\ln^2|w| + \arg^2 w} \leqslant \sqrt{(\ln 9.782)^2 + (0.545)^2}\\ &< \sqrt{(2.285)^2 + 0.3} < \sqrt{5.522} < 2.35.\end{aligned} \tag{56}$$

Соотношения (52)–(56) вместе с неравенством $2.5\beta \leqslant 1/9.8$ влекут за собой оценку

$$\max_{w\in\Pi_\rho} |g_\rho(w)| < 0.16 + 0.06 + 2.5\beta \cdot 2.35 + 0.021 < 0.25 + 2.35/9.8 < 0.5.$$

Отсюда и из (51) и (45) заключаем, что по теореме Руше функция $F_\rho(w) - 1/\Gamma(\lambda)$ имеет в прямоугольнике Π_ρ столько же нулей, сколько и $G_\rho(w)$, т.е. не менее двух. Из неравенства (41) сразу следует, что эти нули не вещественны.

Итак, осталось доказать соотношения (41) и (42). Нетрудно убедиться в том, что они вытекают из неравенств

$$2\rho x^{1-\lambda}\exp(x\cos(\pi\rho))\cos(x\sin(\pi\rho) - 2.5\rho\beta) + \omega_\rho(x,\lambda) < \frac{1}{\Gamma(\lambda)}, \qquad \xi_1 \leqslant x \leqslant \eta, \tag{57}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} + |\omega_\rho(\xi_n,\lambda)| < 2\rho\xi_n^{1-\lambda}\exp(\xi_n\cos(\pi\rho)). \qquad n \geqslant 4. \tag{58}$$

Заметим, что неравенство (57) при

$$x \in \left[\xi_1, \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}(1.5 + 2.5\beta\rho)\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}(2.5 + 2.5\beta\rho), \eta\right]$$

почти очевидно в силу того, что при этих значениях x имеем неравенство $\cos(x\sin(\pi\rho) - 2.5\beta\rho) \leqslant 0$, а согласно (4) выполняется неравенство $|\omega_\rho(x,\lambda)| \leqslant (3/2)\xi_1^{-2} < 3/(2\pi^2) < 0.16$. С другой стороны, $1/\Gamma(\lambda)$ при рассматриваемых значениях λ больше 1. При

$$x \in \left(\frac{\pi(1.5 + 2.5\beta\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \frac{\pi(1.75 + 2.5\beta\rho)}{\sin(\pi\rho)}\right] \bigcup \left[\frac{\pi(2.25 + 2.5\beta\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \frac{\pi(2.5 + 2.5\beta\rho)}{\sin(\pi\rho)}\right)$$

неравенство (57) также доказывается на основе простых соображений. Действительно, здесь

$$\cos(x\sin(\pi\rho) - 2.5\beta\rho) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} < 0.71,$$

$$\exp(x\sin(\pi\rho)) \leqslant \exp(2.55\pi\operatorname{ctg}(\pi\rho)) \leqslant \exp(2.55\pi\operatorname{tg}(0.01\pi)) < \exp(0.26) < 1.3.$$

Поэтому первое слагаемое в левой части (57) меньше 0.93, а

$$|\omega_\rho(x,\lambda)| \leqslant \frac{3}{2(1.5\pi)^2} = \frac{2}{3\pi^2} < 0.07,$$

а значит, левая часть (57) меньше 1.

Для доказательства (57) при

$$x \in (\pi(1.75 + 2.5\beta\rho)\operatorname{cosec}(\pi\rho), \pi(2.25 + 2.5\beta\rho)\operatorname{cosec}(\pi\rho)), \tag{59}$$

а также (58) потребуются более тонкие оценки. Сперва оценим сверху $|\omega_\rho(x, 1 + 2.5\beta)|$, $0.49 \leqslant \rho < 0.5$. На основании неравенств (35), (36) находим

$$\begin{aligned}|\omega_\rho(x, 1 + 2.5\beta)| &\leqslant \frac{1}{\pi x^{1/\rho}}\Gamma\left(\frac{1}{\rho} - 2.5\beta\right)\left(1.5\sin(2.5\pi\beta) + \sin\frac{\pi}{\rho}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\pi x^2}\Gamma(2 - 1.5\beta)(1.5\sin(2.5\pi\beta) + \sin(\pi\beta)) < 4.75\frac{\beta}{x^2}.\end{aligned}$$

А так как в дальнейшем $x \geqslant 1.75\pi$, то для всех рассматриваемых значений x получаем неравенство

$$|\omega_\rho(x, 1 + 2.5\beta)| < 0.16\beta. \tag{60}$$

Непосредственно проверяется, что функция $x^{-a}\exp(bx)$, $a>0$, $b>0$, возрастает при $x>a/b$. Следовательно,

$$f_\rho(x)=x^{1-\lambda}\exp(x\cos(\pi\rho))=x^{-2.5\beta}\exp\left(x\sin\left(\frac{\pi\beta}{2\beta+4}\right)\right)$$

возрастает при $x>x_0(\beta)=2.5\beta\operatorname{cosec}(\pi\beta/(2\beta+4))$. Воспользовавшись оценкой $\sin t>3t/\pi$, $0<t<\pi/6$ (очевидно, что $\beta/(2\beta+4)<1/6$), находим $x_0(\beta)<2.5(2\beta+4)/3<10/3+5\beta/3<3.5$. Тем самым максимум функции $f_\rho(x)$ на отрезке (59) достигается на его правом конце и меньше $f_\rho(e^2)$, поскольку

$$\pi(2.25+2.5\beta\rho)\operatorname{cosec}(\pi\rho)\leqslant 2.3\pi\operatorname{cosec}(0.49\pi)<7.3<e^2.$$

Имеем также $\min\limits_{n\geqslant 4} f_\rho(\xi_n)=f_\rho(\xi_4)$. Из сказанного заключаем, что для доказательства (57) и (58) нам осталось проверить, что

$$2\rho\exp(e^2\cos(\pi\rho)-5\beta)+0.16\beta<\frac{1}{\Gamma(1+2.5\beta)},\tag{61}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+2.5\beta)}+0.16\beta<2\rho\exp(\xi_4\cos(\pi\rho)-2.5\beta\ln\xi_4).\tag{62}$$

Имеем $\cos(\pi\rho)=\sin(\pi\beta/(2\beta+4))<\pi\beta/4$. Следовательно,

$$2\rho\exp(e^2\cos(\pi\rho)-5\beta)<\exp(\beta(0.25\pi e^2-5))<\exp(0.83\beta)$$

$$<1+0.83\beta+(0.83\beta)^2<1+0.86\beta$$

(мы использовали неравенство $e^t<1+t+t^2$ при $0<t<1$ и оценку сверху $\beta<1/0.49-2$). Отсюда и из (60) заключаем, что левая часть (61) меньше $1+1.02\beta$. С другой стороны, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $1/\Gamma(1+t)=1+\gamma t+k(t)t^2/2$, где функция $k(t)$ равна значению второй производной $1/\Gamma(z)$ в некоторой точке $z\in(1,1+t)$. Ввиду тождества

$$\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)''=\frac{\psi^2(z)-\psi'(z)}{\Gamma(z)},\qquad \text{где}\quad \psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

получаем оценку снизу ($1<z<1.2$)

$$\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)''>-\frac{\psi'(z)}{\Gamma(z)}>-1.2\psi'(z)=-1.2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^2}$$

$$>-1.2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=-\frac{1.2\pi^2}{6}>-2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma(1+2.5\beta)}>1+2.5\gamma\beta-(2.5\beta)^2>1+0.57\cdot 2.5\beta$$

$$-(6.25\beta)\beta>1+1.425\beta-0.26\beta>1+0.16\beta.$$

Этим неравенство (61) доказано.

Для доказательства (62) оценим $\xi_4\cos(\pi\rho)$ снизу, а $\ln\xi_4$ — сверху. Учитывая ограничение $\beta\in(0,2/49]$, находим

$$\xi_4\cos(\pi\rho)=(4+2.5\beta\rho)\pi\operatorname{ctg}(\pi\rho)>4\pi\operatorname{ctg}(\pi\rho)=4\pi\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\beta}{2\beta+4}\right)$$

$$>4\frac{\pi^2\beta}{2\beta+4}=\frac{\pi^2\beta}{1+0.5\beta}>9.6\beta,$$

$$\ln\xi_4=\ln\left((4+2.5\beta\rho)\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}\right)<\ln\left(\frac{4.05\pi}{\sin(0.49\pi)}\right)<2.56.$$

Отсюда видно, что неравенство (62) вытекает из следующего:

$$0.16\beta + \frac{1}{\Gamma(1+2.5\beta)} < \exp(3.2\beta + \ln(2\rho))\,. \tag{63}$$

Теперь заметим, что $1 + t < e^t$, а по лемме 1 имеем $1/\Gamma(1+t) < 1 + \gamma t$ $(\forall t > 0)$. Поэтому неравенство (63) можно заменить более сильным: $0.16\beta + 1 + 2.5\gamma\beta < 1 + 3.2\beta + \ln(2\rho)$. А так как $\gamma < 0.58$, то нам достаточно доказать, что $\ln(1/(2\rho)) < 1.59\beta$, т.е. $\ln(1+\beta/2) < 1.59\beta$, что очевидно. Этим теорема 3 полностью доказана.

Поступила 14.12.2000

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ostrovskii I.V., Peresyolkova I.N.** Non-asymptotic results on distributions of zeros of the function $E_\rho(z,\mu)$ // Anal. Math. 1997. Vol. 23. P. 283–296.
2. **Wiman A.** Über die Nullstellen der Funktionalen $E_\alpha(z)$ // Acta Math. 1905. Vol. 29. P. 217–234.
3. **Polya G.** Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$ // Tôhoku Math. J. 1921. Vol. 19. P. 241–248.
4. **Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.** О построении некоторых специальных биортонормальных систем // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика. 1959. Т. 12. С. 17–42.
5. **Седлецкий А.М.** Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера // Anal. Math. 1994. Vol. 20. P. 117–132.
6. **Седлецкий А.М.** О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 710–724.
7. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 299 с.
8. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 799 с.