А. Ю. Попов, Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 5, 113–138

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm404

УДК 517.53

А. Ю. Попов

Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения

В работе усилены оценки, полученные С. Мандельбройтом, для длины канала, в который ряды экспонент с последовательностью положительных показателей, имеющей положительный шаг, могут допускать аналитическое продолжение. На пути получения этих результатов найдена оценка индекса конденсации А. Ф. Леонтьева, неулучшаемая на классах последовательностей с заданными шагом и верхней плотностью.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Предварительные сведения. Постановка задач

Одним из актуальных направлений в теории аналитических функций является изучение возможности аналитического продолжения сумм рядов экспонент $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z)$ с последовательностью положительных строго возрастающих показателей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Множество таких рядов содержит в себе все степенные ряды, которые получаются при $\lambda \subset \mathbb{N}$, $e^z = w$. Обозначим

$$h(\lambda) = \liminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n), \qquad D(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}\,.$$

Величина $D(\lambda)$ называется *верхней плотностью* последовательности λ, а $h(\lambda)$ – *шагом* последовательности λ [1; гл. I]. Очевидно, что если $0 < D(\lambda) < +\infty$, то

$$h(\lambda)D(\lambda) \leqslant 1. \tag{1.1}$$

В работе будут рассматриваться ряды экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z), \tag{2.1}$$

показатели которых образуют строго возрастающую последовательность положительных чисел с положительным шагом. В этом случае абсцисса сходимости ряда (2.1) совпадает с его абсциссой абсолютной сходимости и абсциссой голоморфности (определения см. в [2]). Нас интересуют ряды, множества сходимости

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

и расходимости которых непусты, и поэтому без ограничения общности будем считать, что абсцисса сходимости рассматриваемых рядов равна нулю, т.е. выполнено условие

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/\lambda_n} = 1. \tag{3.1}$$

Теорема Д. Пойа–В. Бернштейна [3], [4] утверждает, что в случае, когда последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ с положительным шагом имеет плотность d, т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = d = D(\lambda), \tag{4.1}$$

то функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку на любом отрезке мнимой оси длины $2\pi d$.

Эта теорема неулучшаема в следующем смысле. Для любой последовательности λ, имеющей положительный шаг и плотность d, ряд экспонент

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(\lambda_n z)}{L'(\lambda_n)}\,,$$

где $L(z) = L(\lambda, z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2/\lambda_n^2)$, имеет согласно утверждению 4 из [5; гл. 2] абсциссу сходимости равную нулю. Вместе с тем у его суммы не только нет особых точек на интервале $(-i\pi d, i\pi d)$, но $\varphi(z)$ даже допускает аналитическое продолжение во всю бесконечную полосу $|\operatorname{Im} z| < \pi d$. Последнее вытекает из интегрального представления

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(zw)}{L(\lambda, w)}\,dw, \qquad |\operatorname{Im} z| < \pi d$$

(см. [1; гл. 5], [5], [6]).

Если же последовательность λ плотности не имеет, а имеет лишь конечную верхнюю плотность, то “обобщение” теоремы Пойа–Бернштейна, в котором d заменено на $D(\lambda)$, неверно. Для любых $h > 0$, $D > 0$, $hD < 1$ (см. (1.1)), найдутся последовательность $\{\lambda_n\}$ с шагом h и верхней плотностью D и ряд (2.1) с абсциссой сходимости равной нулю, сумма которого аналитична на интервале $(-\pi i/h, \pi i/h)$ (разумеется, содержащем в себе отрезок длины $2\pi D$). Пример достаточно построить при $h = 1$. Переход к произвольному значению h осуществляется посредством линейной замены переменного. Такой пример для $h = 1$, $D = 1/2$ появился еще в 1906 году у Фабера (изложение его результата см. в [7]), а общий случай см. в [1; §VI.2]. И все же цитированная теорема Пойа–Бернштейна допускает некоторое обобщение: суммы рядов (2.1), (3.1) не могут аналитически продолжаться из левой полуплоскости во всю замкнутую полосу $|\operatorname{Im} z - b| \leqslant \pi D(\lambda)$, каково бы ни было $b \in \mathbb{R}$ (как мы видели выше, продолжение в открытую полосу $|\operatorname{Im} z| < \pi D(\lambda)$ возможно при любом значении $D(\lambda)$ для рядов экспонент специального вида). Это следует из теоремы С. Мандельбройта [1; §II.2], которая утверждает, что при любом $b \in \mathbb{R}$ сумма ряда (2.1), (3.1) имеет по крайней мере одну особую точку в канале

$$C_b(\lambda) = \bigl\{0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \delta(\lambda),\ |\operatorname{Im} z - b| \leqslant \sigma(\lambda)\bigr\} \cup \bigl\{\delta(\lambda) + ib + K(\lambda)\bigr\}. \tag{5.1}$$

Через $K(\lambda)$ обозначена индикаторная диаграмма функции $L(\lambda, z)$, $\sigma(\lambda)$ – экспоненциальный тип $L(\lambda, z)$ (напомним, что $\sigma(\lambda) \leqslant \pi D(\lambda)$, см. [1; §I.1]), $\delta(\lambda)$ – индекс конденсации последовательности λ:

$$\delta(\lambda) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|\right). \tag{6.1}$$

В связи с тем, что эта теорема Мандельбройта носит лишь достаточный характер, возникает вопрос об отыскании максимально возможной длины прямоугольника высоты $2\pi D(\lambda)$, в который могут аналитически продолжаться за абсциссу сходимости ряды экспонент (2.1). Сказанное приводит к постановке следующей экстремальной задачи. Для заданных положительных чисел h и D, $hD \leqslant 1$ (см. (1.1)), через $\mathscr{P}(h, D)$ обозначим класс всех последовательностей $\{\lambda\}$, имеющих шаг h и верхнюю плотность D.

Задача 1. При $0 < D < 1/h$ требуется найти (или возможно точнее оценить) функцию $l(h, D)$, которая определяется как точная верхняя грань чисел l, для которых найдутся $b \in \mathbb{R}$ и ряд экспонент (2.1), (3.1) с последовательностью показателей $\lambda \in \mathscr{P}(h, D)$ и суммой $f(z)$, допускающей аналитическое продолжение в некоторую окрестность прямоугольника

$$\Pi(l, D, b) = \bigl\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant l,\ |\operatorname{Im} z - b| \leqslant \pi D\bigr\}.$$

Можно считать, что $b = 0$, так как замена переменного $z - ib = \zeta$ не меняет структуру ряда (2.1) и его абсциссу сходимости.

Отметим, что эта задача бессодержательна, если $D = 1/h$ или $D = 0$. Согласно теореме из [8; гл. 5] $f(z)$ обязательно имеет хотя бы одну особую точку на любом отрезке мнимой оси длины $2\pi/h(\lambda)$ и, следовательно, не может быть продолжена ни в какую окрестность отрезка $\Pi(0, 1/h(\lambda), b)$ ни для каких $b \in \mathbb{R}$. Если же $D = 0$, то все точки мнимой оси для $f(z)$ особые [5; гл. 2]. Однако для любых пар чисел h и D таких, что $0 < hD < 1$, имеем $l(h, D) > 0$, но точное значение этой функции до сих пор не найдено ни в одной точке.

Особый интерес вызывают ряды экспонент с натуральными показателями, поскольку они представляют собой степенные ряды от переменной e^z. Для $D \in (0, 1)$ определим функцию $l(D)$ как точную верхнюю грань положительных чисел l, для которых существует ряд экспонент (2.1), (3.1) с натуральными показателями верхней плотности D и суммой $f(z)$, допускающей аналитическое продолжение в некоторую окрестность прямоугольника $\Pi(l, D, 0)$. Функция $l(D)$ положительна на $(0, 1)$, но точное ее значение ни в одной точке этого интервала не известно.

Справедливы очевидные соотношения

$$\begin{gathered} l(D) \leqslant l(1, D) \quad \forall\, D \in (0, 1), \\ l(h, D) = h^{-1} l(1, hD). \end{gathered} \tag{7.1}$$

Поэтому достаточно возможно точнее оценить $l(D)$ снизу, а $l(1, D)$ сверху. Мандельбройт [1; § VI.2] доказал, что при $D \to +0$

$$l(D) > D\biggl(\ln\frac{1}{D} - \ln\ln\frac{1}{D} - \ln 2 + o(1)\biggr), \tag{8.1}$$

а при всех h и D, $0 < hD \leqslant 1$, он установил оценку сверху

$$l(h,D) < D\left(3\ln\frac{1}{hD} + 8.5 + \pi\right). \tag{9.1}$$

Для получения асимптотического неравенства (8.1) Мандельбройт сконструировал “далеко продолжаемый” направо ряд экспонент (2.1), (3.1) с натуральными показателями. Неравенство (9.1) Мандельбройт вывел из своего результата (5.1) и найденной им оценки индекса конденсации (6.1):

$$\delta(\lambda) \leqslant 3D\ln\frac{1}{hD} + 8.5D, \qquad h = h(\lambda), \quad D = D(\lambda). \tag{10.1}$$

Оценка сверху величины $\delta(\lambda)$ важна не только в теории аналитического продолжения. Индекс конденсации (6.1) находит разнообразные применения в теории рядов экспонент, в теории интерполяции, в вопросах о полноте различных систем функций (см. [5], [6], [9]).

Величина $\delta(\lambda)$ встречалась в работах многих математиков; в отечественной литературе за ней закрепилось название “индекс конденсации А.Ф. Леонтьева”. Если последовательность λ с положительным шагом имеет плотность (4.1), то $\delta(\lambda) = 0$. Если λ не имеет плотности, то ее индекс конденсации может быть положительным, и в связи с этим возникает задача о точной его оценке на тех или иных классах последовательностей. Выше были определены классы $\mathscr{P}(h,D)$ – последовательности с шагом h и верхней плотностью D.

Задача 2. Найти величину

$$\Delta(h,D) = \sup_{\lambda\in\mathscr{P}(h,D)} \delta(\lambda). \tag{11.1}$$

До настоящего времени задача 2 не была решена, хотя Б.Я. Левиным в [10], [11] была поставлена и решена следующая родственная экстремальная задача. Б.Я. Левин отыскал $\sup_{\lambda\in\mathscr{P}(D)} H(\lambda,\theta)$, где $\mathscr{P}(D)$ – класс строго возрастающих последовательностей положительных чисел с верхней плотностью D,

$$H(\lambda,\theta) = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|L(\lambda, xe^{i\theta})|}{x}\,.$$

В частности, Б.Я. Левин доказал неулучшаемую на классах $\mathscr{P}(h,D)$ оценку

$$H(\lambda,0) = \max\{\operatorname{Re} z : z\in K(\lambda)\} \leqslant D(\lambda)\ln(3+\sqrt{8}\,).$$

Этот результат вместе с теоремой Мандельбройта о непродолжимости суммы ряда экспонент в канал (5.1) приводит к неравенству

$$l(h,D) \leqslant \Delta(h,D) + D\ln(3+\sqrt{8}\,). \tag{12.1}$$

§ 2. Основные результаты

Автору удалось точно решить экстремальную задачу 2, т.е. найти $\Delta(h,D)$ как элементарную функцию от переменных h и D на всей области ее определения $\{(h,D) \in \mathbb{R}^2 : h > 0,\ D > 0,\ hD \leqslant 1\}$. Функция $\Delta(h,D)$ имеет достаточно сложный вид. Для нее выведено простое и в некотором смысле неулучшаемое неравенство, приведшее к существенному продвижению в задаче 1. Найдено усиление неравенства (9.1), которое позволило получить асимптотику $l(h,D)$ при $D \to +0$. Также усилена оценка снизу Мандельбройта (8.1) для $l(D)$.

Перейдем к формулировкам результатов.

Обозначим $s = (hD)^{-1}$, $a = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$.

Теорема 1. *При любых $h > 0$ и $0 < D \leqslant h^{-1}$ справедливо равенство*

$$\Delta(h,D) = D\left(a \ln \frac{2s-a}{a} + (1-a)\ln \frac{2s-1-a}{1-a} + 2(s-a)\ln \frac{2s-a}{2s-a-1}\right). \quad (1.2)$$

Следствие 1. *При любом фиксированном значении $h > 0$ функция $\Delta(h,D)$ является строго возрастающей по переменной D на отрезке $[0,1/h]$, а при любом фиксированном значении $D > 0$ функция $\Delta(h,D)$ является строго убывающей по переменной h на полуинтервале $(0,1/D]$.*

Следствие 2. *При любых $h > 0$, $D > 0$, $s = (hD)^{-1} \geqslant 1$, справедлива оценка*

$$\Delta(h,D) < D\bigl(1 + \ln 2 + \ln\bigl(s + \sqrt{s^2 - s + 1/2}\,\bigr)\bigr). \quad (2.2)$$

В частности, имеем

$$\Delta(h,D) < D \ln \frac{4e}{hD} < D\bigl(2.39 - \ln(hD)\bigr). \quad (3.2)$$

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\Delta\left(\frac{1}{D}, D\right) = D \ln(3 + \sqrt{8}\,), \quad (4.2)$$

а если $hD < 1$, то

$$\Delta(h,D) > D \ln \frac{3+\sqrt{8}}{hD}\,. \quad (5.2)$$

Если же $hD \leqslant 1/2$, то

$$\Delta(h,D) > D\bigl(2 - \ln(hD)\bigr). \quad (6.2)$$

Следствие 3 показывает, что задача о максимальном индексе конденсации принципиально отличается от задачи Б.Я. Левина об экстремальном индикаторе, поскольку в первой ответ существенно зависит от h и даже при фиксированном D имеем $\lim_{h\to+0} \Delta(h,D) = +\infty$.

Следствие 4. *При $s \geqslant 2$ с абсолютной постоянной в символе O выполняется соотношение*

$$\Delta(h, D) = D\bigl(\ln(4es) + O(s^{-1} \ln s)\bigr).$$

Следствие 4 показывает, что постоянную $4e$ в неравенстве (3.2) нельзя заменить меньшей. Из неравенств (12.1) и (3.2) немедленно вытекает

Теорема 2. *При любых $h > 0$, $D > 0$, $hD < 1$, справедлива оценка*

$$l(h, D) < D \ln \frac{4e(3 + \sqrt{8})}{hD}\,. \tag{7.2}$$

Другими словами, можно утверждать, что сумма всякого ряда экспонент (2.1), (3.1) с последовательностью положительных показателей, имеющей шаг h и конечную верхнюю плотность D, не продолжима ни в какой прямоугольник вида

$$\bigl\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z < D\bigl(\ln(4e(3 + \sqrt{8}\,)) - \ln(hD)\bigr),\ b \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b + 2\pi D,\ b \in \mathbb{R}\bigr\}.$$

Теорема 2 вместе с неравенством (8.1) влечет за собой

Следствие 5. *При любом фиксированном h справедлива асимптотика*

$$l(h, D) \sim D \ln \frac{1}{D} \quad (D \to +0).$$

За счет предложенного автором усовершенствования конструкции “далеко продолжаемого” направо ряда экспонент с натуральными показателями и нулевой абсциссой сходимости удалось доказать следующую теорему, усиливающую неравенство (8.1).

Теорема 3. *При $D \in (0, 1/6]$ справедлива оценка*

$$l(D) > D \ln \frac{\sqrt[4]{128}}{\pi D} > D \ln \frac{1.07}{D}\,.$$

Следствие 6. *С абсолютной постоянной в символе O имеет место асимптотика*

$$l(D) = D \ln \frac{1}{D} + O(D) \quad (D \to +0).$$

Из теоремы 3 и (7.1) получаем

Следствие 7. *При любом $h > 0$ и $D \in (0, 1/(6h)]$ выполняется неравенство*

$$l(h, D) > D \ln \frac{1.07}{hD}\,. \tag{8.2}$$

Из (7.2) и (8.2) вытекает

Следствие 8. *На множестве $\{(h, D) \in \mathbb{R}^2 : hD \leqslant 1/6\}$ с абсолютной постоянной в символе O справедливо соотношение*

$$l(h, D) = D \ln \frac{1}{hD} + O(D).$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 разбивается на несколько этапов. Некоторые из этих этапов удобно выделить в отдельные леммы. Сперва для функции $\ln|L(\mu,x)|$, где μ – строго возрастающая последовательность действительных чисел со считающей функцией $N(x)=N(\mu,x)=\sum_{\mu_n\leqslant x}1$, удовлетворяющей ограничению

$$N(x)=O(x^{2-\tau})\quad (x\to+\infty) \tag{1.3}$$

с некоторым $\tau>0$, устанавливается справедливость интегрального представления.

Лемма 1. *При любом $R\in(0,+\infty)\setminus\mu$ выполняется равенство*

$$-\frac{\ln|L(\mu,R)|}{2R}=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi_R(t)-\varphi_R(1)}{t^2-1}\,dt, \tag{2.3}$$

где $\varphi_R(t)=\dfrac{N(Rt)}{Rt}$.

Если последовательность μ имеет конечную верхнюю плотность, то

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{N(\mu,x)}{x}=D(\mu)$$

и условие (1.3) выполняется с $\tau=1$.

Лемма 1 позволяет с помощью ряда дополнительных соображений свести задачу отыскания верхней грани $\delta(\lambda)$ на классах $\mathscr{P}(h,D)$ к экстремальной задаче на некотором множестве функций $\{\psi\}$, непрерывных на $\mathbb{R}_+$, с соответствующими ограничениями на $\psi(x)-\psi(y)$. Экстремальная функция ψ “угадывается”. Еще одна трудность состоит в том, что характеристики последовательности $h(\lambda)$ и $D(\lambda)$ являются асимптотическими и неравенства $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant h(\lambda)$ и $n/\lambda_n\leqslant D(\lambda)$, вообще говоря, не выполняются. Поэтому доказывается

Лемма 2. *Пусть λ – некоторая строго возрастающая последовательность положительных чисел шага h и верхней плотности D. Пусть затем p и B – произвольные числа, удовлетворяющие условиям $D<B<p$, $p>1/h$. Тогда справедлива оценка*

$$\delta(\lambda)\leqslant J(p,B),$$

где

$$J(p,B)=\sup_{0\leqslant A\leqslant B}J(p,B,A), \tag{3.3}$$

$$J(p,B,A)=2\int_0^{+\infty}\frac{\psi_A(t)-A}{t^2-1}\,dt,$$

$$\psi_A(t)=\psi_A(p,B,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant q,\\[2pt] p\Big(1-\dfrac{q}{t}\Big), & q<t<\dfrac{p-A}{p-B},\\[2pt] B, & t\geqslant\dfrac{p-A}{p-B};\end{cases} \tag{4.3}$$

$$q=\frac{p-A}{p}.$$

Функцию $J(p,B)$ удается найти в явном виде.

Лемма 3. *При фиксированных значениях p и B $(0 < B < p < +\infty)$ функция $f(A) = J(p, B, A)$ достигает максимума на отрезке $[0, B]$ в точке*

$$A_0(p, B) = p - \sqrt{p^2 - pB + B^2/2}\,, \tag{5.3}$$

и максимум этот равен

$$J(p, B) = B\left(a \ln \frac{2s-a}{a} + (1-a)\ln \frac{2s-a-1}{1-a} + 2(s-a)\ln \frac{2s-a}{2s-a-1}\right), \tag{6.3}$$

где $s = p/B$, $a = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$.

Замечание 1. Функция $J(p, B)$ определялась в лемме 2 формулой (3.3) лишь для $B < p$. Но ее “продолжение”, задаваемое посредством (6.3), непрерывно по совокупности аргументов в области $0 < B < 2p < +\infty$. Это вытекает из (6.3), из непрерывности логарифма и квадратного корня на области их определения и из неравенств $0 < a < 1$ и $2s > a + 1$, справедливых при любом $s > 1/2$.

Теперь из лемм 1–3 выведем теорему 1, а после этого приведем доказательства упомянутых лемм.

Доказательство теоремы 1. Сравнивая полученное в лемме 3 выражение для $J(p, B)$ с правой частью равенства (1.2), убеждаемся в том, что утверждение теоремы 1 равносильно справедливости тождества

$$\Delta(h, D) = J\left(\frac{1}{h}, D\right), \qquad 0 < D \leqslant h^{-1} < +\infty. \tag{7.3}$$

Исходя из определения величины $\Delta(h, D)$ заключаем, что равенство (7.3) эквивалентно одновременному выполнению следующих двух утверждений.

1) Для индекса конденсации А. Ф. Леонтьева любой последовательности λ, имеющей положительный шаг, справедлива оценка

$$\delta(\lambda) \leqslant J\left(\frac{1}{h(\lambda)}, D(\lambda)\right). \tag{8.3}$$

2) Для любых положительных чисел h и D, удовлетворяющих неравенству $0 < D \leqslant 1/h$, существует последовательность λ с шагом h, верхней плотностью D и индексом конденсации

$$\delta(\lambda) = J\left(\frac{1}{h}, D\right).$$

Сперва докажем утверждение 1). Зафиксируем последовательность λ с шагом $h(\lambda) = h$ и верхней плотностью $D(\lambda) = D$. Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции J по обеим переменным (см. выше замечание 1) найдется открытый круг K с центром в точке $(1/h, D)$ такой, что при любых $(p, B) \in K$ выполняется неравенство $J(p, B) < J(1/h, D) + \varepsilon$. А так как в этом круге заведомо имеются точки $(\widetilde{p}, \widetilde{B})$, удовлетворяющие условиям $\widetilde{p} > 1/h$, $D < \widetilde{B} < \widetilde{p}$, то на основании леммы 2 заключаем, что $\delta(\lambda) \leqslant J(\widetilde{p}, \widetilde{B}) < J(1/h, D) + \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε приходим к соотношению (8.3). Тем самым утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Зафиксируем положительные числа h и D, удовлетворяющие условию $hD \leqslant 1$. Построим сперва экстремальную последовательность в случае $hD < 1$. Положим

$$m_k = \exp(4^k), \quad r_k = \frac{pm_k}{p - A_0}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

где

$$p = \frac{1}{h}, \qquad A_0 = p - \sqrt{p^2 - pD + D^2/2}. \tag{9.3}$$

Заметим, что $m_{k+1} = m_k^4$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Последовательность положительных чисел λ определим следующим образом. Пусть k_0 – наименьшее из натуральных чисел k таких, что $m_k > \max(h, (1-hD)^{-1})$. Положим

$$\lambda \cap [0, m_{k_0+1}] = \varnothing,$$

а при $k > k_0$

$$\begin{gathered}\lambda \cap \left[m_k, \frac{m_k}{1-hD}\right] = \left\{m_k + \nu h : \nu \in \mathbb{N},\ \nu \leqslant \frac{m_k D}{1-hD}\right\},\\ \lambda \cap \left(\frac{m_k}{1-hD}, m_k^2\right] = \left\{\frac{m_k}{1-hD} + \frac{\nu}{D} : \nu \in \mathbb{N},\ \nu \leqslant m_k D\left(m_k - \frac{1}{1-hD}\right)\right\},\\ \lambda \cap (m_k^2, m_{k+1}) = \varnothing.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Таким образом, на отрезках $[m_k, m_k/(1-hD)]$ последовательность λ представляет собой арифметическую прогрессию с разностью h, на полуинтервалах $(m_k/(1-hD), m_k^2]$ – арифметическую прогрессию с разностью $1/D$, а на интервалах (m_k^2, m_{k+1}) элементы λ отсутствуют.

Очевидно, что шаг полученной последовательности равен h. Покажем, что ее верхняя плотность равна D, а затем отыщем асимптотику $\ln|L(R_k)|$ (последовательность $R_k = r_k + O(1)$ будет определена ниже). С этой целью найдем функцию $N(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1$ на участках $[m_k, m_{k+1}]$ с “достаточно хорошей” точностью. Ввиду (10.3) имеем

$$N(m_k) = N(\sqrt{m_k}\,) = O(\sqrt{m_k}\,). \tag{11.3}$$

Если $m_k < x \leqslant m_k/(1-hD)$, то

$$N(x) = N(m_k) + \frac{x - m_k}{h} + O(1). \tag{12.3}$$

При $m_k/(1-hD) < x \leqslant m_k^2$ имеем

$$N(x) = N\left(\frac{m_k}{1-hD}\right) + \left(x - \frac{m_k}{1-hD}\right)D + O(1) \tag{13.3}$$

и, наконец,

$$N(x) = N(m_k^2), \qquad m_k^2 < x < m_{k+1}. \tag{14.3}$$

Из соотношений (10.3) и (11.3) (напоминаем, что $p = 1/h$) находим

$$\frac{N(x)}{x} = p\left(1 - \frac{m_k}{x}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \qquad m_k \leqslant x \leqslant \frac{m_k}{1 - hD}\,; \tag{15.3}$$

а так как на этом участке $m_k/x \geqslant 1 - hD$, то получаем оценку

$$\frac{N(x)}{x} \leqslant D + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \qquad m_k \leqslant x \leqslant \frac{m_k}{1 - hD}\,. \tag{16.3}$$

Кроме того, из (15.3) вытекает асимптотическое равенство

$$N\left(\frac{m_k}{1 - hD}\right) = \frac{m_k D}{1 - hD} + O(\sqrt{m_k}\,) \quad (k \to \infty). \tag{17.3}$$

Следовательно, верхняя плотность последовательности λ не меньше D. Соотношения (17.3) и (12.3)–(14.3) убеждают нас в справедливости неравенства (16.3) при $x \in [m_k/(1 - hD), m_{k+1}]$. Из сказанного заключаем, что верхняя плотность λ в точности равна D. Легко видеть, что все постоянные в символах O зависят только от чисел h и D.

Теперь определим R_k. Возьмем ближайший справа к r_k элемент последовательности λ, который обозначим через λ_{ν_k}. Положим $R_k = \lambda_{\nu_k} + h/2$, если $r_k > \lambda_{\nu_k} - h/2$, и $R_k = \lambda_{\nu_k} - h/2$, если $r_k \leqslant \lambda_{\nu_k} - h/2$. Поскольку r_k лежит на тех участках, где λ является арифметической прогрессией с разностью h, то $R_k \in [r_k, r_k + h)$.

Обозначим $\varphi_k(t) = \dfrac{N(R_k t)}{R_k t}$ и покажем, что функции φ_k в некотором смысле "достаточно хорошо" приближаются функцией ψ_{A_0} при $k \to \infty$, где A_0 и ψ_A определены соотношениями (5.3) и (4.3), в которых B следует заменить на D, а p на h. А именно для разности $g_k(t) = \varphi_k(t) - \psi_{A_0}(t)$ установим справедливость равенства

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{+\infty} \frac{g_k(t) - g_k(1)}{t^2 - 1}\, dt = 0. \tag{18.3}$$

С этой целью дадим оценки сверху для $g_k(t) - g_k(1)$ на различных участках $\mathbb{R}_+$.

При $t \in [0, \sqrt{m_k}/R_k] \cup [m_k^2/R_k, +\infty)$ воспользуемся тривиальной оценкой

$$g_k(t) - g_k(1) = O(1). \tag{19.3}$$

Если $t \leqslant q = \dfrac{p - A_0}{p}$, то $R_k t \leqslant \dfrac{p - A_0}{p}(r_k + h) = m_k + O(1)$. Отсюда и из (11.3) находим

$$\varphi_k(t) \leqslant \frac{N(m_k + O(1))}{R_k t} = \frac{N(m_k) + O(1)}{R_k t} = \frac{O(\sqrt{m_k}\,)}{R_k t}\,.$$

А так как на отрезке $[0, q]$ выполняется равенство $\psi_{A_0}(t) = 0$, то

$$g_k(t) = \frac{O(\sqrt{m_k})}{R_k t}\,, \qquad 0 < t \leqslant q. \tag{20.3}$$

Если $q < t \leqslant \dfrac{p-A_0}{p-D}$, то

$$\begin{aligned} m_k &= r_k q < r_k t \leqslant R_k t \leqslant (r_k+h)\frac{p-A_0}{p-D} \\ &= \left(\frac{pm_k}{p-A_0}+h\right)\frac{p-A_0}{p-D} = \frac{pm_k}{p-D}+O(1) = \frac{m_k}{1-hD}+O(1). \end{aligned}$$

В силу этих ограничений на $R_k t$ из (11.3) и (12.3) находим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \left(\frac{R_k t - m_k}{h} + O(\sqrt{m_k}\,)\right)(R_k t)^{-1} \\ &= p\left(1-\frac{m_k}{R_k t}\right) + O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right) = p\left(1-\frac{q}{t}\right) + O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right) \\ &= \psi_{A_0}(t) + O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right). \end{aligned}$$

Поэтому приходим к равенству

$$g_k(t) = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right), \qquad \frac{p-A_0}{p} < t \leqslant \frac{p-A_0}{p-D}\,, \tag{21.3}$$

а так как $\dfrac{p-A_0}{p} < 1 < \dfrac{p-A_0}{p-D}$, то

$$g_k(1) = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k}\right). \tag{22.3}$$

Как легко видеть, постоянные в символах O зависят от чисел h и D, но не зависят ни от t, ни от k.

Если $\dfrac{p-A_0}{p-D} < t \leqslant \dfrac{m_k^2}{R_k}$, то $\dfrac{m_k}{1-hD} < R_k t \leqslant \dfrac{m_k^2}{R_k}$. Поэтому из (13.3) и (17.3) находим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) = \frac{N(R_k t)}{R_k t} &= \left(\frac{m_k D}{1-hD} + O(\sqrt{m_k}\,) + \left(R_k t - \frac{m_k}{1-hD}\right)D\right)(R_k t)^{-1} \\ &= D + O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_k(t) = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right), \qquad \frac{p-A_0}{p-D} < t \leqslant \frac{m_k^2}{R_k}\,. \tag{23.3}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E_{1,k} &= \left[0, \frac{\sqrt{m_k}}{R_k}\right] \cup \left[\frac{m_k^2}{R_k}, +\infty\right), \\ E_{2,k} &= \left(1-\frac{h}{2R_k}, 1+\frac{h}{2R_k}\right), \\ E_{3,k} &= \mathbb{R}_+ \setminus (E_{1,k} \cup E_{2,k}) \end{aligned}$$

и воспользуемся очевидным представлением

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_k(t)-g_k(1)}{t^2-1}\,dt = I_{1,k}+I_{2,k}+I_{3,k}, \tag{24.3}$$

где

$$I_{j,k} = \int_{E_{j,k}} \frac{g_k(t)-g_k(1)}{t^2-1}\,dt.$$

Из (19.3) находим

$$I_{1,k} = O\biggl(\int_{E_{1,k}} \frac{dt}{|t^2-1|}\biggr) = O\biggl(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k}+\frac{R_k}{m_k^2}\biggr) = O\biggl(\frac{1}{\sqrt{R_k}}\biggr). \tag{25.3}$$

Если $t \in E_{2,k}$, то $|R_k t - R_k| \leqslant h/2$, а так как расстояние между соседними элементами λ не меньше h и точки R_k выбирались посередине между ними, то $N(R_k t) = N(R_k)$. Поэтому

$$\varphi_k(t)-\varphi_k(1) = \frac{N(R_k)}{R_k}\biggl(\frac{1}{t}-1\biggr) = O(t-1), \qquad t \in E_{2,k}. \tag{26.3}$$

Из определения ψ_{A_0} находим

$$\psi_{A_0}(t)-\psi_{A_0}(1) = O(t-1), \qquad t \in E_{2,k}. \tag{27.3}$$

Вычитая (27.3) из (26.3), приходим к оценке

$$g_k(t)-g_k(1) = O(t-1), \qquad t \in E_{2,k},$$

откуда

$$I_{2,k} = O\biggl(\int_{E_{2,k}} \biggl|\frac{t-1}{t^2-1}\biggr|\,dt\biggr) = O\biggl(\frac{1}{R_k}\biggr). \tag{28.3}$$

Из (20.3)–(23.3) заключаем, что на множестве $E_{3,k}$ выполняется оценка $g_k(t) = O\biggl(\dfrac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\biggr)$. Отсюда и из (22.3) получаем

$$I_{3,k} = O\biggl(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k}\biggr)\cdot\int_{E_{3,k}}\biggl(1+\frac{1}{t}\biggr)\frac{dt}{t^2-1} = O\biggl(\frac{\ln R_k}{\sqrt{R_k}}\biggr). \tag{29.3}$$

Из (24.3), (25.3), (28.3) и (29.3) следует (18.3).

Согласно лемме 1 имеем

$$-\frac{\ln|L(R_k)|}{R_k} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\varphi_k(t)-\varphi_k(1)}{t^2-1}\,dt. \tag{30.3}$$

Из (30.3), (18.3) и определения g_k находим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{R_k}\ln\frac{1}{L(R_k)} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\psi_{A_0}(t)-A_0}{t^2-1}\,dt.$$

(Легко проверяется, что $\psi_A(1) = A$.) Но как раз A_0 и взято таким образом, что по лемме 3
$$2\int_0^{+\infty} \frac{\psi_{A_0}(t) - A_0}{t^2 - 1}\,dt = J\left(\frac{1}{h}, D\right).$$
Следовательно,
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{R_k} \ln \frac{1}{L(R_k)} = J\left(\frac{1}{h}, D\right). \tag{31.3}$$

Проверим, что справедлива асимптотика
$$\ln|L(R_k)| = \ln|L'(\lambda_{\nu_k})| + O(\ln R_k). \tag{32.3}$$

Поскольку
$$L'(\lambda_m) = -2\lambda_m^{-1} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$
а $R_k = \lambda_{\nu_k} \pm h/2$, то
$$\ln|L(R_k)| - \ln|L'(\lambda_{\nu_k})| = S_{\nu_k}(R_k) - S_{\nu_k}(\lambda_{\nu_k}) + O(\ln R_k),$$
где
$$S_m(x) = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{\lambda_n^2}\right|.$$
Функция $S_m(x)$ на интервале $(\lambda_{m-1}, \lambda_{m+1})$ аналитична и действительнозначна. Поэтому по теореме Лагранжа существует точка ξ_k, лежащая между λ_{ν_k} и R_k, такая, что выполняется равенство
$$|S_{\nu_k}(R_k) - S_{\nu_k}(\lambda_{\nu_k})| = \frac{h}{2}\,|S'(\xi_k)| = h\left|\sum_{\substack{n=1\\ n\neq\nu_k}}^{\infty} \frac{\xi_k}{\lambda_n^2 - \xi_k^2}\right| \leqslant h \sum_{\substack{n=1\\ n\neq\nu_k}}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\lambda_n^2 - \xi_k^2}\right|.$$
Легко устанавливается, что последняя сумма по $|\lambda_n - \xi_k| \leqslant \xi_k/2$ есть $O(\ln \xi_k)$, а сумма по $|\lambda_n - \xi_k| > \xi_k/2$ вносит вклад $O(1)$. Соотношение (32.3) доказано.

Из (32.3) и (31.3) получаем $\delta(\lambda) \geqslant J(1/h, D)$, а вследствие установленного ранее утверждения 1) имеем $\delta(\lambda) \leqslant J(1/h, D)$. Тем самым $\delta(\lambda) = J(1/h, D)$ и утверждение 2) доказано в случае $hD < 1$.

Если $hD = 1$, то утверждение 2) доказывается намного проще, поэтому приведем лишь краткую схему его доказательства. Вид экстремальной последовательности в этом случае таков:
$$\begin{aligned}&\lambda \cap [m_k, m_k^2] = \bigl\{m_k + \nu h : \nu \in \mathbb{N},\ \nu \leqslant D(m_k^2 - m_k)\bigr\},\\ &\lambda \cap (m_k^2, m_{k+1}) = \varnothing.\end{aligned}$$
Далее полагаем $r_k = \sqrt{2}\,m_k$, а R_k определяется по r_k, как и ранее. Функция ψ, которой будет приближаться $\varphi_k(t)$, имеет вид
$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/\sqrt{2},\\ D\left(1 - \dfrac{1}{t\sqrt{2}}\right), & t \geqslant 1/\sqrt{2}.\end{cases}$$

Затем проводятся выкладки, аналогичные предыдущим, и устанавливается, что

$$\delta(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)-\psi(1)}{t^2-1}\,dt = J(D,D) = D\ln(3+\sqrt{8}\,).$$

Таким образом, для того чтобы теорема 1 была полностью доказана, осталось убедиться в справедливости лемм 1–3.

Доказательство леммы 1. Заметим сперва, что для любой абсолютно непрерывной функции f на $[\mu_1,+\infty)$, удовлетворяющей ограничениям

$$\lim_{x\to+\infty} N(x)f(x) = 0, \qquad \int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)|f'(x)|\,dx < +\infty,$$

справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\mu_n) = -\int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'(x)\,dx. \tag{33.3}$$

Действительно, при любом $m\in\mathbb{N}$ имеем [12; приложение, § 1]

$$\sum_{n=1}^{m} f(\mu_n) = N(\mu_m)f(\mu_m) - \int_{\mu_1}^{\mu_m} N(x)f'(x)\,dx. \tag{34.3}$$

(В [12], правда, предполагалось, что $f\in C^1[\mu_1,\mu_m]$, но доказательство равенства (34.3) проходит без изменений и для любой функции, от которой требуется лишь абсолютная непрерывность на $[\mu_1,\mu_m]$.) Переходя в соотношении (34.3) к пределу при $m\to+\infty$, получаем (33.3).

Теперь возьмем произвольное положительное число ε, которое меньше расстояния от R до ближайшего элемента последовательности μ, и положим

$$f_{R,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \ln\left|1-\dfrac{R^2}{x^2}\right|, & x\in(0,+\infty)\setminus(R-\varepsilon,R+\varepsilon),\\ f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon) + (x-(R-\varepsilon))\dfrac{f_{R,\varepsilon}(R+\varepsilon)-f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon)}{2\varepsilon}\,, & \\ \qquad x\in(R-\varepsilon,R+\varepsilon). & \end{cases} \tag{35.3}$$

Из (35.3) видно, что функция f непрерывна на $(0,+\infty)$, линейна на отрезке $[R-\varepsilon,R+\varepsilon]$ и имеет непрерывную производную всюду, за исключением разве лишь двух точек: $R-\varepsilon$ и $R+\varepsilon$. Из сказанного вытекает, что функция $f_{R,\varepsilon}$ является абсолютно непрерывной на $(0,+\infty)$. Ввиду (1.3) $\lim_{x\to\infty} N(x)f_{R,\varepsilon}(x) = 0$ и интеграл $\displaystyle\int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'_{R,\varepsilon}(x)\,dx$ абсолютно сходится. Следовательно,

$$\ln|L(R)| = \sum_{n=1}^{\infty} f_{R,\varepsilon}(\mu_n) = -\int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'_{R,\varepsilon}(x)\,dx. \tag{36.3}$$

Вычисляя $f'_{R,\varepsilon}(x)$ и учитывая равенство $N(x) = 0$ при $0 < x < \mu_1$, из (36.3) находим

$$-\ln|L(R)| = \int_{\mathbb{R}_+\setminus[R-\varepsilon,R+\varepsilon)} \frac{N(x)}{x}\cdot\frac{2R^2}{x^2-R^2}\,dx + N(R)\bigl(f_{R,\varepsilon}(R+\varepsilon) - f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon)\bigr).$$

Сделав в интеграле замену переменного $x = Rt$ и вычислив разность $f_{R,\varepsilon}(R+\varepsilon) - f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon)$, получим

$$-\frac{\ln|L(R)|}{2R} = \int_{G_\varepsilon} \frac{\varphi_R(t)\,dt}{t^2-1} + \frac{\varphi_R(1)}{2}\ln\biggl(\frac{2R+\varepsilon}{2R-\varepsilon}\Bigl(\frac{R-\varepsilon}{R+\varepsilon}\Bigr)^2\biggr), \tag{37.3}$$

где $G_\varepsilon = G(R,\varepsilon) = [0, 1-\varepsilon/R] \cup [1+\varepsilon/R, +\infty)$, а функция φ_R определена в формулировке леммы 1. Нетрудно сосчитать, что

$$\int_{G_\varepsilon} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\biggl(\frac{1+\varepsilon/(2R)}{1-\varepsilon/(2R)}\biggr). \tag{38.3}$$

Соотношения (37.3) и (38.3) приводят нас к равенству (R фиксировано, $\varepsilon \to 0$)

$$-\frac{\ln|L(R)|}{2R} = \int_{G_\varepsilon} \frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2-1}\,dt + O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем утверждение леммы 1.

Доказательство леммы 2. Так как

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D, \qquad \liminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h,$$

то существует такой номер n_0, что при всех $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\frac{n}{\lambda_n} < B, \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{1}{p}\,. \tag{39.3}$$

Для любого $m > n_0 + 1$ определим последовательность

$$\mu = \mu(m) = \bigl\{\lambda_n : n \geqslant n_0 + 1,\ n \neq m\bigr\}.$$

Получившуюся последовательность $\mu(m)$ занумеруем в порядке возрастания μ_1, μ_2, μ_3 и т. д. Положим

$$F_m = \prod_{n=1}^{\infty}\biggl|1 - \frac{R^2}{\mu_n^2}\biggr|.$$

Через $N(x) = N(x,m)$ обозначим считающую функцию последовательности μ: $N(x) = \sum_{\mu_n\leqslant x} 1$. Из определения последовательности μ, функции L и величин F_m вытекает асимптотика

$$\ln L'(\lambda_m) = \ln F_m + O(\ln\lambda_m) \quad (m \to +\infty),$$

откуда заключаем, что для доказательства леммы 2 достаточно установить справедливость неравенства

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{1}{F_m} \leqslant J(p,B). \tag{40.3}$$

Обозначим $R = \lambda_m$. С учетом введенных обозначений и леммы 1 справедливо представление

$$-\frac{\ln F(R)}{R} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_R(t)-\varphi_R(1)}{t^2-1}\,dt, \tag{41.3}$$

где $\varphi_R(t) = \dfrac{N(Rt)}{Rt}$.

Из (39.3) и определения последовательности μ находим

$$\frac{n}{\mu_n} \leqslant B, \quad \mu_{n+1}-\mu_n > \frac{1}{p} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

и расстояние от R до ближайшего к нему элемента последовательности μ не меньше $1/p$. Ввиду сказанного при любом $y > 0$ имеем

$$N(R+y) \leqslant N(R) + py, \tag{42.3}$$

$$N(R) \leqslant N(R-y) + py. \tag{43.3}$$

При $t > 1$ из (42.3) получаем

$$\begin{aligned}\frac{N(Rt)}{Rt} &\leqslant \frac{N(R)+p(Rt-R)}{Rt} = \frac{N(R)}{Rt} + \frac{N(R)}{R} - \frac{N(R)}{R} + p\left(1-\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{N(R)}{R} + \frac{N(R)}{R}\left(\frac{1}{t}-1\right) + p\left(1-\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

Или же в других обозначениях

$$\varphi_R(t) \leqslant \varphi_R(1) + \bigl(p-\varphi_R(1)\bigr)\left(1-\frac{1}{t}\right) \qquad \forall\, t \in (1,+\infty). \tag{44.3}$$

Аналогично при $t \in (0,1)$ из (43.3) находим

$$\frac{N(R)}{Rt} \leqslant \frac{N(Rt)}{Rt} + p\left(\frac{1}{t}-1\right)$$

или же в других обозначениях

$$\frac{\varphi_R(1)}{t} \leqslant \varphi_R(t) + p\left(\frac{1}{t}-1\right). \tag{45.3}$$

Представляя левую часть (45.3) в виде $\varphi_R(1)/t = \varphi_R(1) + \varphi_R(1)(1/t-1)$ и перенося второе слагаемое в правую часть, приходим к неравенству

$$\varphi_R(1) \leqslant \varphi_R(t) + \bigl(p-\varphi_R(1)\bigr)\left(\frac{1}{t}-1\right) \qquad \forall\, t \in (0,1). \tag{46.3}$$

Обозначая $\varphi_R(1) = A$ и учитывая оценку сверху $\varphi_R(t) \leqslant B$ ($\forall\, t > 0$), которая является тривиальным следствием неравенства $n/\mu_n \leqslant B$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$), из (44.3) получаем

$$\begin{aligned}\varphi_R(t) &\leqslant \min\biggl(B, A + (p-A)\biggl(1 - \frac{1}{t}\biggr)\biggr)\\ &= \min\biggl(B, p\biggl(1 - \frac{p-A}{pt}\biggr)\biggr) \qquad \forall\, t \in (1, +\infty).\end{aligned} \tag{47.3}$$

С другой стороны, из (4.3) следует тождество

$$\psi_A(t) = \min\biggl(B, p\biggl(1 - \frac{p-A}{pt}\biggr)\biggr) \qquad \forall\, t > 1,$$

которое вместе с (47.3) приводит к неравенству

$$\varphi_R(t) \leqslant \psi_A(t) \qquad \forall\, t > 1.$$

А так как $\psi_A(1) = A = \varphi_R(1)$, то получаем

$$\varphi_R(t) - \varphi_R(1) \leqslant \psi_A(t) - A \qquad \forall\, t > 1. \tag{48.3}$$

Используя очевидную оценку $\varphi_R(t) \geqslant 0$, из (46.3) и (4.3) при $t \in (0,1)$ находим

$$\begin{aligned}\varphi_R(1) - \varphi_R(t) &\leqslant \min\biggl(A, (p-A)\biggl(\frac{1}{t} - 1\biggr)\biggr)\\ &= \min\biggl(A, A + \frac{p-A}{t} - p\biggr)\\ &= A + \min\biggl(0, p\biggl(\frac{p-A}{pt} - 1\biggr)\biggr)\\ &= A - \max\biggl(0, p\biggl(1 - \frac{p-A}{pt}\biggr)\biggr) = A - \psi_A(t).\end{aligned} \tag{49.3}$$

Из (48.3) и (49.3) следуют неравенства

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} &\leqslant \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} \qquad \forall\, t > 1,\\ \frac{\varphi_R(1) - \varphi_R(t)}{1 - t^2} &\leqslant \frac{A - \psi_A(t)}{1 - t^2} \qquad \forall\, t \in (0,1).\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} \leqslant \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} \qquad \forall\, t \in (0, +\infty), \quad t \neq 1,$$

где $A = \varphi_R(1)$. Интегрируя это неравенство от 0 до ∞, с учетом (41.3) находим

$$-\frac{\ln F(R)}{R} \leqslant 2\int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1}\, dt. \tag{50.3}$$

Величина, стоящая в правой части (50.3), в формулировке леммы 2 обозначена через $J(p,B)$. Следовательно,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{1}{F_m} \leqslant \sup_{0 \leqslant A \leqslant B} J(p,B,A) = J(p,B).$$

Тем самым неравенство (40.3) установлено, а как отмечалось выше, это доказывает лемму 2.

Доказательство леммы 3. Вычислим интеграл $J(p,B,A)$. Исходя из определения функции $\psi_A(t)$ находим

$$\begin{aligned} J(p,B,A) &= \int_0^{\frac{p-A}{p}} \frac{-2A}{t^2-1}\,dt + 2(p-A)\int_{\frac{p-A}{p}}^{\frac{p-A}{p-B}} \frac{1-1/t}{t^2-1}\,dt + 2\int_{\frac{p-A}{p-B}}^{+\infty} \frac{B-A}{t^2-1}\,dt \\ &= A\ln\frac{1+t}{1-t}\bigg|_0^{\frac{p-A}{p}} + 2(p-A)\ln\frac{t}{t+1}\bigg|_{\frac{p-A}{p}}^{\frac{p-A}{p-B}} + (B-A)\ln\frac{t-1}{t+1}\bigg|_{\frac{p-A}{p-B}}^{+\infty} \\ &= A\ln\frac{2p-A}{A} + 2(p-A)\ln\frac{2p-A}{2p-A-B} + (B-A)\ln\frac{2p-A-B}{B-A}. \end{aligned} \tag{51.3}$$

Из (51.3) видно, что при фиксированных B и p (напомним, что $0<B<p$) функция $f(A) = J(p,B,A)$ является непрерывной на отрезке $[0,B]$, имеет непрерывную производную на интервале $(0,B)$ и

$$\lim_{A\to+0} f'(A) = +\infty, \qquad \lim_{A\to B-0} f'(A) = -\infty.$$

Из сказанного заключаем, что функция f на отрезке $[0,B]$ достигает своего максимума и точка максимума лежит на интервале $(0,B)$. Вычисляя производную f, находим

$$\begin{aligned} f'(A) &= \ln\frac{2p-A}{A} - 2\ln\frac{2p-A}{2p-A-B} - \ln\frac{2p-A-B}{B-A} \\ &= \ln\frac{(2p-A-B)(B-A)}{A(2p-A)}, \qquad 0<A<B. \end{aligned} \tag{52.3}$$

(Непосредственно проверяется, что рациональные слагаемые, получающиеся в результате дифференцирования по A выражения (51.3), в сумме дают тождественный нуль.) Из (52.3) следует, что уравнение $f'(A)=0$ равносильно квадратному уравнению

$$(2p-A-B)(B-A) = A(2p-A),$$

которое на интервале $(0,B)$ имеет единственный корень

$$A_0(p,B) = p - \sqrt{p^2 - pB + B^2/2}\,. \tag{53.3}$$

Следовательно, функция $f(A)$ достигает максимума на отрезке $[0,B]$ именно в этой точке и этот максимум, обозначенный через $J(p,B)$, равен

$$\begin{aligned} J(p,B) &= J\bigl(p,B,A_0(p,B)\bigr) \\ &= B\biggl(\frac{A_0}{B}\ln\frac{2p/B - A_0/B}{A_0/B} + 2\biggl(\frac{p}{B} - \frac{A_0}{B}\biggr)\ln\frac{2p/B - A_0/B}{2p/B - A_0/B - 1} \\ &\qquad + \biggl(1 - \frac{A_0}{B}\biggr)\ln\frac{2p/B - 1 - A_0/B}{1 - A_0/B}\biggr). \end{aligned}$$

Согласно (53.3) имеем $A_0/B = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2} \overset{\text{def}}{=} a$, где $s = p/B$ (см. (6.3)). С учетом этих обозначений находим

$$J(p,B) = B\biggl(a\ln\frac{s-a}{a} + 2(s-a)\ln\frac{2s-a}{2s-a-1} + (1-a)\ln\frac{2s-a-1}{1-a}\biggr),$$

а это и требовалось установить. Тем самым лемма 3, а вместе с ней и теорема 1 полностью доказаны.

§ 4. Доказательства следствий 1–4

Доказательство следствия 1. Выводить следствие 1 из явной формулы (1.2) технически сложно. Поэтому воспользуемся доказанным соотношением (7.3), согласно которому $\Delta(h,D) = J(1/h,D)$. Сначала установим строгое возрастание $J(p,D)$ по D на $[0,p]$ при фиксированном p. В силу непрерывности $J(p,D)$ достаточно сделать это на интервале $(0,p)$. Пусть $0 < B_1 < B_2 < p$. Покажем, что

$$J(p,B_1) < J(p,B_2). \tag{1.4}$$

Положим $A = A_0(p,B_1)$ (см. (5.3)). Именно в этой точке $J(p,B_1,A)$ достигает своего максимума.

Ввиду (3.3) имеем

$$J(p,B_1,A) = J(p,B_1), \qquad J(p,B_2,A) \leqslant J(p,B_2).$$

Поэтому для доказательства (1.4) достаточно установить неравенство

$$J(p,B_1,A) < J(p,B_2,A), \tag{2.4}$$

т.е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p,B_1,t)-A}{t^2-1}\,dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p,B_2,t)-A}{t^2-1}\,dt.$$

Из определения функций $\psi_A(p,B,t)$, данного формулами (2.4), следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\psi_A(p,B_1,t) = \psi_A(p,B_2,t), &&t \in \left[0, \frac{p-A}{p-B_1}\right],\\ &\psi_A(p,B_1,t) = B_1 < \psi_A(p,B_2,t), &&t > \frac{p-A}{p-B_1}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Вычтя из обеих частей (3.4) число A и разделив разность на t^2-1 (при этом знак неравенства сохранится: так как $\dfrac{p-A}{p-B_1} > 1$, следовательно, при $t > \dfrac{p-A}{p-B_1}$ выражение t^2-1 положительно), находим

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_A(p,B_1,t)-A}{t^2-1} = \frac{\psi_A(p,B_2,t)-A}{t^2-1}\,, \quad t \in \left[0, \frac{p-A}{p-B_1}\right],\\ &\frac{\psi_A(p,B_1,t)-A}{t^2-1} < \frac{\psi_A(p,B_2,t)-A}{t^2-1}\,, \quad t > \frac{p-A}{p-B_1}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из (4.4) получаем неравенство (2.4) для интегралов

$$J(p,B_1,A) = \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p,B_1,t)-A}{t^2-1}\,dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p,B_2,t)-A}{t^2-1}\,dt = J(p,B_2,A),$$

из которого, как отмечалось выше, следует (1.4).

Теперь установим, что при $0 < h_1 < h_2 < 1/D$ выполняется неравенство $\Delta(h_1, D) > \Delta(h_2, D)$, т.е.

$$J(p_2, D) < J(p_1, D), \qquad D < p_2 < p_1. \tag{5.4}$$

Положим $A = A_0(p_2, D)$. Тогда

$$J(p_2, D, A) = J(p_2, D), \qquad J(p_1, D, A) \leqslant J(p_1, D).$$

Поэтому для доказательства (5.4) достаточно установить неравенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p_2, D, t) - A}{t^2 - 1}\, dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p_1, D, t) - A}{t^2 - 1}\, dt. \tag{6.4}$$

Из (2.4) следуют тождества

$$\begin{aligned} \frac{\psi_A(p, D, t) - A}{t^2 - 1} &= \frac{\min\bigl(A, (p - A)(1/t - 1)\bigr)}{1 - t^2}, \qquad 0 \leqslant t < 1, \\ \frac{\psi_A(p, D, t) - A}{t^2 - 1} &= \frac{\min\bigl(D - A, (p - A)(1/t - 1)\bigr)}{1 - t^2}, \quad t > 1, \end{aligned}$$

которые в силу неубывания по p при фиксированных значениях D, A, t их правых частей убеждают нас в справедливости неравенства

$$\frac{\psi_A(p_2, D, t) - A}{t^2 - 1} \leqslant \frac{\psi_A(p_1, D, t) - A}{t^2 - 1} \tag{7.4}$$

при всех $t \geqslant 0$ (в точке $t = 1$ обе части неравенства (7.4) непрерывны). При этом в достаточно малой окрестности точки $t = 1$, где $|(p_1 - A)/t| < \min(A, D - A)$, неравенство (7.4) превращается в строгое. Поэтому справедливо строгое неравенство (6.4) между интегралами, откуда вытекает (5.4). Следствие 1 полностью доказано.

Доказательство следствия 2. Преобразуем выражение (1.2). Имеем

$$\frac{1}{D}\Delta(h, D) = a \ln \frac{1}{a} + (1 - a) \ln \frac{1}{1 - a} + \ln(2s - a) + (2s - a - 1) \ln \frac{2s - a}{2s - a - 1}. \tag{8.4}$$

Ввиду очевидных соотношений

$$\begin{gathered} \max_{0 < x < 1} \left(x \ln \frac{1}{x} + (1 - x) \ln \frac{1}{1 - x} \right) = \ln 2, \\ y \ln \frac{1 + y}{y} < 1 \quad \forall\, y > 0 \quad (\text{здесь } y = 2s - a - 1), \\ 2s - a = s + \sqrt{s^2 - s + 1/2} \end{gathered}$$

приходим к (2.2). Неравенства (3.2) тривиально получаются из (2.2). Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Подставляя значение $s = 1$ в правую часть (1.2) и производя несложные вычисления, получаем (4.2).

Теперь на луче $s \geqslant 1$ рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
&g(s) = \ln(3+\sqrt{8}\,) + \ln s, \\
&f(s) = a\ln\frac{1}{a} + (1-a)\ln\frac{1}{1-a} + \ln(2s-a) + (2s-a-1)\ln\frac{2s-a}{2s-a-1}\,,
\end{aligned}$$

где $a = a(s) = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$. Из (8.4) видно, что неравенство (5.2) можно переписать в эквивалентной форме:

$$f(s) > g(s) \quad \forall\, s > 1.$$

Выше было показано, что $f(1) = g(1)$, а так как функции f и g непрерывно дифференцируемы на $[1, +\infty)$, то достаточно установить справедливость неравенства

$$f'(s) > g'(s) = \frac{1}{s} \quad \forall\, s > 1. \tag{9.4}$$

Несложно проверить, что функции

$$f_1(x) = x\ln\frac{1}{x} + (1-x)\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{и} \quad f_2(y) = y\ln\biggl(1+\frac{1}{y}\biggr)$$

имеют положительную производную на промежутках $(0, 1/2)$ и $(0, +\infty)$ соответственно. Имеем также

$$a'(s) = 1 - \frac{s-1/2}{\sqrt{s^2-s+1/2}} = \frac{1}{4\sqrt{s^2-s+1/2}\,\bigl(\sqrt{s^2-s+1/2}+s-1/2\bigr)}\,, \tag{10.4}$$

$a(1) = 1 - 1/\sqrt{2}$, $\lim_{s\to+\infty} a(s) = 1/2$. Таким образом, при $s > 1$ функция $a(s)$ имеет положительную производную и принимает значения только на интервале $(1-1/\sqrt{2}, 1/2)$. Ввиду сказанного, обозначая $y(s) = 2s - a - 1$, находим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}f_1(a) = \frac{df_1(a)}{da}a'(s) > 0 \quad \forall\, s > 1, \\
&\frac{d}{ds}f_2(y) = \frac{df_2(y)}{dy}y'(s) = (2-a'(s))f_2'(y) > 0 \quad \forall\, s > 1.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что для доказательства (9.4) достаточно установить, что

$$\frac{d\ln(2s-a)}{ds} > \frac{1}{s} \quad \forall\, s > 1.$$

Несложные преобразования показывают, что последнее неравенство равносильно следующему:

$$sa'(s) < a(s) \quad \forall\, s > 1. \tag{11.4}$$

На основании (10.4) заключаем, что функция $sa'(s)$ убывает на $[1, +\infty)$, $a(s)$ возрастает на этом луче и $a'(1) = a(1)$. Поэтому приходим к (11.4) и тем самым (5.2) доказано.

Положим $g_1(s) = 2 + \ln s$. Тогда неравенство (6.2) перепишется в виде $f(s) > g_1(s)$. Так как $g_1'(s) = 1/s < f'(s)$, то достаточно проверить, что $f(2) > g_1(2)$. Имеем $a(2) = 2 - \sqrt{2.4} = a_0$,

$$\begin{aligned} f(2) &= a_0 \ln \frac{1}{a_0} + (1 - a_0) \ln \frac{1}{1 - a_0} + \ln(4 - a_0) + (3 - a_0) \ln \frac{4 - a_0}{3 - a_0} \\ &> 2.02 + \ln 2 > 2 + \ln 2 = g_1(2). \end{aligned}$$

Следствие 3 полностью доказано.

Следствие 4 легко выводится из (8.4) и известных асимптотик логарифмической и степенной функций.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Возьмем произвольное $D \in (0, 1/6]$ и зафиксируем его. Положим $m = [4/D] - 3$,

$$u = \frac{4}{m+3} \ln \frac{m+3}{\pi \sqrt[4]{2}}\,, \qquad \alpha = \frac{4\pi}{m+3}\,,$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \quad \theta_2 = \arccos\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \tag{1.5}$$

$$P(z) = \frac{e^{mz}(e^{2z} - 2e^{z+u} \cos\theta_1 + e^{2u})(e^{2z} - 2e^{z+u} \cos\theta_2 + e^{2u})}{(1 + 2e^u \cos\theta_1 + e^{2u})(1 + 2e^u \cos\theta_2 + e^{2u})}\,,$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(P(z)\bigr)^{k!}. \tag{2.5}$$

Имеем очевидные соотношения

$$\bigl(P(z)\bigr)^{k!} = \sum_{\nu=mk!}^{(m+4)k!} c_\nu e^{\nu z}, \tag{3.5}$$

$$\max_{\nu \in \mathbb{R}} |P(iy)| = |P(\pi i)| = 1, \tag{4.5}$$

$$|P(iy)| < 1, \quad \text{если} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{\pi(2n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}. \tag{5.5}$$

Из (2.5) и (3.5) находим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n z), \tag{6.5}$$

где

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigl(\mathbb{N} \cap [m\,k!, (m+4)k!]\bigr).$$

Из (3.5) и (5.5) получаем оценку $|c_\nu| < 1$ для всех $\nu \in \lambda$, а поскольку спектры полиномов из экспонент $(P(z))^{k!}$ при $k \in \mathbb{N}$ не пересекаются (ввиду (1.5) при

$D \leqslant 1/6$ имеем $m \geqslant 21$ и, следовательно, $m(k+1)! > (m+4)k!$ при любых $k \geqslant 1$), то приходим к неравенству

$$|a_n| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.5}$$

Из (7.5) следует, что абсцисса сходимости ряда (6.5) неотрицательна; но в точке $z = \pi i$ он расходится, так как этим свойством ввиду (4.5) обладает ряд (2.5). Из сказанного заключаем, что абсцисса сходимости ряда (6.5) равна нулю.

Сейчас мы установим, что область сходимости ряда (2.5) значительно шире, чем у ряда (6.5). С этой целью докажем неравенство

$$\max_{z \in \Pi} |P(z)| < 1, \tag{8.5}$$

где $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant u,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \alpha\}$. Из (8.5) очевидным образом вытекает равномерная сходимость ряда (1.5) в некоторой окрестности прямоугольника Π, и, следовательно, $f(z)$ допускает на Π аналитическое продолжение из левой полуплоскости.[1] Верхняя плотность последовательности λ равна $4/(m+4) < D$, а высота прямоугольника Π равна $2\alpha \geqslant 2\pi D$. Поэтому исходя из определения $l(D)$ и аналитичности f на Π (можно дополнить λ до последовательности верхней плотности D, а коэффициенты при экспонентах с новыми показателями положить нулями) заключаем, что

$$l(D) > u \geqslant D \ln \frac{\sqrt[4]{128}}{\pi D}$$

и требуемая оценка снизу тем самым будет получена.

Перейдем к доказательству (8.5). Нетрудно убедиться в том, что при $z = u + iy$, $y \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ справедливо тождество

$$|e^{2z} - 2e^{u+z}\cos\theta + e^{2u}| = 2e^{2u}|\cos y - \cos\theta|. \tag{9.5}$$

Из (9.5) вытекает, что

$$|P(u+iy)| = \frac{4e^{(m+4)u}|(\cos y - \cos\theta_1)(\cos y - \cos\theta_2)|}{(1 + 2e^u\cos\theta_1 + e^{2u})(1 + 2e^u\cos\theta_2 + e^{2u})}\,.$$

Из (1.5) видно, что функция $(\cos y - \cos\theta_1)(\cos y - \cos\theta_2)$ на отрезке $[0,\alpha]$ достигает максимума в точках 0 и α, а минимума – в точке $\arccos(\cos^2(\alpha/2))$. При этом ее значения в трех упомянутых точках равны между собой по абсолютной величине и

$$(\cos\alpha - \cos\theta_1)(\cos\alpha - \cos\theta_2) = \frac{1}{2}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,.$$

[1]Этот способ построения “далеко продолжаемых” рядов экспонент и степенных рядов с верхней плотностью показателей, меньшей их максимальной плотности (см. [3], [7]), основанный на явлении сверхсходимости (сходимости некоторой подпоследовательности частичных сумм ряда в некоторой области, принадлежащей множеству расходимости самого ряда), использовался Фабером, Пойа, Мандельбройтом и другими математиками. Функции $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(Q(z))^{k!}$, где Q – специально подобранный для решаемой задачи полином, встречались в их работах. Заслуга автора здесь состоит лишь в отыскании полинома из экспонент P, в некотором смысле близкого к оптимальному для рассматриваемой задачи – оценки снизу $l(D)$.

Ввиду (1.5) имеем также

$$e^{(m+3)u} = \frac{1}{2}\left(\frac{m+3}{\pi}\right)^4.$$

Из сказанного заключаем, что

$$\max_{0\leqslant y\leqslant\alpha} |P(u+iy)| = |P(u+i\alpha)|$$
$$= \left(\frac{m+3}{\pi}\right)^4 \sin^4\frac{\alpha}{2}\cdot e^4(1+2e^u\cos\theta_1+e^{2u})^{-1}(1+2e^u\cos\theta_2+e^{2u})^{-1}.$$

В силу (1.5) и ограничения $D\leqslant 1/6$ выполняются неравенства

$$0<\theta_1<\theta_2<\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}\,,\qquad u\geqslant\frac{\alpha}{3}\,,$$

откуда находим

$$\cos\theta_j e^u \geqslant \cos\alpha\exp\frac{\alpha}{3}\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$|P(u+i\alpha)| < \left(\frac{m+3}{\pi}\right)^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 e^4\bigl(3+e^{2u}\bigr)^{-2} = \left(\frac{4e^{u/2}}{3+e^{2u}}\right)^2.$$

Но $4e^{u/2}<3+e^{2u}$ при всех $u>0$. Окончательно получаем

$$\max_{0\leqslant y\leqslant\alpha}|P(u+iy)| = |P(u+i\alpha)|<1. \tag{10.5}$$

Для оценки $|P(z)|$ на верхней стороне прямоугольника Π воспользуемся тождеством

$$|e^{2t}-e^{t+i\alpha}\cos\theta+e^{2i\alpha}|^2 = 4e^{2t}\bigl(\operatorname{ch}t-\cos(\alpha-\theta)\bigr)\bigl(\operatorname{ch}t-\cos(\alpha+\theta)\bigr),\quad \alpha,\theta,t\in\mathbb{R}.$$

Отсюда получим

$$U(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left|\frac{P(u-t+i\alpha)}{P(u+i\alpha)}\right|^2$$
$$= e^{-2(m+2)t}\prod_{j=1}^{2}\frac{(\operatorname{ch}t-\cos(\alpha-\theta_j))(\operatorname{ch}t-\cos(\alpha+\theta_j))}{(1-\cos(\alpha-\theta_j))(1-\cos(\alpha+\theta_j))}\,. \tag{11.5}$$

Докажем неравенство

$$U(t)<1,\qquad 0<t\leqslant u. \tag{12.5}$$

Используя тождество

$$\operatorname{ch}t-\cos w = 2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}+2\sin^2\frac{w}{2}$$

и логарифмируя (11.5), получаем неравенство, равносильное (12.5):

$$U_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{2}\left(\ln\left(1+\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta_j}{2}}\right)^2\right)+\ln\left(1+\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\sin\frac{\alpha+\theta_j}{2}}\right)^2\right)\right)$$
$$< 2(m+2)t, \qquad 0<t\leqslant u. \tag{13.5}$$

Поскольку $\dfrac{\ln(1+p^2)}{p} < 0.81$ при всех $p>0$, то при любом $t>0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} U_1(t) &< 0.81\ \operatorname{sh}\frac{t}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha-\theta_j}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\theta_j}{2}}\right) \\ &= 0.81\ \operatorname{sh}\frac{t}{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta_j}{2}}{\cos\theta_j-\cos\alpha}\,. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Ввиду (1.5) имеем

$$\cos\theta_j-\cos\alpha=\left(1-\frac{(-1)^j}{\sqrt{2}}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}\,, \qquad j=1,2. \tag{15.5}$$

Из (14.5) и (15.5) находим

$$U_1(t)<\frac{3.24\ \operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\leqslant\frac{1.08\,t}{\alpha}\cdot 12M_1M_2, \tag{16.5}$$

где

$$M_1=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant\pi/6}\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}<\frac{\pi}{3}\,, \qquad M_2=\max_{0\leqslant t\leqslant 1/3}\frac{2\ \operatorname{sh}\frac{t}{2}}{t}<1.01.$$

Очевидно, что при $0<D\leqslant 1/6$ выполняются неравенства $0<\alpha<\pi/6$ и $0<u\leqslant 1/3$. Таким образом, из (16.5) и (1.5) получаем

$$U_1(t)<\frac{14\,t}{\alpha}<1.2\,t(m+3)<2t(m+2).$$

Тем самым неравенство (13.5), а значит, и (12.5) доказано. Из (12.5) и определения функции U получаем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant u}|P(x+i\alpha)|=|P(u+i\alpha)|. \tag{17.5}$$

Из (5.5), (10.5), (17.5) и принципа симметрии ($P(z)$ принимает на $\mathbb{R}$ действительные значения) получаем, что неравенство $|P(z)|<1$ выполняется на всей границе прямоугольника Π. Следовательно, по принципу максимума справедливо (8.5), а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 3.

Список литературы

1. *Мандельбройт С.* Ряды Дирихле, принципы и методы. М.: Мир, 1973.
2. *Леонтьев А. Ф.* Дирихле ряд // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. С. 183–186.
3. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. 1 // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640; 2 // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 731–777.
4. *Bernstein V.* Alcune osservazioni sopra un teorema di Fabry // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6). 1935. V. 21. №6. P. 780–785.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
6. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
7. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
9. *Братищев А. В.* Возникновение и развитие понятия индекса конденсации // Актуальные вопросы теории функций. Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1987. С. 50–56.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
11. *Левин Б. Я.* Дополнения и исправления к книге “Распределение корней целых функций” // Препринт ФТИНТ АН УССР. Харьков, 1978.
12. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.06.1998