А. Ю. Попов, О проблеме моментов для быстроубывающих функций, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 66–74

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm1804

Математические заметки

том 60 выпуск 1 июль 1996

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

А. Ю. Попов

Публикация посвящена описанию классов функций $\{f\}$, определенных на $(0,+\infty)$, в которых проблема моментов вида

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t)\,dt = c_n \tag{1}$$

имеет решения при любых правых частях c_n. Другими словами, произвольная последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$ должна быть "допустимой" для решения интерполяционной задачи (1) в одном из упомянутых выше классов.

В [1] Д. Пойа для любой последовательности комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ доказал существование целой функции f такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt = c_n, \qquad n=0,1,2,\dots\,. \tag{2}$$

В [2] был получен следующий результат. Пусть S_+ – множество всех комплекснозначных функций $\varphi\in C^\infty[0,+\infty)$, для которых выполняются соотношения

$$\forall k\in\mathbb{N}_0 \qquad \varphi^{(k)}(0)=0,$$
$$\forall k,m\in\mathbb{N}_0 \qquad \lim_{t\to+\infty} t^m\varphi^{(k)}(t)=0.$$

Тогда любая последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ является моментами на $(0,+\infty)$ некоторой функции $f\in S_+$, т.е. выполняются равенства

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt = c_n, \qquad n=0,1,2,\dots\,. \tag{3}$$

В этой работе доказаны более сильные утверждения. Через $\mathbb{C}^\infty$ обозначим множество всевозможных последовательностей комплексных чисел, а через S_0 – множество всех непрерывных и ограниченных на $(0,+\infty)$ комплекснозначных функций, для которых выполняются соотношения

$$\forall m\in\mathbb{N} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^m\varphi(t)=0.$$

В частности, для $\forall\varphi \in S_0$ и $\forall a \geqslant 0$ сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} t^a |\varphi(t)|\, dt.$$

Для $\varphi \in S_0$ и $q > 1$ определим множество функций

$$E_{\varphi,q} = \left\{ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi(tq^{-k}) \;\middle|\; \{b_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}, \right.$$

$$\left. b_0 = 1,\ \lim_{k\to+\infty} |b_k|^{1/k} = 0 \right\}. \qquad (4)$$

Именно классы $E_{\varphi,q}$ при соответствующих ограничениях на функцию φ и будут поставлять нам решения проблемы моментов (1).

Теорема. *Пусть $q > 1$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \alpha_n = +\infty \qquad (5)$$

и при всех $m \neq n$, для которых $\operatorname{Re}\alpha_n = \operatorname{Re}\alpha_m$, имеем

$$\frac{(\operatorname{Im}\alpha_n - \operatorname{Im}\alpha_m)\ln q}{2\pi} \notin \mathbb{Z}. \qquad (6)$$

Пусть также $\varphi \in S_0$ и функция $t^{\alpha}\varphi(t)$, где $\alpha = \min \operatorname{Re}\alpha_n$, ограничена на $(0,1)$.

Тогда для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует функция $f \in E_{\varphi,q}$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t)\, dt = c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (7)$$

в том и только том случае, когда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \int_0^{+\infty} t^{\alpha_n}\varphi(t)\, dt \neq 0. \qquad (8)$$

Доказательство. Если $q > 1$ и последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (5) и (6), то все числа $\{q^{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ различны и

$$\lim_{n\to\infty} q^{\alpha_n} = \infty.$$

Следовательно, если φ_n – моменты функции $\varphi \in S_0$ (см. (8)) – отличны от нуля, то согласно [3, с. 297] для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует целая функция $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ такая, что

$$g(0) = 1, \qquad g(q^{\alpha_n}) = \frac{c_n}{\varphi_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (9)$$

Положим
$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^{-k}\varphi(tq^{-k}). \tag{10}$$
Ввиду (10) и (4) $f\in E_{\varphi,q}$. Ясно, что при любом $\beta\in\mathbb{C}$, $b=\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha=\min\operatorname{Re}\alpha_n$ последовательность функций
$$t^{\beta}\sum_{k=0}^{N}a_kq^{-k}\varphi(tq^{-k}) \tag{11}$$
сходится в каждой точке $t\in(0,+\infty)$ к $t^{\beta}f(t)\in C(0,+\infty)$ и ограничена по абсолютной величине функцией
$$t^b\psi(t)=t^b\sum_{k=0}^{\infty}|a_kq^{-k}\varphi(tq^{-k})|.$$
Из условия теоремы и определения класса S_0 видно, что при всех $b\geqslant\alpha$ имеет место оценка
$$\sup_{x>0}|x^b\varphi(x)|=M(b)<+\infty.$$
А так как $\{a_n\}$ – коэффициенты Тейлора целой функции, то при любом $\gamma\in\mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_kq^{k\gamma}|=C(\gamma)<+\infty.$$
Отсюда при всех $b\geqslant\alpha$ находим
$$\begin{aligned}t^b\psi(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}|a_kq^{-k}q^{kb}|(tq^{-k})^b|\varphi(tq^{-k})|\\&\leqslant\sup_{x>0}|x^b\varphi(x)|\sum_{k=0}^{\infty}|a_kq^{k(b-1)}|=M(b)C(b-1).\end{aligned}$$
Следовательно, функции $t^b\psi(t)$ ограничены на $(0,+\infty)$ при всех $b\geqslant\alpha$. А это влечет за собой включения
$$t^b\psi(t)\in L_1(0,+\infty)\qquad\forall b\geqslant\alpha. \tag{12}$$

Ввиду (12) к последовательности функций (11) можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Имеем
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}t^{\beta}f(t)\,dt&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^{-k}\int_0^{+\infty}t^{\beta}\varphi(tq^{-k})\,dt\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^{k\beta}\int_0^{+\infty}(tq^{-k})^{\beta}\varphi(tq^{-k})\,d(tq^{-k})\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^{k\beta}\int_0^{+\infty}x^{\beta}\varphi(x)\,dx=g(q^{\beta})\int_0^{+\infty}t^{\beta}\varphi(t)\,dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) и (9) получаем (7). Если же для какого-то $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} \varphi(t)\, dt = 0$, то и для любой функции $f \in E_{\varphi,q}$ справедливо $\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t)\, dt = 0$. Следовательно, в этом случае, бесконечная система уравнений (7) не может быть разрешима в классе $E_{\varphi,q}$ при любых правых частях. Теорема доказана.

Нетрудно сообразить, что для любой строго возрастающей последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}$ выполнено (6), а соотношения (8) в этом случае будут справедливы для любой неотрицательной функции $\varphi \in S_0$, не равной нулю тождественно.

Сказанное позволяет без труда получить из теоремы

Следствие 1. *Пусть* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная строго возрастающая последовательность действительных чисел,* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. *Пусть также* $\varphi \in S_0$ *– неотрицательная на* $(0,+\infty)$ *функция, не равная нулю тождественно, и, кроме того, функция* $t^{\alpha_1}\varphi(t)$ *ограничена на* $(0,1)$.

Тогда, каковы бы ни были $q > 1$ *и* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, *существует функция* $f \in E_{\varphi,q}$ *такая, что*

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t)\, dt = c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Следствие 1, в свою очередь, позволяет получить ряд предложений, усиливающих результаты работ [1] и [2].

Следствие 2. *Для любой* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ *существует целая функция* f *порядка* 2 *типа* 1, *удовлетворяющая условиям* (2).

Следствие 3. *Пусть* $1/2 < \rho < +\infty$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная строго возрастающая последовательность действительных чисел,* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. *Тогда для любой* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ *и любого* σ, $0 < \sigma < +\infty$, *существует целая функция* f *порядка* ρ *типа* σ, *для которой выполняются соотношения* (14).

Через $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ обозначим множество всех функций, аналитичных в области $\mathscr{D}$.

Следствие 4. *Какова бы ни была строго возрастающая последовательность действительных чисел* α_n, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, *для любой* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ *существует функция* $f \in S_+ \cap \mathscr{A}\big(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\big)$, *удовлетворяющая условиям* (14).

Если в следствии 4 положить $\alpha_n = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то получим предложение, усиливающее приведенный выше результат из [2].

Следствие 5. *Для любой* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ *существует функция* $f \in S_+ \cap \mathscr{A}\big(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\big)$, *для которой выполняются равенства* (3).

Теперь из следствия 1 выведем следствия 2–4. Поясним основную идею их доказательств. Приводимые ниже леммы 1–3 устанавливают, что функции из множеств $E_{\varphi,q}$ наследуют ряд аналитических свойств функции φ.

Поэтому согласно следствию 1 для доказательства разрешимости проблемы моментов

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t)\,dt = c_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_n \uparrow +\infty$, при любых правых частях $\{c_n\}$ в том или ином классе функций X, оказывается достаточным установить справедливость следующих двух утверждений:

1) хотя бы при одном значении $q > 1$

$$\forall \varphi \in X \implies E_{\varphi,q} \subset X;$$

2) в классе X содержится функция $\varphi \in S_0$, неотрицательная на $(0, +\infty)$ и не равная нулю тождественно.

Через $[\rho, \sigma)$, $0 < \rho < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, обозначим множество целых функций, порядок которых или меньше ρ, или равен ρ, но тип меньше σ.

Лемма 1. *Пусть $q > 1$, $0 < \rho < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, φ – целая функция порядка ρ типа σ, $f \in E_{\varphi,q}$. Тогда*

$$u(t) = f(t) - \varphi(t) \in [\rho, \sigma).$$

Доказательство. Из (4) следует, что функция $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi(tq^{-k}). \tag{15}$$

Поскольку

$$\max_{|t| \leqslant R} \max_{k \in \mathbb{N}} |\varphi(tq^{-k})| = \max_{|z| \leqslant Rq^{-1}} |\varphi(z)|,$$

а $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = b < +\infty$, то заключаем, что ряд (15) сходится равномерно в любом круге $|t| \leqslant R$, и, кроме того, при любом $R > 0$ справедливо неравенство

$$\max_{|z| \leqslant R} |u(z)| \leqslant b \max_{|z| \leqslant Rq^{-1}} |\varphi(z)|.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Доказательство следствия 2. Положим

$$\varphi_j(t) = t^j \exp(-t^2), \qquad j = 0, 1, \quad \alpha_n = n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Возьмем и зафиксируем некоторое $q > 1$. Нетрудно видеть, что все условия следствия 1 для последовательности $\{\alpha_n\}$ и функций φ_j, $j = 0, 1$, выполняются. Следовательно, для любой $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существуют функции $f_j \in E_{\varphi_j,q}$, $j = 0, 1$, для которых справедливы равенства

$$\int_0^{+\infty} t^n f_j(t)\,dt = \frac{c_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad j = 0, 1. \tag{16}$$

Теперь положим $f(t) = f_0(t) + f_1(t)$. По лемме 1

$$f(t) = \varphi_0(t) + u_0(t) + \varphi_1(t) + u_1(t),$$

где $u_0(t), u_1(t) \in [2, 1)$. Следовательно,

$$f(t) = (1+t)\exp(-t^2) + u(t),$$

где $u(t) = u_0(t) + u_1(t) \in [2, 1)$. Отсюда заключаем, что f является целой функцией порядка 2 типа 1. Так как функция f_0 четна, а f_1 нечетна, то из (16) находим

$$\int_{-\infty}^{0} t^n f_j(t)\,dt = (-1)^{n+j}\frac{c_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad j = 0, 1. \tag{17}$$

Складывая соотношения (16) и (17), приходим к равенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt = \frac{c_n}{2}\big(2 + (-1)^n + (-1)^{n+1}\big) = c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. При всех ρ, $1/2 < \rho < +\infty$, существует целая функция F_ρ порядка ρ, имеющая конечный и положительный тип, неотрицательная на $(0, +\infty)$ и лежащая в S_0. Действительно, если $\rho = 1$, то указанным условиям удовлетворяет функция $\exp(-z)$, а если $\rho > 1/2$ и $\rho \neq 1$, то полагаем

$$F_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^m n^{-\tau})^2, \tag{18}$$

где $m = [\rho] + 1$, а $\tau = m/\rho$. Из результатов, имеющихся в [4, с. 290–304], следует, что функция (18) обладает всеми требуемыми свойствами.

Возьмем $N \in \mathbb{N}$ таким, чтобы $N + \alpha_1 > 0$. Из сказанного вытекает, что если заданы числа $\rho > 1/2$ и $\sigma > 0$, то при некотором $\gamma > 0$ функция

$$\varphi(t) = t^N F_\rho(\gamma t)$$

имеет порядок ρ и тип σ, неотрицательна на $(0, +\infty)$ и лежит в S_0. При этом, очевидно, функция $t^{\alpha_1}\varphi(t)$ ограничена на $(0, 1)$. Зафиксируем некоторое $q > 1$. Тогда согласно следствию 1 для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^\infty$ существует $f \in E_{\varphi,q}$, удовлетворяющая условиям (14). По лемме 1 $f(t) = \varphi(t) + u(t)$, причем $u \in [\rho, \sigma)$. Следовательно, f – целая функция порядка ρ типа σ. Следствие 3 доказано.

Лемма 2. *Если* $q > 1$, $\varphi \in S_+$, *то* $E_{\varphi,q} \subset S_+$.

Доказательство. Поскольку $\varphi \in S_+$, то $\forall m \in \mathbb{N}_0$ $\varphi^{(m)} \in S_0$. Поэтому m раз продифференцированные ряды вида (4) сходятся равномерно на $[0,+\infty)$ и являются рядами такого же вида. Тем самым, для любой функции $f \in E_{\varphi,q}$ справедливы включения

$$f \in \mathbb{C}^\infty[0,+\infty) \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad f^{(m)} \in E_{\varphi,q}. \tag{19}$$

В доказательстве теоремы мы фактически проверили, что для любых $\psi \in S_0$ и $q > 1$ множество $E_{\psi,q}$ содержится в S_0. Это вместе с (19) дает

$$f^{(m)} \in S_0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{20}$$

Подставив $t = 0$ в продифференцированные ряды для функции f, убеждаемся в том, что соотношения

$$\varphi^{(m)}(0) = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

влекут за собой равенства

$$f^{(m)}(0) = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Из (20) и (21) получаем утверждение леммы.

Через $H_\infty(\Delta_\theta)$, $0 < \theta < \pi$, обозначим множество всех функций, аналитических и ограниченных в угле

$$\Delta_\theta = \bigl\{z \in \mathbb{C} \mid -\theta < \arg z < \theta,\ z \neq 0\bigr\}.$$

Лемма 3. *Пусть* $q > 1$, $\varphi \in \bigcap_{0<\theta<\pi} H_\infty(\Delta_\theta)$. *Тогда*

$$E_{\varphi,q} \subset \mathscr{A}\bigl(\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]\bigr).$$

Доказательство. Положим

$$M_\theta = \sup_{z\in\Delta_\theta} |\varphi(z)| < +\infty, \qquad \theta \in (0,\pi).$$

Заметим, что если $\theta \in (0,\pi)$, $z \in \Delta_\theta$, то при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $zq^{-k} \in \Delta_\theta$. Поэтому

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sup_{z\in\Delta_\theta} |\varphi(zq^{-k})| = M_\theta.$$

Ввиду сказанного все ряды вида

$$\sum_{k=0}^\infty b_k \varphi(zq^{-k}), \qquad \text{где} \quad \sum_{k=0}^\infty |b_k| < +\infty,$$

равномерно сходятся в углах Δ_θ $\forall \theta \in (0,\pi)$. Следовательно, для любой функции $f \in E_{\varphi,q}$ справедливы включения

$$f \in \bigcap_{0<\theta<\pi} H_\infty(\Delta_\theta) \subset \mathscr{A}\bigl(\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]\bigr).$$

Лемма доказана.

Если $\varphi \in S_+$, то $t^a\varphi(t) \in S_0$ при любом $a \in \mathbb{R}$. Поэтому для того, чтобы вывести следствие 4 из следствия 1 и лемм 2 и 3, достаточно доказать существование положительной на $(0,+\infty)$ функции φ, для которой одновременно выполняются включения

$$\varphi \in S_+, \tag{22}$$

$$\varphi \in \bigcap_{0<\theta<\pi} H_\infty(\Delta_\theta). \tag{23}$$

В качестве такой функции φ можно взять

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/B(t), & t \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \\ 0, & t = 0, \end{cases} \tag{24}$$

где $B(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n(n-1)}t^n$. Включение (23) следует из разложения функции $B(t)$ в бесконечное произведение, найденного в [5, лемма 3].

Для доказательства (22) достаточно проверить, что для функции φ, определенной в (24), выполняются равенства

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^m\varphi^{(k)}(t) = 0 \qquad \forall m, k \in \mathbb{N}_0. \tag{26}$$

Установим справедливость (26). С этой целью будет доказана

Лемма 4. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x > x_0(n)$ выполняется неравенство*

$$0 < B^{(n)}(x) < 2B(x). \tag{27}$$

Доказательство. Имеем $B(x) = B^+(x) + B^-(x)$, где

$$B^+(x) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m(m-1)}x^m, \qquad B^-(x) = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-m(m-1)}x^m.$$

Функция $B^-(z)$ является аналитической в области $|z| > 0$ и равна нулю на бесконечности. Следовательно, и все ее производные обладают этим же свойством. В то же время функция $B^+(x)$ при $x \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$, неограниченно возрастает со всеми своими производными. Ввиду сказанного, для доказательства соотношения (27) достаточно при $x \geqslant 0$ установить неравенства

$$B^{+^{(n)}}(x) \leqslant B^+(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Легко проверить, что если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ положительна и не возрастает, то функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/n!$ является целой, все ее производные на луче $(0,+\infty)$ положительны и

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad F^{(n)}(x) \leqslant F(x).$$

Это замечание вместе с очевидным соотношением $n! \cdot 2^{-n(n-1)} \searrow 0$ приводит нас к (28). Тем самым лемма 4 доказана.

Имеем

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n\big(B(t), B'(t), \dots, B^{(n)}(t)\big)}{\big(B(t)\big)^{n+1}}, \tag{29}$$

где P_n – некоторый однородный многочлен от $n+1$ переменной степени n. Поэтому, учитывая (27), получаем оценку

$$\Big|P_n\big(B(t), B'(t), \dots, B^{(n)}(t)\big)\Big| = O\Big(\big(B(t)\big)^n\Big), \qquad t \to +\infty. \tag{30}$$

Из (29), (30) и очевидного включения

$$\varphi(t) = \frac{1}{B(t)} \in S_0$$

выводим (26). Из (26) и легко проверяемого тождества $\varphi(1/z) = z\varphi(z)$ следует (25). Требуемые свойства функции $\varphi(t)$ установлены, а это доказывает следствие 4.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
07.08.92
Исправленный вариант
02.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Polya G. Sur l'indetermination d'un problème voisin du problème des moments // C. R. Acad. Sci. Paris. 1938. V. 207. P. 708–711.
[2] Duran A. J. The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. P. 731–741.
[3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
[4] Титчмарш Е. Теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
[5] Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90 (132). №4. С. 521–543.