Н. Н. Андреев, С. В. Конягин, А. Ю. Попов, Экстремальные задачи для функций с малым носителем, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 323–332

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm1833

# Математические заметки

том 60 выпуск 3 сентябрь 1996


## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ


**Н. Н. Андреев, С. В. Конягин, А. Ю. Попов**


В связи с приложениями к теории чисел П. Туран поставил следующую задачу.

Задача 1. Пусть $0 < h \leqslant 1/2$. В классе функций $f \in K_1(h)$, обладающих свойствами

1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$,
2) $a_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$,
3) $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$,
4) $f(x) = 0$ для $h \leqslant |x| \leqslant 1/2$,

требуется оценить величину $a_0 = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx$.

Положим

$$A_1(h) = \sup_{f \in K_1(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\,dx.$$

С. Б. Стечкин в [1] доказал (он изучал ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, но нам удобно несколько изменить его обозначения), что

$$A_1\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \qquad (N = 2, 3, \dots),$$

откуда

$$A_1(h) = h + O(h^2),$$

и, в частности,

$$\lim_{h \to +0} \frac{A_1(h)}{h} = 1.$$

---


Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00378. Кроме того, работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант MC5300.

Асимптотически экстремальной является функция

$$\phi_h(x) = \max\left(1 - \frac{|x|}{h}, 0\right)$$

с разложением в ряд Фурье

$$\phi_h(x) = h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi n h)}{\pi n h}\right)^2 \cos(2\pi n x).$$

При изучении распределения дробных долей некоторых последовательностей возникает аналогичная задача (см. [2]).

Задача 2. Пусть $0 < h \leqslant 1/2$. В классе функций $f \in K_2(h)$, обладающих свойствами

1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$,
2) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1$,
3) $f(x) = 0$ для $h \leqslant |x| \leqslant 1/2$,

требуется оценить величину $a_0 = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx$.

Положим

$$A_2(h) = \sup_{f \in K_2(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\,dx.$$

В силу неравенства $|f(x)| \leqslant 1$ и условия 3) имеем $A_2(h) \leqslant 2h$. Так как $\phi_h(x) \in K_1(h) \subset K_2(h)$, то $A_2(h) \geqslant A_1(h) \geqslant h$. Таким образом,

$$1 \leqslant \frac{A_2(h)}{h} \leqslant 2.$$

Возникает естественный вопрос: справедлив ли для функции $A_2(h)$ какой-либо аналог упомянутой теоремы С. Б. Стечкина из [1]? Точнее говоря, что можно сказать о пределе $\lim_{h \to +0} A_2(h)/h$? В [2] также отмечена важность для приложений нахождения значения $A_2(1/4)$ или хотя бы возможно лучшей оценки снизу этой величины.

Ответить на поставленные вопросы помогает изучение одной родственной экстремальной задачи. Обозначим $e(x) = \exp(2\pi i x)$. *Преобразованием Фурье* интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $f$ назовем [3, с. 8]

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e(-ux)\,dx.$$

Задача 3. Пусть $h \geqslant 0$. В классе функций $f \in K_3(h)$, обладающих свойствами

1) $f(x) = f(-x)$,
2) $f \in C[-h, h]$,
3) $f(x) = 0$ для $|x| \geqslant h$,
4) $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)|\, du = 1$,

требуется оценить величину $\widehat{f}(0) = \int_{-h}^{h} f(x)\, dx$.

Положим

$$A_3(h) = \sup_{f \in K_3(h)} \int_{-h}^{h} f(x)\, dx, \qquad L = A_3(1).$$

Ясно, что $A_3(h) = Lh$.

Здесь доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. $\lim_{h \to +0} A_2(h)/h = L$.

Теорема 2. $A_2(1/4) = 2/(\pi + 4)$.

Теорема 3. $L > 1.16$.

Теорема 4. *Выполнено неравенство*

$$L \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1.179\ldots.$$

Теоремы 2 и 3 показывают, что задачи 1 и 2 принципиально отличаются друг от друга.

Подчеркнем, что вопрос о точном значении постоянной $L$ остается открытым.

Доказательство теоремы 1. При доказательстве теоремы рассматривается произвольная функция $f = f_h$, удовлетворяющая условиям 2) и 3) задачи 3. Отметим, что при $h \leqslant 1/2$ значение ее преобразования Фурье в целых точках $\widehat{f}(n)$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье 1-периодизации функции $f$, продолженной с отрезка $[-1/2, 1/2]$; при этом если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$$

на $[-1/2, 1/2]$, то $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n) = a_n/2$ при $n > 0$ и, значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется

Лемма. *Равномерно по* $h \in (0,1/4]$, $v \in [-1/2,1/2]$ *и* $f = f_h$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)| = \bigl(1+O(h)\bigr) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|. \tag{1}$$

Замечание. Соотношение (1), в частности, означает, что правая и левая части его одновременно конечны или равны $+\infty$.

Теорема 1 немедленно вытекает из леммы, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)|\,du = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)|\,dv.$$

Доказательство леммы. Мы проведем доказательство в случае, когда левая часть (1) конечна. Конечность левой части (1) может быть выведена из конечности правой части аналогичными рассуждениями.

Рассмотрим 1-периодическую функцию $g$ такую, что $g(x) = 1-e(-vx)$ при $x \in [-h,h]$, $g(x) = g(2h-x)$ при $x \in [h,2h]$, $g(x) = g(-2h-x)$ при $x \in [-2h,-h]$, $g(x) = 0$ при $x \in [2h, 1-2h]$. Мы имеем

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)| - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) - \widehat{f}(n+v)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)|. \tag{2}$$

Далее, имеет место неравенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)| \tag{3}$$

(см. [4, с. 14]). Для оценки правой части (3) заметим, что

$$|\widehat{g}(n)| \leqslant \int_{-2h}^{2h} |g(x)|\,dx \ll h^2$$

при любом $n$ и

$$|\widehat{g}(n)| \ll \operatorname{Var}\Big|_{-2h-0}^{2h+0} \frac{g'(x)}{n^2} \ll \frac{1}{n^2}$$

при $n \neq 0$. Значит,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)| \ll \sum_{n\in\mathbb{Z}} \min\left(h^2, \frac{1}{n^2}\right) \ll h. \tag{4}$$

Соотношение (1) вытекает из (2)–(4). Лемма, а тем самым и теорема 1, доказаны.

Доказательства теорем 2 и 3 будут основываться на свойствах функции

$$F_h(x) = \begin{cases} \pi\cos\dfrac{\pi x}{2h}, & |x| \leqslant h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$\widehat{F}_h$ легко вычисляется [5, с. 357]:

$$\widehat{F}_h(y) = \frac{4h\cos(2\pi hy)}{1-16y^2h^2}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2. Разложим функцию $F_{1/4}$ в ряд Фурье:

$$F_{1/4}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(2\pi nx) = \widehat{F}_{1/4}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{F}_{1/4}(n)\cos(2\pi nx). \tag{6}$$

Ввиду (5) и (6) находим $a_0 = 1$, $a_1 = \pi/2$, а при $n \geqslant 2$

$$|a_n| = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{2}{n^2-1}, & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Посчитаем

$$S(F_{1/4}) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k)^2-1}.$$

Поскольку [6, с. 685]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi\operatorname{ctg}\pi a}{2a}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \tag{7}$$

то $S(F_{1/4}) = (4+\pi)/2$. Пусть $f(x) = (F_{1/4})/S(F_{1/4})$. Так как $f \in K_2(1/4)$, то

$$A_2\left(\frac{1}{4}\right) \geqslant \int_{-1/4}^{1/4} f(x)\,dx = \frac{\widehat{F}_{1/4}(0)}{S(F_{1/4})} = \frac{2}{\pi+4}. \tag{8}$$

Оценим теперь $A_2(1/4)$ сверху. Для произвольной функции $f \in K_2(1/4)$ имеем

$$0 = f(1/4) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_{2k},$$

$$0 = \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx = \frac{a_0}{4} - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_{2k+1}}{2k+1}.$$

Отсюда находим, что

$$|a_0| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}|, \qquad |a_0| \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k}|}{2k+1} \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k+1}|.$$

Складывая эти неравенства и добавляя $|a_0|$ к обеим частям, получаем

$$|a_0|\left(2+\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1,$$

откуда

$$|a_0| \leqslant \frac{2}{\pi+4}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно найти функцию $f \in K_3(1)$, для которой выполняется неравенство

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx > 1.16\,. \tag{10}$$

Проверим, что такой функцией является

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{J}, \qquad \text{где} \quad J = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_1(y)|\,dy.$$

Условия 1)–4) задачи 3 для этой функции очевидным образом выполняются. Оценим сверху интеграл $J$. Для любой функции $p \in L(\mathbb{R})$ имеем очевидное равенство

$$\int_{\mathbb{R}} |p(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx - 2\int_P p(x)\,dx,$$

где

$$P = \bigl\{x \mid p(x) < 0\bigr\}.$$

Ввиду сказанного находим

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_1(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}_1(y)\,dy - 2\int_P \widehat{F}_1(y)\,dy,$$

где

$$P = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}\right).$$

Поскольку функция $F_1$ четная и $\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}_1(y)\,dy = F_1(0)$, то

$$J = \pi + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} J_n,$$

где

$$J_n = \int_{n-1/4}^{n+1/4} \frac{\cos(2\pi y)}{y^2 - 1/16}\,dy.$$

Используя четность функции $\cos\bigl(2\pi(n+u)\bigr) = \cos(2\pi u)$ и равенство

$$\int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi u)\,du = \frac{1}{\pi},$$

получаем, что

$$J_n = \frac{1}{\pi(n^2 - 1/16)} + I_n,$$

где

$$I_n = \int_0^{1/4} \bigl(\Omega(n+u)+\Omega(n-u)-2\Omega(n)\bigr)\cos(2\pi u)\,du, \quad \Omega(y) = \left(y^2-\frac{1}{16}\right)^{-1}.$$

Таким образом,

$$J = \pi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - 1/16} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{11}$$

Для оценки интеграла $I_n$ воспользуемся известной теоремой о промежуточном значении. Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $g \in C[b-a, b+a] \cap D^2(b-a, b+a)$ то существует точка $\xi \in (b-a, b+a)$ такая, что

$$g(b-a) + g(b+a) - 2g(b) = a^2 g''(\xi).$$

Поэтому

$$|I_n| \leqslant \max_{|y-n|\leqslant 1/4} |\Omega''(y)| \cdot \int_0^{1/4} u^2 \cos(2\pi u)\,du. \tag{12}$$

С помощью непосредственных вычислений находим

$$\begin{gathered}\int_0^{1/4} u^2 \cos(2\pi u)\,du = \frac{1}{32\pi}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) < \frac{1}{500},\\ \Omega''(y) = \frac{6}{(y^2 - 1/16)^2} + \frac{1}{2(y^2 - 1/16)^3}.\end{gathered} \tag{13}$$

Из (11)–(13) и (7) находим

$$J = \pi + \frac{4}{\pi} - 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n < 3.415 + 10^{-3}\sigma,$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\big((n-1/4)^2-1/16\big)^2} + \frac{1}{2\big((n-1/4)^2-1/16\big)^3}\right) < 30,$$

и $J < 3.445$. Используя эту оценку, получаем

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} F_1(x)\,dx}{J} > \frac{4}{3.445} > 1.16\,.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Через $E$ обозначим множество всех функций, имеющих ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, которые на интервале $(-1,1)$ тождественно равны $x$. Для любых $f \in K_3(1)$ и $\mu \in E$ справедливы очевидные равенства

$$\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\widetilde{\mu}(u)\,du.$$

Здесь $\widetilde{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e(-ux)\,d\mu x$. Поэтому

$$A_3(1) \leqslant \inf_{\mu\in E} \|\widetilde{\mu}\|,$$

где $\|\widetilde{\mu}\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} |\widetilde{\mu}(u)|$. Пусть

$$k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}.$$

Ввиду сказанного для доказательства теоремы 4 достаточно лишь отыскать функцию $\mu \in E$, для которой

$$\|\widetilde{\mu}\| = 2k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{14}$$

Положим

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t} - k, \qquad |t| \leqslant \pi,$$

и продолжим функцию $\varphi$ на $\mathbb{R}$ как $2\pi$-периодическую. Ввиду того, что $\varphi$ четная, $\int_0^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0$, $\varphi$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а ее производная имеет на отрезке $[-\pi,\pi]$ ограниченную вариацию, $\varphi$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nt, \qquad b_n = O\big(n^{-2}\big).$$

Теперь построим $\mu$. Положим $\mu(x) = x$, $x \in [0,1)$, и при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\mu$ постоянна на полуинтервале $[n, n+1)$, а в точке $n$ имеет скачок, равный $-b_n$. Наконец, $\mu(-x) = \mu(x)$. Очевидно, что $\mu \in E$ и

$$\widetilde{\mu}(u) = 2\left(\frac{\sin 2\pi u}{2\pi u} - \varphi(2\pi u)\right).$$

Функция $\widetilde{\mu}$ является четной, и при $u \in [0, 1/2]$ имеем $\widetilde{\mu}(u) = k$. Таким образом, для того, чтобы проверить справедливость соотношения (14), осталось установить неравенство

$$\left|\frac{\sin t}{t} - \varphi(t)\right| \leqslant k \qquad \forall t > \pi. \tag{15}$$

Обозначим для краткости

$$\Phi(t) = \frac{\sin t}{t}, \qquad R(t) = \Phi(t) - \varphi(t).$$

Если $t = 2\pi m + \tau$, $\tau \in [0, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$R(t) = k + \big(\Phi(2\pi m + \tau) - \Phi(\tau)\big).$$

Отсюда немедленно вытекает, что при $t \in [2\pi m, 2\pi m + \pi]$, $m \in \mathbb{N}$

$$k - 1 \leqslant R(t) \leqslant k.$$

Следовательно, для указанных значений $t$ неравенство (15) выполнено.

Пусть теперь $t = 2\pi m - \tau$, $m \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, \pi)$. Имеем

$$R(t) = k + \Phi(2\pi m - \tau) - \Phi(\tau).$$

Оценка сверху $R(t) \leqslant k$ снова очевидна. В доказательстве нуждается лишь неравенство $R(t) \geqslant -k$, т.е.

$$\frac{\sin \tau}{\tau} - \frac{\sin(2\pi m - \tau)}{2\pi m - \tau} \leqslant 2k. \tag{16}$$

Если $m \geqslant 2$, то левая часть в неравенстве (16) не превосходит $1 + \frac{1}{3\pi} < 1.12$, в то время как $2k \geqslant 1.17$. Осталось рассмотреть случай $m = 1$, т.е. доказать, что

$$\psi(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau\big(1 - \tau/(2\pi)\big)} \leqslant 1.17 \qquad \forall \tau \in (0, \pi). \tag{17}$$

Функция $\sin\tau/\tau$ убывает на $(0,\pi)$, а $\bigl(1-\tau/(2\pi)\bigr)^{-1}$ возрастает. Поэтому имеем серию очевидных неравенств

$$\max_{\tau\in[2\pi/3,\pi]}\psi(\tau)\leqslant 2\frac{\sin(2\pi/3)}{2\pi/3}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}<1,$$

$$\max_{\tau\in[\pi/2,2\pi/3]}\psi(\tau)\leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}=\frac{3}{\pi}<1,$$

$$\max_{\tau\in[\pi/3,\pi/2]}\psi(\tau)\leqslant \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3}=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}<1.15,$$

$$\max_{\tau\in[\pi/4,\pi/3]}\psi(\tau)\leqslant \frac{6}{5}\cdot\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}=\frac{12\sqrt{2}}{5\pi}<\frac{17}{5\pi}<1.1,$$

$$\max_{\tau\in[0,\pi/4]}\psi(\tau)\leqslant \frac{8}{7}<1.15\,.$$

Из этих неравенств получаем (17). Тем самым, соотношение (14) полностью доказано, а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 4.

Авторы выражают благодарность С.Б. Стечкину за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
*E-mail*: `andreev@nw.math.msu.su`
`kon@sci.math.msu.su`

Поступило
03.11.95
Исправленный вариант
20.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Стечкин С.Б. Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. V. 23. №3,4. P. 289–291.
[2] Конягин С.В. О распределении дробных долей членов некоторых геометрических прогрессий // II Международная конференция "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тезисы докл. Воронеж: ВГУ, 1995. С. 89.
[3] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
[4] Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.
[5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
[6] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.