А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение спектральной функции одного семейства операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 793–796

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm1562

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В $L_2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор L, задаваемый дифференциальным выражением

$$ly(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

и граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0.$$

Предполагается, что $\alpha \in \mathbb{R}$, q – действительнозначная функция, непрерывная на $[0,+\infty)$. Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ решение уравнения $ly = \lambda y$ с начальными условиями

$$\varphi(0,\lambda) = \sin\alpha, \qquad \varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha, \qquad \theta(0,\lambda) = \cos\alpha, \qquad \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha.$$

Функции φ, θ, а также $\rho, m, \widehat{f}$ (они появятся ниже) зависят, естественно, и от α, но мы будем опускать аргумент α для того, чтобы не перегружать текст работы обозначениями. Хорошо известна теорема Г. Вейля о представлении произвольной функции $f \in L_2[0,+\infty)$ в виде интеграла по спектру оператора L.

Теорема [1]–[3]. *Существует неубывающая и ограниченная снизу на $\mathbb{R}$ функция ρ, для которой справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует*

$$\widehat{f}(\lambda) \underset{L_2(\mathbb{R},d\rho)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx,$$

а функция f представляется как предел в $L_2[0,+\infty)$ преобразования Фурье по мере $d\rho$ от $\widehat{f}$:

$$f(x) \underset{L_2(\mathbb{R}^+)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n \widehat{f}(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

2. *Если $\sin\alpha \neq 0$, то для функции $m(z)$, определяемой в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ равенством*

$$m(z) = -\operatorname{ctg}\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho(\lambda)}{z-\lambda}, \tag{1}$$

имеем $\theta(x,z) + m(z)\varphi(x,z) \in L_2[0,+\infty)$ $\forall z$: $\operatorname{Im} z > 0$.

3. *Для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}$, не содержащего спектра оператора L, имеем $\int_E d\rho(\lambda) = 0$.*

Утверждение 3 теоремы показывает, что мера $d\rho$ сосредоточена на спектре оператора L. Функция $\rho(\lambda)$ называется *спектральной функцией*, а $m(z)$ – *функцией Вейля–Титчмарша* оператора L. Из представления (1) видно, что функция $m(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и что если на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ существует

$$\lim_{y\to+0} m(\lambda+iy) = m(\lambda) \in C(a,b),$$

то $\rho(\lambda)$ имеет на этом интервале непрерывную производную, которая связана с $m(\lambda)$ соотношением

$$\rho'(\lambda) = \frac{-\operatorname{Im} m(\lambda)}{\pi}, \qquad \lambda \in (a,b). \tag{2}$$

Исследование свойств функции $p(\lambda)$, а тем более ее отыскание по потенциалу q и числу α, определяющим оператор L, является, как правило, очень трудной задачей. Известны общие теоремы Б. М. Левитана и В. А. Марченко (см. монографии [4]–[6]) об оценках $\rho(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$:

$$\rho(\lambda) - \rho(-\infty) = o\bigl(\exp(-a\sqrt{|\lambda|})\bigr) \qquad (\lambda \to -\infty) \ \ \forall a > 0,$$
$$\rho(\lambda) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi \sin^2 \alpha} + \rho(-\infty) + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \overline{o}(1) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

(Считается, что произведена нормировка $\rho(0) = 0$.)

Самый простой случай $q(x) \equiv 0$ был исследован Титчмаршем в [7]. Оказалось, что при $\lambda > 0$

$$\rho'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)},$$

а при $\lambda < 0$ случаи $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ резко различаются:

$$\begin{aligned} \rho'_\alpha(\lambda) &\equiv 0, \qquad \lambda < 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha < 0, \\ \rho'_\alpha(\lambda) &= \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}\delta(\lambda - \lambda_0), \qquad \lambda < 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2\alpha$, $\delta(\,\cdot\,)$ – дельта-функция Дирака.

В этой работе мы исследуем случай $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и интересуемся поведением производной спектральной функции на $(-\infty, 0)$ для потенциалов специального вида.

Вызывает интерес следующая задача общего вида.

Пусть $Q \in C(0, +\infty)$. Через $\rho_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda)$ обозначим спектральную функцию оператора, задаваемого дифференциальным выражением

$$-y''(x) + \varepsilon Q(x) y(x)$$

и граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \qquad \operatorname{ctg}\alpha > 0.$$

Верно ли, что на $(-\infty, 0)$ семейство обобщенных функций $\rho'_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ (в каком-нибудь "разумном" смысле) к производной спектральной функции (3) невозмущенного оператора $-y''$? Положительное решение этой задачи позволило бы для функций $f \in L_2[0, +\infty)$ писать "приближенное спектральное разложение" в виде

$$f(x) = \int_{\lambda_0 - \beta}^{\lambda_0 + \beta} + \int_{-\beta}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \varphi_\alpha(x, \lambda)\, d\rho_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda) \qquad \bigl(\beta = \beta(\varepsilon) \downarrow 0\bigr),$$

опуская интеграл по дополнению к малой окрестности спектра невозмущенного оператора. Насколько нам известно, такие исследования ранее не проводились. Титчмарш в работе [7] выразил через функции Ганкеля 1-го рода функцию Вейля–Титчмарша $m(\lambda, \varepsilon)$ оператора

$$-y'' - \varepsilon x y, \quad \varepsilon > 0, \qquad y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha > 0.$$

Он установил, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$m(\lambda,\varepsilon)=\frac{H^{(1)}_{1/3}(A)\sin\alpha-\sqrt{\lambda}H^{(1)}_{-2/3}(A)\cos\alpha}{H^{(1)}_{1/3}(A)\cos\alpha+\sqrt{\lambda}H^{(1)}_{-2/3}(A)\sin\alpha}, \tag{4}$$

где $A=2\lambda^{3/2}/(3\varepsilon)$, $\lambda^{3/2}=-i|\lambda|^{3/2}$ при $\lambda<0$, $H^{(1)}_p$ – функции Ганкеля 1-го рода.

С помощью представления (4) в работе [7] было доказано, что в некоторой окрестности точки λ_0 у функций $m(\lambda,\varepsilon)$ имеется лишь один полюс $\lambda_0(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$\lambda_0(\varepsilon)=\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\alpha+O(\varepsilon^2)\qquad(\varepsilon\to+0),$$

а мнимая часть его удовлетворяет неравенству

$$-\exp\Bigl(-\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{\varepsilon}\Bigr)\leqslant\operatorname{Im}\lambda_0(\varepsilon)<0.$$

Но поведение $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ при $\lambda\in(-\infty,0)$ и $\varepsilon\to+0$ Титчмарш не исследовал. Нам удалось в определенном смысле почти до конца решить эту задачу. Несмотря на наличие явной формулы для $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ (ввиду (2) имеем $\rho'(\lambda,\varepsilon)=-\operatorname{Im}m(\lambda,\varepsilon)/\pi$, так как из (4) следует, что функция $m(\lambda,\varepsilon)$ аналитична в замкнутой верхней полуплоскости с выброшенной точкой 0) это оказалось далеко не просто. Дело в том, что если подставить в (4) известные асимптотические ряды для $H^{(1)}_{1/3}(A)$ и $H^{(1)}_{-2/3}(A)$ при $A\to-i\infty$ (по отрицательной части мнимой оси), то для $m(\lambda,\varepsilon)$ получится асимптотический ряд, все члены которого вещественны. Следовательно, указанный ряд не дает никакой информации о $\rho'(\lambda,\varepsilon)$.

Мы получили следующее представление для функции $\rho'(\lambda,\varepsilon)$, справедливое при любых $\lambda<0$ и $\varepsilon>0$:

$$\rho'(\lambda,\varepsilon)=\frac{\pi^{-1}\tau(\beta_{1,1}(a)\beta_{2,2}(a)+\beta_{1,2}(a)\beta_{2,1}(a))}{(\beta_{1,1}(a)\cos\alpha-\beta_{1,2}(a)\tau\sin\alpha)^2+(\beta_{2,1}(a)\cos\alpha+\beta_{2,2}(a)\tau\sin\alpha)^2}, \tag{5}$$

где $\tau=\sqrt{-\lambda}$, $a=|A|=2\tau^3/(3\varepsilon)$,

$$\beta_{1,1}(a)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{B^-_{1/3}(a)}{\Omega_{1/3}(a)},\qquad \beta_{1,2}(a)=\frac{\Omega_{2/3}(a)}{\Omega_{1/3}(a)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{B^-_{2/3}(a)}{\Omega_{1/3}(a)},$$
$$\beta_{2,1}(a)=\frac{B^+_{1/3}(a)}{2\Omega_{1/3}(a)},\qquad \beta_{2,2}(a)=\frac{B^+_{2/3}(a)}{2\Omega_{1/3}(a)},$$
$$\Omega_p(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(a\cos t)\cos(pt)\,dt,$$
$$B^-_p(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-a\operatorname{ch}t)\operatorname{sh}(pt)\,dt,\qquad B^+_p(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-a\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}(pt)\,dt.$$

Представление (5) позволило доказать формулируемые ниже теоремы 1–3.

Теорема 1. *При любом $\varepsilon>0$ справедлива асимптотика*

$$\rho'(\lambda,\varepsilon)\sim\frac{\exp(-\frac{4}{3}\frac{|\lambda|^{3/2}}{\varepsilon})}{\pi\sqrt{-\lambda}\sin^2\alpha}\qquad(\lambda\to-\infty).$$

Теорема 2. *Существуют положительные постоянные c_1 и c_2, эффективно зависящие от α, такие, что при $\varepsilon \in (0, c_1)$ выполняются оценки*

$$\begin{aligned}
\rho'(\lambda,\varepsilon) &= O\biggl(|\lambda|^{-1/2}\exp\biggl(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\biggr)\biggr), && \lambda \in (-\infty, -2\operatorname{ctg}^2\alpha),\\
\rho'(\lambda,\varepsilon) &= O\biggl(|\lambda|^{1/2}\exp\biggl(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\biggr)\biggr), && \lambda \in \Bigl(-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha, -c_2\varepsilon^{2/3}\Bigr),\\
\rho'(\lambda,\varepsilon) &= O(\varepsilon^{1/3}), && \lambda \in [-c_2\varepsilon^{2/3}, 0).
\end{aligned}$$

Постоянные в символах O зависят только от α и эффективны.

Обозначим $T(\lambda,\varepsilon) = \beta_{1,1}(a)\cos\alpha - \beta_{1,2}(a)\tau\sin\alpha$. Ответ на вопрос о поведении $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ на “критическом” отрезке $I = [-2\operatorname{ctg}^2\alpha, -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha]$ дает

Теорема 3. *Существует положительная постоянная c_3, эффективно зависящая от α, такая, что при любых $\varepsilon \in (0, c_3)$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Функция $T(\lambda,\varepsilon)$ имеет на отрезке I единственный нуль $\lambda_1(\varepsilon)$ с асимптотикой*

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\alpha + O(\varepsilon^2).$$

2. *При любых $d > 0$, $\lambda \in I \setminus I_{d,\varepsilon}$ ($I_{d,\varepsilon} = [\lambda_1(\varepsilon) - d, \lambda_1(\varepsilon) + d]$) выполняется оценка*

$$\rho'(\lambda,\varepsilon) = O\biggl(d^{-2}\exp\biggl(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\biggr)\biggr).$$

3. *Если*

$$\exp\biggl(-\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3\varepsilon}\biggr) \leqslant d \leqslant \varepsilon^2,$$

то

$$\int_{I_{d,\varepsilon}} d\rho(\lambda) = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha} + O(\varepsilon).$$

Следствие. *В пространстве $C^*(I)$ семейство функций $\rho'(\lambda,\varepsilon)$ слабо сходится к*

$$\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}\delta(\lambda - \lambda_0)$$

при $\varepsilon \to +0$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: pech@imiss.math.msu.su

Поступило
09.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–269. **2**. Weyl H. // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1909. P. 37–64. **3**. Weyl H. // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1910. P. 442–467. **4**. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. **5**. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. **6**. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. **7**. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328.