А. Ю. Попов, Работы С. Б. Стечкина по теории чисел, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1997, том 3, выпуск 4, 1029–1042

Работы С. Б. Стечкина по теории чисел*

А. Ю. ПОПОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 511.33

Ключевые слова: тригонометрические суммы, дзета-функция Римана, ряды Фарея, распределение простых чисел.

Аннотация

В статье дается обзор результатов С. Б. Стечкина в теории чисел. Коротко рассказывается о дальнейшем развитии начатых им исследований.

Abstract

A. Yu. Popov, The works of S. B. Stechkin on number theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 3(1997), № 4, p. 1029–1042.

The paper contains the review of number theoretical results obtained by S. B. Stechkin. We tell shortly about further progress of the investigations he began.

Работы С. Б. Стечкина в теории чисел можно разделить на несколько направлений. Расскажем о каждом из них.

§ 1 Оценки тригонометрических сумм

Тригонометрической (или, как иногда говорят, экспоненциальной) суммой обычно называется выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{N}\exp(2\pi i b_k)$, где $\{b_k\}_{k=1}^{N}$ — некоторый набор действительных чисел. Многие задачи о числе решений сравнений, о количестве точек с целочисленными координатами в различных областях конечномерных евклидовых пространств, в частности, о распределении дробных долей последовательностей напрямую сводятся к задаче о нетривиальных оценках таких сумм. Тригонометрические суммы постоянно привлекаются для решений аддитивных задач теории чисел, задач, связанных с нелинейными диофантовыми приближениями, а также для изучения законов распределения простых чисел в натуральном ряду.

В задачах о числе решений сравнений и диофантовых уравнений заметную роль играют так называемые полные рациональные тригонометрические

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96–01–00378.

суммы, то есть выражения вида

$$S(f,q)=\sum_{k=1}^{q}\exp\left(\frac{2\pi i f(k)}{q}\right),$$

где

$$q\in\mathbb{N},\quad f(x)=\sum_{l=1}^{n}a_l x^l\in\mathbb{Z}[x],\quad (a_1,a_2,\dots,a_n,q)=1. \tag{1}$$

Будет предполагаться, что $n\geqslant 3$, поскольку при $n=\deg f=1$ и $n=2$ вычисление $|S(f,q)|$ не представляет особого труда. В случае $n=1$ $S(f,q)$ является суммой q подряд идущих членов геометрической прогрессии, а при $n=2$ легко сосчитать квадрат модуля $S(f,q)\overline{S}(f,q)$, записав его как двойную сумму, — это было сделано еще Гауссом [1]. Современное изложение имеется в книгах [2], [3]. При $n\geqslant 3$ значения $|S(f,q)|$ точно вычислены только в специальных случаях, и вряд ли в обозримом будущем удастся получить для $|S(f,q)|$ «аналитическое выражение» через $a_1,a_2,\dots,a_n$ и q в общей ситуации. Ответ здесь, как показывает ряд примеров, в значительной мере зависит от вида полинома f.

Рассмотрим сначала полные суммы с наиболее просто устроенным многочленом $f(x)=ax^n$, $(a,q)=1$, и обозначим для краткости $S_n(a,q)=S(ax^n,q)$. Основные свойства этих сумм были открыты Харди и Литтлвудом в серии работ [4–6]. В частности, если p — простое число, то

$$S_n(a,p^n)=p^{n-1} \tag{2}$$

(за исключением одного случая $p=2$, $n=4$),

$$|S_n(a,p)|\leqslant(d-1)\sqrt{p},\quad\text{где}\quad d=(n,p-1). \tag{3}$$

Из (3) видно, что если n и $p-1$ взаимно просты, то $S_n(a,p)=0$. Таким образом, значение этих сумм зависит и от арифметической природы числа q. Харди и Литтлвуд доказали, что

$$|S_n(a,q)|\leqslant C(n)q^{1-\frac{1}{n}}, \tag{4}$$

где $C(n)$ — некоторая функция, зависящая от n, но не зависящая ни от a, ни от q. Равенства (2) показывают, что оценка (4) может быть улучшена на всем множестве натуральных чисел $\{q\}$ только путем получения возможно меньшего значения постоянной $C(n)$. До 1975 года оценка (4) обычно доказывалась всюду с постоянной $C(n)=n^{n^6}$.

С. Б. Стечкин в [1С] поставил следующую экстремальную задачу. Требуется отыскать

$$A_n=\sup_{\substack{a,q\in\mathbb{N}\\(a,q)=1}}|S_n(a,q)|q^{\frac{1}{n}-1}.$$

Итак, было известно, что $1 \leqslant A_n \leqslant n^{n^6}$. С. Б. Стечкин, установив в [1С] одно новое важное свойство сумм $S_n(a,p^m)$ (p — простое и делит n) и используя более тонкую технику, чем его предшественники, получил значительное продвижение в этой задаче.

Теорема ([1С]).

$$A_n \leqslant \exp\left(C\left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^2\right), \tag{5}$$

где C — абсолютная постоянная, а φ — функция Эйлера.

С помощью известного равенства $n/\varphi(n) = O(\ln\ln n)$ легко получается

Следствие ([1С]). $A_n \leqslant \exp(c_1(\ln\ln n)^2) = o(n^\varepsilon)$ $(n \to \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$.

В этой же работе С. Б. Стечкин высказал гипотезу, что на самом деле величины A_n ограничены, и отметил, что доказать эту гипотезу можно на пути получения нетривиальных оценок сумм (3) при $d > \sqrt{p}$.

Пятнадцать лет «держался» результат (5), пока И. Шпарлинский в [7] не реализовал программу С. Б. Стечкина. И. Шпарлинский, получив при $\sqrt{p} < d < p^{4/7}$ нетривиальные оценки сумм (3), доказал гипотезу С. Б. Стечкина об ограниченности A_n и даже установил предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$. Интересно было бы получить возможно лучшую оценку сверху постоянной $A = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Пока известно лишь, что $A \leqslant \exp(42)$ (частное сообщение И. Шпарлинского).

Для полных рациональных тригонометрических сумм общего вида также справедлива оценка

$$|S_n(f,q)| \leqslant C(n) q^{1-\frac{1}{n}}.$$

И здесь можно поставить экстремальную задачу об отыскании

$$B_n = \sup_{\substack{q\in\mathbb{N},\\ f\in K_n(q)}} |S_n(a,q)| q^{\frac{1}{n}-1},$$

где $K_n(q)$ — класс всех многочленов, удовлетворяющих условию (1).

Дать хорошую оценку сверху для B_n сложнее, чем для A_n. В [8] В. И. Нечаев доказал неравенство

$$B_n \leqslant \exp(2^n) \quad \forall n \geqslant 3,$$

а в 1975 году В. И. Нечаев в [9] вывел существенно лучшую оценку

$$B_n \leqslant \exp\left(\frac{5n^2}{\ln n}\right) \quad \forall n \geqslant 7. \tag{6}$$

В 1977 году С. Б. Стечкин [2С] для больших n значительно усилил результат (6):

$$B_n \leqslant \exp(n + O(n/\ln n)). \tag{7}$$

С момента выхода в свет публикации [2С] прошло уже девятнадцать лет, но, насколько мне известно, работ, в которых было бы усилено неравенство (7), не появилось. Например, в [10] давалась оценка

$$|S_n(f,q)| \leqslant q^{1-\frac{1}{2k}}(\Delta,q)^{\frac{1}{2k}}\tau_n(q),$$

где k — показатель, Δ — полудискриминант полинома f', (Δ,q) — наибольший общий делитель чисел Δ и q. Через $\tau_n(q)$ обозначено количество решений в натуральных числах m_s, $1\leqslant s\leqslant n$, уравнения $\prod\limits_{s=1}^{n} m_s = q$. (Если $F(x)=\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j = a_m \prod\limits_{j=1}^{t}(x-\xi_j)^{k_j}$, ξ_j различны, то $k=\max(k_1,\dots,k_t)$, $\Delta = a_m^{2m-2}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant t}(\xi_i-\xi_j)^{2k_ik_j}$. Если $F\in\mathbb{Z}[x]$, то $\Delta\in\mathbb{Z}$.) Видно, что эта оценка несравнима с оценками из [9] и [2С]. В одних случаях она лучше, а в других — хуже по q. Добавим к этому, что в [11] были найдены точные значения постоянных B_3 и B_4. А китайские математики получили ряд оценок вида $B_n\leqslant\exp(kn)$ с некоторой постоянной $k>1$, которые верны при всех $n\geqslant 5$. Один из последних их результатов:

$$B_n\leqslant \exp(2n)\quad \forall n\geqslant 5.$$

Продвижения во многих проблемах теории чисел напрямую зависят от улучшения оценок общего вида тригонометрических сумм

$$S(f,P)=\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i f(x)), \tag{8}$$

где $P\in\mathbb{N}$, $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j x^j\in\mathbb{R}[x]$. Тригонометрические суммы (8) обычно называют суммами Вейля, поскольку Г. Вейль впервые дал нетривиальные оценки сверху их модуля.

В 30–40 годы нашего столетия И. М. Виноградов разработал новый метод оценок сумм Вейля. Этот метод основывается на получении нетривиальной верхней границы для средних значений степеней модуля сумм (8):

$$J(k,n,P)=\int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\int\left|\sum_{x=1}^{P}\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j\right)\right|^{2k} d\alpha_1\dots d\alpha_n.$$

О методах оценок $J(k,n,P)$ и работах различных математиков в этой области рассказано в $[2,3,12]$. Мы остановимся только на том этапе развития исследований, к которому относится работа С. Б. Стечкина [3С].

В [13] А. А. Карацуба доказал, что существуют две абсолютные положительные постоянные c и c_1, такие что при $k\geqslant c_1 n^2\ln n$ имеет место неравенство

$$J(k,n,P)\leqslant \exp(cn^3\ln n)P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{9}$$

Иногда случается, что возведение суммы $S(f,P)$ в слишком большую степень приводит к ухудшению оценок. Поэтому в ряде приложений оказывается полезным дать нетривиальную верхнюю границу $J(k,n,P)$ для «небольших» значений k. Это и сделал С. Б. Стечкин.

Теорема ([3C]). *Пусть $n, r, k, P \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $k \geqslant nr$. Тогда*

$$J(k,n,P) \leqslant D(r,n) P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{n})^r}, \tag{10}$$

где $D(r,n) = \exp(C\min(r,n)n^2\ln n)$, C — абсолютная постоянная.

Оценка (10) несколько хуже (9) по P, но зато верна при всех $k \geqslant n$, а не только при $k \geqslant n^2 \ln n$. В первом издании книги [2] имелась оценка $J(n,k,P)$, которая верна при всех $k \geqslant \left[\dfrac{n(n+1)}{4}+1\right]+n$, но она была более слабой, чем (10) при больших P и больших $r \geqslant n$:

$$J(k,n,P) \leqslant (20n)^{\frac{n(n+1)l}{2}} P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(1-\frac{1}{n})^l},$$

здесь $k \geqslant nl + \left[\dfrac{n(n+1)}{4}+1\right]$.

Впоследствии результат С. Б. Стечкина был усилен сначала в работе [14], а наилучшая современная верхняя граница интегралов И. М. Виноградова $J(n,k,P)$ при всех значениях параметров дана в [15]. Оценка из [15] достаточно громоздка и поэтому она здесь приведена не будет. Все же констатируем, что в 1975 году работа С. Б. Стечкина [3C] способствовала развитию техники оценок сумм Вейля.

В теории чисел и анализе известны экстремальные задачи о суммах степеней (в частности, о тригонометрических суммах) которые изучались и пропагандировались П. Тураном [16, 17]. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D_n$, S — непустое конечное подмножество натурального ряда. Положим

$$T(k,\mathbf{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^k,\ \ k \in S,\ \ \mathbf{z} \in D, \qquad V(S,\mathbf{z}) = \max_{k\in S}|T(k,\mathbf{z})|.$$

Требуется исследовать поведение величины

$$U(S,D_n) = \inf_{\mathbf{z}\in D_n} V(s,\mathbf{z})$$

в зависимости от n, количества элементов множества S и геометрической формы D_n.

С. Б. Стечкин изучал наиболее интересный для теории чисел случай, когда $D_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid |z_\nu| = 1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$, а S представляет из себя множество первых K натуральных чисел. Другими словами,

$$\mathbf{z} = (\exp(2\pi i\alpha_1), \ldots, \exp(2\pi i\alpha_n)),\ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n,$$

$$T(k,\mathbf{z}) = T(k,\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{n} \exp(2\pi i k\alpha_\nu), \qquad V_n(K,\boldsymbol{\alpha}) = \max_{1\leqslant k\leqslant K} |T(k,\boldsymbol{\alpha})|.$$

При $n, K \to \infty$ требуется возможно точнее оценить

$$U_n(K) = \inf_{\alpha\in[0,1]^n} V_n(K,\alpha).$$

Имеет смысл рассматривать лишь $K > n$. При $K \leqslant n$ Туран в [17] доказал равенства $U_n(K) = 0$ при $1 \leqslant K < n$, $n \geqslant 2$, $U_n(n) = 1$.

С. Б. Стечкину удалось найти точный порядок роста $U_n(K)$ в области

$$2n \leqslant K \leqslant an^2 \quad (0 < a < 1 \text{ — постоянная}), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Оказалось, что при ограничениях (11) справедливо соотношение $U_n(K) \asymp_a n^{1/2}$. Он улучшил также прежние верхние оценки $U_n(K)$ при $n < K < 2n$ и при $K > n^2$. Более подробно с результатами С. Б. Стечкина можно ознакомиться по работам [4C] и [5C].

§ 2 Нули дзета-функции Римана

В изучении законов распределения простых чисел первостепенную роль играет исследование расположения нулей дзета-функции Римана. Это подтверждается явной формулой, открытой Риманом и доработанной затем Мангольдтом, Ландау и другими:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} x^\rho/\rho + O(\ln x) \quad (x \geqslant 2). \tag{12}$$

Через ψ обозначена, как обычно, функция Чебышева: $\psi(x) = \sum\limits_{\substack{p^m\leqslant x \\ p\text{— простые},\ m\in\mathbb{N}}} \ln p$, а под $\sum\limits_{\rho}$ понимается сумма по всем нулям $\zeta(s)$, не лежащим на действительной оси. Доказательство соотношения (12) имеется в [18].

Все комплексные (так называемые «нетривиальные») нули $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана $\zeta(\sigma + it)$ лежат в критической полосе $0 < \sigma < 1$ и расположены симметрично относительно действительной оси и относительно критической прямой $\sigma = 1/2$. Поэтому достаточно исследовать положение нулей с $\beta \geqslant 1/2$, $\gamma > 0$. Эти нули можно условно разделить на три типа: нули с большими, малыми и средними ординатами.

Для нулей с большими ординатами наилучшие оценки получаются применением метода тригонометрических сумм. Для нулей с малыми ординатами численными расчетами удается показать, что они лежат на критической прямой при $\gamma < 5 \cdot 10^8$; см. [19]*. Остается конечный участок значений t, на котором наилучшие оценки для нулей $\zeta(\sigma + it)$ получаются аналитическими методами, восходящими к Ш. Ж. де ла Валле Пуссену [20]. Как показал Б. Россер [21,22], этот участок играет важную роль в задачах оценки простых чисел. Исследованию нулей дзета-функции на этом среднем участке была посвящена работа С. Б. Стечкина [6С]**.

Валле Пуссен [20] доказал, что с некоторыми постоянными Q и t_0 справедливо неравенство

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \quad \sigma > 1 - \frac{1}{Q \ln |t|}, \quad |t| > t_0. \tag{13}$$

Задача состоит в том, чтобы установить справедливость (13) для возможно меньших значений Q и t_0. В [23] (13) было доказано для

$$Q = 17{,}537, \quad t_0 = 200,$$

а в [24] — для

$$Q = 17{,}516, \quad t_0 = e^{10}.$$

Продвинувшись в решении некоторых экстремальных задач для неотрицательных тригонометрических полиномов и рациональных неравенств, С. Б. Стечкин [6С] установил, что (13) верно для

$$Q = 9{,}65 \quad \text{и} \quad t_0 = 12. \tag{14}$$

Впоследствии этот результат был несколько усилен в [25] за счет дальнейшего продвижения (основанного на компьютерных вычислениях) в решении задачи об отыскании величин

$$V_n = \inf_{T \in P_n} \frac{T(0) - a_0}{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0})^2},$$

где P_n — множество всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx$. Теоретическому исследованию поведения V_n была ранее посвящена публикация [7С]. В [25] было доказано, что в (14) можно положить $Q = 9{,}547889695$.

Современная верхняя граница действительных частей нулей $\zeta(s)$ такова:

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \quad \sigma > 1 - B(u(t))^{-2/3}(\ln u(t))^{-1/3}, \tag{15}$$

*Сейчас это известно при всех $\gamma < 10^{11}$, а также на некотором небольшом участке, содержащем 10^{20}. Результат опубликован в препринте А. М. Одлыжко «The 10^{20}-th zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbours». Однако я не смог найти этот препринт и потому не читал его.

**Последние два абзаца почти дословно переписаны из введения работы [6С].

где $u(t) = \ln(|t| + 10)$. Подробное доказательство имеется в монографии [26]. На основе оценок $\zeta(s)$, сделанных в [27], в [28] было установлено, что утверждение (15) справедливо с $B = 6{,}8888 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, оценка С. Б. Стечкина (14) лучше, чем (15), при $|t| \leqslant \exp(8 \cdot 10^{10})$.

Отметим также, что идеи работы [6C] были использованы в [29].

§ 3 Ряды Фарея

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $H_n = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n,\ (a,b) = 1\}$ — ряд Фарея порядка n. Мы будем писать $H_n = \{h_\nu(n)\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \Phi(n)$, где $\Phi(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k)$, φ — функция Эйлера) и считать, что числа $h_\nu(n)$ упорядочены по возрастанию:

$$\frac{1}{n} = h_1(n) < h_2(n) < \cdots < h_{\Phi(n)} = 1.$$

Индекс n часто будет опускаться. Основные арифметические свойства H_n были установлены Харосом (1802) см. [30, гл. 5], а также [31, гл. 3], а (исторически неправильное) название «ряд Фарея» принадлежит Харди и Рамануджану [32], которые использовали множества H_n ($n \in \mathbb{N}$) в своем круговом методе исследования аддитивных задач теории чисел*.

В связи с приложениями в упомянутом круговом методе актуальной является задача оценки уклонения множества H_n от равномерной сетки на $[0,1]$. Положим $\delta_\nu = \dfrac{\nu}{\Phi(n)} - h_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant \Phi(n)$,

$$S_p(n) = \left(\sum_{\nu=1}^{\Phi(n)} |\delta_\nu|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad S_\infty(n) = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\delta_\nu|.$$

Исследованием поведения величин $S_p(n)$ (в основном при $p = 1$, $p = 2$ и $p = \infty$) занимались многие математики: Ландау, Франель, Хаксли, Сато и другие.

Точный порядок роста $S_p(n)$ известен только для $p = \infty$. Э. Ландау [33] доказал, что $S_\infty(n) \asymp n^{-1}$. При других значениях p известны оценки снизу, Ω-оценки и O-оценки $S_p(n)$, как правило, не совпадающие. Одна из причин этого в том, что существует тесная связь между поведением $S_p(n)$ при $n \to \infty$ ($1 \leqslant p < \infty$), расположением нулей дзета-функции Римана и распределением простых чисел. Э. Ландау [34] установил, что гипотеза Римана эквивалентна соотношению

$$S_1(n) = o(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

а в настоящее время известно лишь, что при некотором $c > 0$

$$S_1(n) = O(n \exp(-c(\ln n)^{0{,}6}(\ln\ln n)^{-0{,}2})).$$

*Этот абзац почти дословно переписан из работы [8C].

Безусловные оценки $S_2(n)$ и оценки этой функции в зависимости от величины

$$\Theta = \sup\{\mathrm{Re}\, s \mid \zeta(s) = 0\}$$

выводилась в работах [35–37].

С. Б. Стечкин исследовал поведение $S_p(n)$ для всех $p \in [1, +\infty)$ при $n \to \infty$ как в зависимости от величины Θ, так и без каких бы то ни было предположений о нулях $\zeta(s)$. Он навел некоторый «порядок» в оценках $S_p(n)$ и усилил известные безусловные оценки снизу $S_1(n)$ и $S_2(n)$. Итак, на сегодняшний день имеется следующая картина. Приведенные ниже утверждения доказаны в [8C].

Безусловные оценки.

$$S_p(n) = O(n^{\frac{2}{p}-1} R_1^{\gamma(p)}(n)), \quad \gamma(p) = \min\left(\frac{2}{p}, 1\right), \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$S_p(n) = \Omega(n^{\frac{2}{p}-\frac{3}{2}}), \quad 1 \leqslant p < 2,$$

$$S_p(n) \geqslant c_1 n^{\frac{1}{p}-1} (\ln n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < 2,$$

$$S_p(n) \geqslant c_2 n^{\frac{1}{p}-1}, \quad 2 < p < \infty.$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые абсолютные положительные постоянные, а R_1 — функция, для которой справедливо соотношение

$$M(x) = O(x R_1(x)), \tag{16}$$

где $M(x) = \sum\limits_{k \leqslant x} \mu(k)$, μ — функция Мебиуса. В настоящее время (16) доказано [38] с

$$R_1(x) = \exp(-c(\ln x)^{0,6} (\ln \ln x)^{-0,2})^*.$$

Условные оценки.

Если $\Theta = 1$, то при $\forall \varepsilon > 0$ имеем

$$S_p(n) \geqslant C(p, \varepsilon) n^{\frac{2}{p}-1-\varepsilon}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Таким образом, если существует последовательность нулей дзета-функции Римана, вещественные части которых стремятся к 1, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln S_p(n)}{\ln n} = \frac{2}{p} - 1 \quad \forall p \in [1, +\infty).$$

$\dfrac{1}{2} < \Theta < 1.$

$$S_p(n) = o(n^{\frac{2}{p}+\Theta-2+\varepsilon}) \quad (n \to \infty), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

*Этот результат и по сей день не улучшен. Основой для его получения являются оценки $\zeta(s)$ и как следствие $1/\zeta(s)$ вблизи прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$ с помощью метода тригонометрических сумм — см. [2, 3, 12, 26].

$$S_p(n) = o(n^{\frac{2\Theta}{p}-1+\varepsilon}) \quad (n\to\infty), \quad 2<p<\infty, \quad \forall\varepsilon>0,$$
$$S_p(n) = \Omega(n^{\frac{2}{p}+\Theta-2-\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon>0, \quad 1\leqslant p\leqslant(1-\Theta)^{-1},$$
$$S_p(n) \geqslant c_\varepsilon(n^{\frac{2\Theta_1}{p}-1-\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon>0, \quad \Theta_1=\frac{1+\Theta}{4-2\Theta}, \quad 1\leqslant p\leqslant 2,$$
$$S_p(n) \geqslant c_\varepsilon(n^{\frac{2}{p}+\Theta_1-2-\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon>0, \quad 2\leqslant p<(1-\Theta_1)^{-1},$$
$$S_p(n) \geqslant Cn^{\frac{1}{p}-1}, \quad (1-\Theta_1)^{-1}\leqslant p<\infty.$$

$\Theta = 1/2$ (справедлива гипотеза Римана).

$$S_p(n) = O(n^{\frac{2}{p}-\frac{3}{2}}R_2(n)), \quad 1\leqslant p\leqslant 2,$$
$$S_p(n) = O(n^{\frac{1}{p}-1}R_2^{\frac{2}{p}}(n)), \quad p>2,$$
$$S_p(n) = \Omega(n^{\frac{2}{p}-\frac{3}{2}}), \quad 1\leqslant p<2.$$

Здесь через $R_2(n)$ обозначена функция, для которой в случае $\Theta = 1/2$ выполняется оценка
$$M(x) = O(\sqrt{x}R_2(x)). \tag{17}$$
Э. Ландау [39] доказал, что (17) справедливо с
$$R_2(x) = \exp\left(c\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right), \quad c>0.$$

Таким образом, если мы даже узнаем значение Θ, то и в этом случае пока сможем вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln S_p(n)}{\ln n}, \tag{18}$$
только если окажется, что $\Theta = 1$ (при всех p) или если верна гипотеза Римана (при $p\geqslant 2$). В остальных случаях вопрос о существовании предела (18) остается открытым. Это свидетельствует о неудовлетворительном состоянии наших знаний не только о расположении нулей $\zeta(s)$, но и в области элементарной арифметики.

§ 4 Поведение остаточного члена в асимптотическом законе распределения простых чисел

В последний год своей жизни С. Б. Стечкин совместно с автором этих строк исследовал поведение различного рода средних от функций

$$R(x) = \psi(x) - x, \qquad P(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

$\pi(x)$ означает количество простых чисел, не превосходящих x; определение $\psi(x)$ было дано в начале § 2. Полученные нами в этой области результаты составили содержание работы «Асимптотическое распределение простых чисел в среднем», которая опубликована в журнале «Успехи математических наук», 1996 г., т. 6, стр. 21–88.

Основным нашим достижением является то, что удалось вместо Ω-оценок функций $|R|$, $|P|$, $R^+(x) = \max(R(x),0)$, $R^-(x) = -\min(R(x),0)$ получить оценку снизу от их интегралов по «не слишком длинным» отрезкам. Получены как условные (зависящие от возможного значения Θ) оценки, так и безусловные. В качестве иллюстрации приведем безусловные оценки снизу средних от $|R|$ и $|P|$.

Теорема. *Существует постоянная x_0, такая что при всех $x > x_0$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_x^{2x} |R(u)|\,du \geqslant \frac{x^{3/2}}{200}, \qquad \int\limits_x^{2x} |P(u)|\,du \geqslant \frac{x^{3/2}}{\ln x}. \tag{19}$$

Согласно теореме Крамера [40], если справедлива гипотеза Римана, то $\int\limits_1^x R^2(u)\,du = O(x^2)$, откуда получаем

$$\Theta = 1/2 \Longrightarrow \int\limits_1^x |R(u)|\,du = O(x^{3/2}), \quad \int\limits_1^x |P(u)|\,du = O(x^{3/2}/\ln x).$$

Сказанное означает, что усилить неравенства (19), не произведя сенсации, можно только за счет постоянных в правых частях. Ведь если бы для какой-то последовательности $x_n \to +\infty$ было доказано, что

$$\int\limits_{x_n}^{2x_n} |R(u)|\,du \geqslant c_n x^{3/2}, \qquad \lim_{n\to=\infty} c_n = +\infty,$$

то мы получили бы ($y_n = 2x_n$) $y_n^{-3/2} \int\limits_1^{y_n} |R(u)|\,du \to +\infty$, то есть опровержение гипотезы Римана. Существенно и то, что оценки снизу средних делаются на не слишком длинном отрезке $[x, 2x]$. Как известно, функции $R(u)$ и $P(u)$ бесконечно много раз меняют знак, и следовательно, в окрестностях точек смены знака достаточно малы. Оценки (19) показывают, что эти малые значения встречаются «редко».

§ 5 Дополнение

С. Б. Стечкин занимался и другими проблемами теории чисел. Вопросам проверки простоты чисел специального вида посвящена работа [9C]. Комментарии к ней имеются в [41]. Об исследованиях С. Б. Стечкина в области аддитивных задач с растущим числом слагаемых упоминается в [42] на стр. 122.

Автор приносит благодарность за консультации доктору физико-математических наук С. В. Конягину, профессору В. И. Нечаеву и профессору В. Н. Чубарикову. С. В. Конягина автор благодарит также за просмотр рукописи и полезные замечания.

Литература

[1] К. Ф. Гаусс. Суммирование некоторых рядов особого вида // К. Ф. Гаусс. Труды по теории чисел. — М.: АН СССР, 1959. — С. 549–635.

[2] И. М. Виноградов. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.

[3] Н. М. Коробов. Тригонометрические суммы и их приложения. — М.: Наука, 1989.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of «Partitio Numerorum»: II. Proof that every large number iz the sum of at most 21 biquadrates // Math. Zeitschr. — 1921. — B. 9. — S. 14–27.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of «Partitio Numerorum»: IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$ // Math. Zeitschr. — 1922. — B. 12. — S. 161–188.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of «Partitio Numerorum»: VI. Futher researches in Waring's Problem // Math. Zeitschr. — 1925. — B. 23. — S. 1–37.

[7] И. Е. Шпарлинский. Об оценках сумм Гаусса // Матем. заметки. — 1991. — Т. 50, вып. 1. — С. 122–130.

[8] В. И. Нечаев. О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$ // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1953. — Т. 17. — С. 485–498.

[9] В. И. Нечаев. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Матем. заметки. — 1975. — Т. 17, вып. 6. — С. 839–849.

[10] J. H. Loxton, R. A. Smith. On Hua's estimate for exponential sums // J. London math. Soc. — 1982. — V. 26, № 1. — P. 15–20.

[11] В. И. Нечаев, В. Л. Топунов. Оценка модуля полных рациональных тригонометрических сумм третьей и четвертой степени // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1981. — Т. 158. — С. 125–129.

[12] А. А. Карацуба. Распределение простых чисел // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, вып. 5. — С. 81–140.

[13] А. А. Карацуба. Среднее значение модуля тригонометрической суммы // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1973. — Т. 37, № 67. — С. 1203–1227.

[14] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба. Новая оценка интеграла И. М. Виноградова // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 4. — С. 751–762.

[15] О. В. Тырина. Новая оценка тригонометрического интеграла И. М. Виноградова // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1987. — Т. 51, № 2. — С. 363–378.

[16] P. Turan. Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. — Budapesht: Akad. Kiado, 1953.

[17] P. Turan. On a new method of analysis and its applications. — N.Y.: Willey and sons, 1984.

[18] Г. Дэвенпорт. Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971.

[19] А. М. Рибенбойм. Рекорды простых чисел // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 5. — С. 119–176.

[20] Ch.-J. de la Vallée Poussin. Sur la fonction de Riemann et le nombre des premiers inferieurs a une limite donnée // Memoires couronnés et autres memoires publies par l'Academie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1899. — V. 59. — P. 1–74.

[21] B. Rosser. The n-th prime is greater than $n \ln n$ // Proc. London Math. Soc. — 1939. — V. 45, № 2. — P. 21–44.

[22] B. Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers // Amer. J. Math. — 1941. — V. 63. — P. 211–232.

[23] H. Westphal. Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen // Schriften des Math. Seminars und des Instituts für angewandte Math. der Universität Berlin. — 1938. — B. 4, № 1. — S. 1–31.

[24] B. Rosser, L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Ill. J. Math. — 1962. — V. 6. — P. 64–94.

[25] В. П. Кондратьев. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. — 1977. — Т. 22, вып. 3. — С. 371–374.

[26] С. М. Воронин, А. А. Карацуба. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.

[27] G. Arkhipov, K. Buriev. Refinement of estimates for the Riemman zeta-function in a neighbourhood of the line $\operatorname{Re} s = 1$ // Integral transformation and spechial functions. 1993. — V. 1. — P. 1–7.

[28] О. В. Попов. Вывод современной границы нулей дзета-функции Римана по методу Адамара // Вестник МГУ, сер. мех. и мат. — 1994. — № 1. — С. 42–45.

[29] D. R. Heath-Brown. Zero-free region for Dirichlet L-functions and the least prime in an arithmetic progression // Proc. London. Math. Soc. — 1992. — V. 64, № 3. — P. 265–338.

[30] L. E. Dickson. History oh the theory of numbers. V. 1. Divisibility and primality. — N.Y.: Chelsea publishing company, 1966.

[31] G. H. Hardy, E. M. Wright. An introduction to the theory of numbers. — Oxford: Clarendon Press, 1975.

[32] G. H. Hardy, S. Ramanujan. Asymptotic formula in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc. — 1918. — V. 17, № 25. — P. 75–115. (См. также: Collected Papers of G. H. Hardy. V. 1. — Oxford: Clarendon Press, 1966. — P. 306–339; см. также: Collected Papers of S. Ramanujan. — N.Y.: 1962. — P. 276–309.)

[33] E. Landau. Über die Fareyreihe und die Riemannsche Vermutung // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-Physik. Klasse. — 1932. — № 28. — S. 347–352.

[34] E. Landau. Bemerkungen zu der von lehenden Abhandlung von Herrn Franel // Nachrichten von der Gesellschaft des Wissenschaften zu Göttingen, math.-Physik. Klasse. — 1924. — S. 202–206.

[35] J. Franel. Les suites de Farey et la probleme des nombers premiers // Nachrichten von der Gesellschaft des Wissenschaften zu Göttingen, math.-Physik. Klasse. — 1924. — S. 198–201.

[36] M. N. Huxley The distribution of prime numbers. — Oxford: Clarendon Press, 1972.

[37] M. Mikoás. Un théoreme d'equivalense et ses application // Norske Vid. Selsk. Forth. Frondheim. — 1950. — V. 22, № 28. — P. 128–131.

[38] A. Walfisz. Weylsche Exponentialsummen in der Neuen Zahlentheorie. — Berlin: 1963.

[39] E. Landau. Vorlesungen über Zahlentheorie. — Verlag von S.Hirzel in Leipzig, 1927. V. 2.

[40] H. Cramer. Some theorems concerning prime numbers // Arkiv för Mathematik. — 1920. — V. 15, № 5. — P. 1–33.

[41] О. Н. Василенко, В. С. Смирнов. Об одной работе С. Б. Стечкина о проверке простоты чисел специального вида // III Международная конференция «Современные проблемы теории чисел и ее приложения». Тезисы докладов. Тула. 1996. — С. 26.

[42] А. Г. Постников. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.

Список цитированных работ С. Б. Стечкина

[1C] Оценка сумм Гаусса // Матем. заметки. — 1975. — Т. 17, вып. 4. — С. 579–588.

[2C] Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Труды МИАН СССР. — 1977. — Т. 143. — С. 188–207.

[3C] О средних значениях модуля тригонометрической суммы // Труды МИАН СССР. — 1975. — Т. 134. — С. 283–309.

[4C] Некоторые экстремальные свойства тригонометрических сумм // Матем. заметки. — 1994. — Т. 55, вып. 2. — С. 130–143.

[5C] О проблеме Турана // Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейные пространства», посвященная 90-летию академика С. М. Никольского. Тезисы докладов. Москва. 1995. — С. 259–260.

[6C] О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. — 1970. — Т. 8, вып. 4. — С. 419–429.

[7C] О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. — 1970. — Т. 7, вып. 4. — С. 411–422.

[8C] Ряды Фарея // Матем. заметки. — 1997. — Т. 61, вып. 1. — С. 91–113.

[9C] Критерий Люка простоты чисел вида $N = h2^n - 1$ // Матем. заметки. — 1971. — Т. 10, вып. 3. — С. 259–268.

Статья поступила в редакцию в декабре 1996 г.