А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение спектральных функций дифференциальных операторов $-y'' - \varepsilon x^2 y$, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 302–306

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm1280

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ $-y'' - \varepsilon x^2 y$

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор $\mathbf{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$ly(x) \equiv -y''(x) - \varepsilon x^2 y(x), \qquad \varepsilon \geqslant 0,$$

и граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ – решения уравнения

$$ly = \lambda y \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\varphi(0,\lambda) = \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha, \qquad \varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha, \qquad \theta(0,\lambda) = \cos\alpha.$$

Тогда функция

$$\chi(x,\lambda) = \theta(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2[0,+\infty) \qquad \forall\lambda: \quad \operatorname{Im}\lambda > 0, \tag{2}$$

где $m(\lambda)$ – функция Вейля–Титчмарша оператора $\mathbf{L}$ (см. [1]).

При $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathbf{L}$ непрерывный и заполняет всю действительную ось $\mathbb{R}$. В этом случае спектральная функция оператора $\rho(\lambda,\varepsilon)$ имеет непрерывную производную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, связанную с $m(\lambda)$ соотношением:

$$\rho'(\lambda,\varepsilon) = \frac{-\operatorname{Im} m(\lambda)}{\pi}. \tag{3}$$

В этой работе мы ограничимся случаем $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и будем исследовать поведение $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ на всей оси при $\varepsilon \to +0$.

Предельный случай $\varepsilon = 0$ был исследован Титчмаршем в работе [2]. Оказалось, что

$$\rho'(\lambda,0) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}, & \lambda > 0, \\ \dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}\delta(\lambda-\lambda_0), & \lambda < 0, \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96049.

где δ – дельта-функция Дирака, $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Возникает следующая задача. Верно ли, что в каком-нибудь смысле $\rho'(\lambda,\varepsilon) \to \rho'(\lambda,0)$ при $\varepsilon \to +0$ в соответствующем пространстве обобщенных функций? Насколько известно авторам, подобные исследования ранее не проводились. В работе [3] было дано решение такой задачи для спектральных функций семейства операторов, задаваемых дифференциальным выражением $-y''-\varepsilon xy$. Оказалось, что и для рассматриваемого нами семейства операторов сходимость имеет место.

Через C_a, $a>0$, обозначим пространство всех непрерывных на $(-\infty,0]$ функций f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)e^{ax} = 0, \qquad \|f\|_a = \max_{x\leqslant 0}|f(x)e^{ax}|.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Функция Вейля–Титчмарша $m(\lambda,\varepsilon)$ оператора $\mathbf{L}$ аналитична в полуплоскости $\{\operatorname{Im}\lambda > -\sqrt{\varepsilon}\}$. На действительной оси при любом $\varepsilon>0$ функция $\rho(\lambda,\varepsilon)$ является аналитической по λ. Каково бы ни было $a>0$, при любых $\varepsilon\in\left[0,\pi^2/(4a^2)\right)$ имеет место включение $\rho'(\lambda,\varepsilon)\in C_a^*$.*

2) *При любом $a>0$ в $*$-слабой топологии пространства C_a^* выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\rho'(\lambda,\varepsilon) = \rho'(\lambda,0).$$

Сходимость на любом компакте в C_a равномерна.

3) *Разность $\rho'(\lambda,\varepsilon)-\rho'(\lambda,0)$ принадлежит всем пространствам $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, при любом $\varepsilon>0$ и стремится к 0 при $\varepsilon\to+0$ по норме этих пространств.*

Ниже мы приводим более точные результаты о поведении $\rho'(\lambda,\varepsilon)$, из которых следует теорема 1. Основой проводимого исследования являются полученные нами явные формулы для $m(\lambda,\varepsilon)$ и $\rho'(\lambda,\varepsilon)$.

При $\varepsilon>0$ замена переменной $z=\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x$ приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \Big(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}i\lambda - \frac{1}{4}z^2\Big)y = 0.$$

Полагая

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}i\lambda = n+\frac{1}{2},$$

получим уравнение Вебера [4, § 16.5], решениями которого являются функции $D_n(z)$ и $D_n(-z)$. Поэтому $y_1(x,\lambda)=D_n(\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x)$, $y_2(x,\lambda)=D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$, $\beta>0$. Тогда

$$n = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\alpha i - \frac{1}{2}(\varepsilon^{-1/2}\beta+1),$$

и из асимптотического разложения функции $D_n(z)$ при $z\to\infty$ (см. [4, § 16.5]) получаем включение

$$y_2(x,\lambda) = D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x)\in L_2[0,+\infty).$$

Следовательно, функции $y_2(x,\lambda)$ и $\chi(x,\lambda)$ из (2) пропорциональны:

$$\chi(x,\lambda) = C(\lambda)D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x),$$

и $C(\lambda)$ не зависит от x. Поэтому имеем

$$C(\lambda)D_n(0) = \cos\alpha + m(\lambda)\sin\alpha, \qquad C(\lambda)D_n'(0)(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}) = \sin\alpha - m(\lambda)\cos\alpha.$$

Отсюда находим, что

$$m(\lambda,\varepsilon) = \frac{D_n(0)\sin\alpha - \sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{-\pi i/4}D_n'(0)\cos\alpha}{D_n(0)\cos\alpha + \sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{-\pi i/4}D_n'(0)\sin\alpha}.$$

Значения $D_n(0)$ и $D_n'(0)$ выражаются через гамма-функцию (см. [4, § 16.6]):

$$D_n(0) = -2^{-n/2-1}\frac{\sin n\pi}{\pi}\Gamma(n+1)\Gamma\Big(-\frac{n}{2}\Big), \qquad D_n'(0) = 2^{-n/2-1/2}\frac{\sin n\pi}{\pi}\Gamma(n+1)\Gamma\Big(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big).$$

Таким образом, верна теорема.

Теорема 2. *Функция Вейля–Титчмарша $m(\lambda,\varepsilon)$ рассматриваемой задачи имеет следующее представление при* $\operatorname{Im}\lambda>0$:

$$m(\lambda,\varepsilon)=\frac{e^{\pi i/4}\Gamma\big(1/4-i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})\big)\sin\alpha+2\varepsilon^{1/4}\Gamma\big(3/4-i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})\big)\cos\alpha}{e^{\pi i/4}\Gamma\big(1/4-i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})\big)\cos\alpha-2\varepsilon^{1/4}\Gamma\big(3/4-i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})\big)\sin\alpha}. \tag{4}$$

Используя теорему 2, по формуле (3) получим явное выражение для $\rho'(\lambda,\varepsilon)$. Для этого поделим числитель и знаменатель дроби в выражении (4) на $\Gamma\big(3/4-i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})\big)\neq 0$ при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ и любом $\varepsilon>0$.

Введем обозначения:

$$A=\frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon}},\qquad w=\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(1/4-iA)}{\Gamma(3/4-iA)},\qquad \Omega(t)=\frac{1}{2\pi}\Big|\Gamma\Big(\frac{1}{4}+it\Big)\Big|^2,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

В этих обозначениях функция $m(\lambda,\varepsilon)$ перепишется в виде

$$m(\lambda,\varepsilon)=\frac{w\sin\alpha+2\varepsilon^{1/4}\cos\alpha}{w\cos\alpha-2\varepsilon^{1/4}\sin\alpha},$$

откуда находим, что

$$-\operatorname{Im}m(\lambda,\varepsilon)=\frac{2v\varepsilon^{1/4}}{(u\cos\alpha-2\varepsilon^{1/4}\sin\alpha)^2+v^2\cos^2\alpha}, \tag{6}$$

где $u=\operatorname{Re}w$, $v=\operatorname{Im}w$. Из (5) вытекают равенства

$$u(A)=\Omega(A)e^{-\pi A},\qquad v(A)=\Omega(A)e^{\pi A}. \tag{7}$$

Из теоремы 2 следует, что функция $m(\lambda,\varepsilon)$ мероморфна по λ в $\mathbb{C}$ и может иметь полюсы только в точках $\{-i\sqrt{\varepsilon}(2k+1)\mid k\in\mathbb{N}_0\}$. Поэтому функция $m(\lambda,\varepsilon)$, первоначально определенная при $\operatorname{Im}\lambda>0$, допускает аналитическое продолжение, задаваемое формулой (4), в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda>-\sqrt{\varepsilon}$, а в частности, и на всю действительную ось. Ввиду сказанного формулы (3), (6) и (7) позволяют установить следующее утверждение.

Теорема 3. *При $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедливо тождество*

$$\rho'(\lambda,\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\,\frac{2v(A)\varepsilon^{1/4}}{(u(A)\cos\alpha-2\varepsilon^{1/4}\sin\alpha)^2+v^2(A)\cos^2\alpha}.$$

Для детального исследования асимптотического поведения $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ при $\lambda\to\infty$ и фиксированном $\varepsilon>0$, а также при $\varepsilon\to+0$, необходимо знать асимптотику функции $\Omega(A)$, где $A=\lambda/(4\sqrt{\varepsilon}\,)$. Следующие оценки получаются из хорошо известных свойств гамма-функции.

Лемма 1. *При $|A|\geqslant 1$, $A\in\mathbb{R}$, с абсолютной постоянной в символе O справедливы соотношения*

$$\Omega(A)=\frac{e^{-\pi|A|}}{\sqrt{|A|}}\bigg(1+\frac{1}{64A^2}+O\Big(\frac{1}{A^4}\Big)\bigg),$$

$$u(A)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2\pi A}}{\sqrt{A}}\bigg(1+\dfrac{1}{64A^2}+O\Big(\dfrac{1}{A^4}\Big)\bigg), & A\geqslant 1,\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-A}}\bigg(1+\dfrac{1}{64A^2}+O\Big(\dfrac{1}{A^4}\Big)\bigg), & A\leqslant -1,\end{cases}\qquad v(A)\equiv u(-A),\quad A\in\mathbb{R}.$$

Из теоремы 3 и леммы 1 непосредственно следует асимптотика $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ при $\lambda\to-\infty$, которая для рассматриваемого частного случая уточняет оценку, справедливую для спектральной функции оператора с произвольным непрерывным вещественным потенциалом $q(x)$ [5, с. 144].

Теорема 4. *При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\lambda \to -\infty$ справедлива асимптотика*

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \sim \frac{\exp\bigl(\pi\lambda/(2\sqrt{\varepsilon})\bigr)}{\pi \sin^2 \alpha \sqrt{-\lambda}}.$$

При любом фиксированном $\lambda < 0$, $\lambda \neq -\operatorname{ctg}^2\alpha$, и $\varepsilon \to +0$ справедлива асимптотика

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \sim \frac{\sqrt{-\lambda}\exp\bigl(\pi\lambda/(2\sqrt{\varepsilon})\bigr)}{\pi \sin^2 \alpha (\sqrt{-\lambda} - \operatorname{ctg}\alpha)^2}.$$

Прямое вычисление $\rho'(0, \varepsilon)$ показывает, что при $\varepsilon \to +0$

$$\rho'(0, \varepsilon) = \frac{2\Omega(0)\varepsilon^{1/4}}{\pi\bigl((\Omega(0)\cos\alpha - 2\varepsilon^{1/4}\sin\alpha)^2 + \Omega^2(0)\cos^2\alpha\bigr)} = \frac{2\varepsilon^{1/4}}{\Gamma^2(1/4)\cos^2\alpha} + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Эта оценка легко переносится на множество $|\lambda| \leqslant 4\sqrt{\varepsilon}$, а именно, справедлива

Теорема 5. *Существуют положительные постоянные C_1 и C_2, эффективно зависящие от α, такие, что для любого $\varepsilon \in (0, C_1)$ при $|\lambda| \leqslant 4\sqrt{\varepsilon}$ выполняется неравенство*

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \leqslant C_2\varepsilon^{1/4}.$$

Асимптотика функции $u(A)$ при $A \leqslant -1$ влечет за собой следующую лемму, которая является ключевой в доказательстве сходимости $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ к $\rho'(\lambda, 0)$ при $\varepsilon \to +0$ на отрицательной части $\mathbb{R}$ (см. ниже теорему 6).

Лемма 2. *Существует положительная постоянная C_3, эффективно зависящая от α, такая, что для любого $\varepsilon \in (0, C_3)$ уравнение*

$$u\left(\frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon}}\right) = 2\varepsilon^{1/4}\operatorname{tg}\alpha$$

имеет единственный отрицательный корень (обозначим его через $\lambda_1(\varepsilon)$), который лежит на отрезке $I = \left[-2\operatorname{ctg}^2\alpha, -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha\right]$ и при $\varepsilon \to +0$ имеет асимптотику

$$\lambda_1(\varepsilon) = -\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + O(\varepsilon^2).$$

Теорема 6. *При $\varepsilon \in (0, C_3)$, где постоянная C_3 определена в лемме 2, справедливы следующие оценки:*

1) $\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left(\sqrt{-\lambda}\exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$, $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha, -4\sqrt{\varepsilon}\right)$;

2) $\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left((-\lambda)^{-1/2}\exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$, $\lambda \in (-\infty, -2\operatorname{ctg}^2\alpha)$;

3) *если* $\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{4\sqrt{\varepsilon}}\right) \leqslant d \leqslant \varepsilon^2$, *то*

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left(d^{-2}\exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$$

при $\lambda \in I \setminus I_{d,\varepsilon}$, *где* $I_{d,\varepsilon} = [\lambda_1(\varepsilon) - d, \lambda_1(\varepsilon) + d]$;

4) $\displaystyle\int_{I_{d,\varepsilon}} \rho'(\lambda, \varepsilon)\,d\lambda = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha} + O(\varepsilon)$.

Из теоремы 3 и леммы 1 следует теорема 7, которая вместе с теоремой 5 устанавливает характер сходимости $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ к $\rho'(\lambda, 0)$ при $\varepsilon \to +0$ на положительной части действительной оси.

Теорема 7. *Верна асимптотическая формула*

$$\rho'(\lambda,\varepsilon)-\rho'(\lambda,0)=O(\varepsilon\lambda^{-5/2}),\qquad \lambda\geqslant 1,$$

и существует постоянная $C_4>0$, *эффективно зависящая от* α, *такая,что*

$$\rho'(\lambda,\varepsilon)-\rho'(\lambda,0)=\begin{cases} O(\varepsilon\lambda^{-3/2}), & C_4\sqrt{\varepsilon}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\leqslant\lambda<1,\\ O\Big(\varepsilon^{1/4}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\Big), & 4\sqrt{\varepsilon}\leqslant\lambda<C_4\sqrt{\varepsilon}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}.\end{cases}$$

Из теоремы 6 следует утверждение 2) теоремы 1, а утверждение 3) теоремы 1 вытекает из теоремы 7.

Интерес к рассматриваемому в настоящей работе оператору возник при обсуждении результатов работы [3] на семинаре под руководством профессора А. А. Шкаликова. Для потенциалов $q(x)=-\varepsilon x^p$, $p>0$, $\varepsilon>0$, в точке $p=2$ меняется характер спектра, а именно: при $p>2$ спектр дискретный, при $p\leqslant 2$ спектр непрерывный и заполняет всю действительную ось. Авторы благодарят участников этого семинара и особенно его руководителя, обратившего внимание на актуальность изучения “пограничного” случая $p=2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М., 1960. **2**. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328. **3**. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №5. С. 793–796. **4**. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: ГИФМЛ, 1963. **5**. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `pech@imiss.math.msu.su`

Поступило
20.10.97