С. Б. Стечкин, А. Ю. Попов, Асимптотическое распределение простых чисел в среднем, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6(312), 21–88

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/rm1018

1996 г. ноябрь — декабрь *т. 51, вып. 6(312)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 511.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В СРЕДНЕМ

С. Б. Стечкин, А. Ю. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Пусть

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1, \qquad \operatorname{li}x=\int_2^x(\ln t)^{-1}\,dt,$$

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n=p^m,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n), \qquad \psi_0(x)=\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2}\,.$$

Буквой p, как обычно, здесь обозначены простые числа.

Исследование поведения функции $\pi(x)$ является одной из центральных задач аналитической теории чисел. После того, как Адамар [1] и Валле-Пуссен [2] независимо доказали асимптотический закон

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}\sim\operatorname{li}x \qquad (x\to+\infty),$$

получение возможно лучших оценок сверху и снизу для модуля разности $P(x)=\pi(x)-\operatorname{li}x$ стало одним из главных направлений исследований в теории распределения простых чисел. Отметим сразу же, что обычно изучают функцию $R(x) = \psi(x) - x$ или же $R_0(x) = \psi_0(x) - x$. Последнее оказывается технически проще. Переход от $R(x)$ к $P(x)$ осуществляется с помощью известных соотношений [3, с. 124–125]

$$\pi_1(x) = \sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(t)\,dt}{t\ln^2 t}\,,$$

$$\pi_1(x) = \pi(x) + \sum_{2\leqslant m\leqslant \log_2 x} \frac{\pi(x^{1/m})}{m}\,,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$P(x) = \frac{R(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{R(t)\,dt}{t\ln^2 t} - \frac{\sqrt{x}}{\ln x} + O\Big(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\Big). \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что если $|R(x)|$ не слишком мал, то $|P(x)|$, грубо говоря, “в $\ln x$ раз меньше” чем $R(x)$.

В 1899 году Валле-Пуссен [4] доказал, что

$$R(x) = O\big(x\exp\{-c_1\sqrt{\ln x}\,\}\big).$$

(Через c_1, c_2, c_3 и т.д. мы будем обозначать некоторые положительные постоянные.) Наилучшая по порядку из известных в настоящее время оценок сверху $|R(x)|$ (см. [5]–[9]) имеет вид

$$R(x) = O\big(x\exp\{-c_2(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}\}\big) \qquad (x \geqslant 20). \tag{2}$$

Для ее доказательства потребовались очень глубокие и сложные теоремы об оценках тригонометрических сумм. Именно они и позволили получить неравенство

$$|\zeta(\sigma + it)| \leqslant c_3(\ln|t|)^{2/3}, \qquad \sigma \geqslant 1 - c_4(\ln|t|)^{-2/3}, \quad |t| > t_0. \tag{3}$$

А уже из (3) с помощью методов, разработанных еще Валле-Пуссеном, можно вывести, что при $|t| > t_0$

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \qquad \sigma > 1 - c_5(\ln|t|)^{-2/3}(\ln\ln|t|)^{-1/3}.$$

Последняя оценка дает (2). Подобные доказательства имеются в книге [10], а более полное изложение истории вопроса – в [8], см. также обзор [11].

Не желая умалять достоинства результата (2), отметим, что он носит “достаточный” характер и по существу лишь отражает имеющиеся на сегодняшний день оценки сверху вещественных частей нулей дзета-функции Римана. Давно известно, что чем лучше оценка сверху для действительных частей нулей $\zeta(s)$, тем лучше и оценка сверху для $|R(x)|$ (а значит, ввиду (1) и для $|P(x)|$). Например, справедливо соотношение

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|R(x)|}{\ln x} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|P(x)|}{\ln x} = \Theta, \tag{4}$$

где $\Theta = \sup\{\operatorname{Re} s \mid \zeta(s) = 0\}$.

Соотношение (4) показывает, что в действительности наибольший рост функций $|R(x)|$ и $|P(x)|$ определяется величиной Θ. Но, несмотря на усилия многих математиков, до сих пор про число Θ не известно ничего, кроме тривиального неравенства $1/2 \leqslant \Theta \leqslant 1$. Утверждение “$\Theta = 1/2$” составляет гипотезу Римана. С другой стороны, даже возможность $\Theta = 1$ пока не исключена.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в (4) нельзя заменить $\limsup$ на $\lim$. Это подтверждается теоремой Шмидта [12]

$$\begin{aligned} R(x) &= \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\varepsilon}), \\ P(x) &= \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (\forall\, \varepsilon > 0) \tag{5}$$

и безусловными оценками Литтлвуда [13]

$$\begin{aligned} R(x) &= \Omega_{\pm}(\sqrt{x}\ln\ln\ln x), \\ P(x) &= \Omega_{\pm}(\sqrt{x}(\ln x)^{-1}\ln\ln\ln x). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, функции $R(x)$ и $P(x)$ принимают “большие” по абсолютной величине как положительные, так и отрицательные значения, бесконечно много раз меняют знак и, следовательно, в окрестностях точек смены своего знака $R(x)$ и $P(x)$ по модулю “достаточно малы”.

Имеем также [14]

$$R(x) = O(x^{\Theta}\ln^2 x), \qquad P(x) = O(x^{\Theta}\ln x). \tag{7}$$

Оценки (5)–(7) представляют из себя уточнение грубого соотношения (4).

Примечательно, что и после усреднения $R(x)$ функция $R_1(x) = \int_0^x R(u)\,du$ остается колеблющейся. При этом упомянутые смены знака $R(x)$ не дают существенной интерференции. Имеем [15], [16, с. 120]

$$\begin{aligned} R_1(x) &= O(x^{1+\Theta}), \\ R_1(x) &= \Omega_{\pm}(x^{1+\Theta-\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0), \\ R_1(x) &= \Omega_{\pm}(x^{3/2}). \end{aligned} \tag{8}$$

Правда, если справедлива гипотеза Римана, то между O-оценками и Ω-оценками для $R_1(x)$ уже нет зазора, и аналог “феномена Литтлвуда” (неограниченность $R(x)/\sqrt{x}$) для функции $R_1(x)$ отсутствует: $R_1(x) = O(x^{3/2})$. Но происходит это, в основном, не за счет компенсации в результате интегрирования положительных и отрицательных значений $R(x)$, а потому, что “литтлвудовские всплески” встречаются относительно редко. Это показывает теорема Крамера [17]

$$\int_1^x R^2(u)u^{-1}\,du = O(x) \quad (\text{если } \Theta = 1/2) \tag{9}$$

или же

$$\int_1^x R^2(u)\,du \leqslant c_6 x^2 \quad (\text{если } \Theta = 1/2). \tag{10}$$

Насколько нам известно, оценки (8)–(10) и асимптотика

$$\Theta = 1/2 \implies \int_1^x R^2(u)u^{-2}\,du \sim k\ln x,\ 0 < k < +\infty\ (x \to +\infty),$$

найденная в [18], составляют основные результаты о средних значениях функции $R(x)$, полученные ранее.

Наша работа посвящена изучению различного рода средних от функции $R(x)$. Выводятся оценки сверху и снизу для интегралов от функции $R(x)$ и степеней ее модуля. Соответствующие неравенства доказываются и для $P(x)$. Основным нашим достижением мы считаем то, что нам удалось Ω-оценки функций

$$|P(u)|,\quad |R(u)|,\quad R^+(u) = \max(0, R(u)),\quad R^-(u) = -\min(0, R(u))$$

заменить *правильными по порядку оценками снизу от их интегралов* по “не слишком длинным” отрезкам (от x до Ax, A – постоянная). Доказаны как условные, так и безусловные (т.е. не зависящие от возможного значения Θ) оценки. В качестве иллюстрации приведем безусловные оценки снизу.

Существуют положительные постоянные x_0, $A > 1$ такие, что при всех $x > x_0$ справедливы неравенства

$$\int_x^{2x} |R(u)|\,du \geqslant \frac{x^{3/2}}{200}\,, \qquad \int_x^{2x} |P(u)|\,du \geqslant \frac{x^{3/2}}{\ln x}\,,$$
$$\int_x^{Ax} R^+(u)\,du \geqslant x^{3/2}, \qquad \int_x^{Ax} R^-(u)\,du \geqslant x^{3/2}.$$

Приведенный результат можно усилить, не производя сенсации, только за счет постоянного множителя при $x^{3/2}$ в правых частях неравенств. Ведь если бы даже для какой-нибудь последовательности $x_n \to +\infty$ было доказано, что

$$\int_{x_n}^{Ax_n} |R(u)|\,du \geqslant \sqrt{c_6A^3}\,x^{3/2}$$

(c_6 – постоянная неравенства (10)), то гипотеза Римана была бы опровергнута. Действительно, в предположении справедливости гипотезы Римана из (10) находим

$$\int_{x_n}^{Ax_n} |R(u)|\,du < \int_1^{Ax_n} |R(u)|\,du \leqslant \left(\int_1^{Ax_n} R^2(u)\,du\right)^{1/2} \left(\int_1^{Ax_n} du\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \sqrt{c_6(Ax_n)^2}\sqrt{Ax_n - 1} < (Ax_n)^{3/2}\sqrt{c_6}.$$

Несколько слов о структуре работы. В § 2 формулируются и обсуждаются полученные результаты. §§ 3–5 посвящены их доказательствам.

§ 2. Формулировки результатов

Теорема 1. *Существует абсолютная эффективная постоянная c_7 такая, что при всех $b \geqslant 1$ и $x \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\int_1^x |R(u)|^b\,du \leqslant (c_7b)^{2b}x^{1+b\Theta}. \tag{1.2}$$

Обсудим содержание теоремы 1. Пусть $b = 1$. Тогда

$$\int_1^x |R(u)|\,du \leqslant c_8 x^{1+\Theta}. \tag{2.2}$$

Из неравенства (2.2) вытекает, что результат от интегрирования $|R(u)|$ по отрезку $[1,x]$ не больше, чем от интегрирования $2c_8 u^{\Theta}$. То есть $R(u)$ "в среднем есть $O(u^{\Theta})$", причем постоянные c_7 и c_8 – абсолютные, они не зависят от возможного значения Θ. Более того, и $|R(u)|^b$ "в среднем есть $O(u^{b\Theta})$" при любом $b > 1$. Теорема Крамера (10) содержится в теореме 1 при $\Theta = 1/2$, $b = 2$. Отметим, что при $\Theta = 1/2$ ввиду (6) теорема 1 не следует из абсолютных оценок для функции R.

На случай $\Theta > 1/2$ нам удалось асимптотически улучшить известное соотношение (7).

Теорема 2. *Если $\Theta > 1/2$, то*

$$|R(x)| \leqslant c_9(\Theta) x^{\Theta}. \tag{3.2}$$

Постоянная c_9 здесь зависит от возможного значения Θ. Если же Θ недостижимо, т.е. $\zeta(\Theta + it) \neq 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$, то

$$R(x) = o(x^{\Theta}) \qquad (x \to +\infty).$$

Нам не удалось доказать неравенство (3.2) с абсолютной постоянной c_9. Поэтому даже если гипотеза Римана не верна и мы бы знали о значении Θ только то, что $\Theta > 1/2$, то и в этом случае теорема 1 не могла бы быть непосредственно выведена из (3.2), поскольку постоянная c_7 является абсолютной.

Заметим также, что если вдруг окажется (вопреки ожиданиям многих ученых!), что $\Theta = 1$, то теоремы 1 и 2 станут тривиальными и малосодержательными.

Приведем несколько следствий из сформулированных результатов. Положим

$$\Delta(u) = R(u) u^{-\Theta}.$$

Следствие 1. *При любых $b \geqslant 1$ и $x \geqslant 1$*

$$x^{-1} \int_1^x |\Delta(u)|^b\,du = O(1).$$

Постоянная в символе O зависит только от b.

Следствие 2. *Если $\lambda \leqslant (ec_7)^{-1}$, то*

$$x^{-1} \int_1^x \exp\{\lambda \sqrt{|\Delta(u)|}\,\}\,du = O(1).$$

Постоянная в символе O абсолютная; она не зависит от возможного значения Θ.

Подчеркнем еще раз, что если $\Theta = 1/2$, то согласно теореме Литтлвуда

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}(\ln\ln\ln x).$$

Таким образом, если верна гипотеза Римана, то оценки $R(u)$ в интегральных метриках принципиально отличаются от оценок максимума модуля этой функции. Те значения u, при которых $|R(u)|/\sqrt{u}$ велик, являются в некотором смысле исключениями из правила. Оценку меры больших значений $|R(u)|/\sqrt{u}$ дает

Следствие 3. *Пусть справедлива гипотеза Римана. Обозначим*

$$\mathfrak{M}(V,x)=\text{мера}\big\{u\in[x,2x]\mid |R(u)|>\sqrt{u}\,V(u)\big\},$$

где V – некоторая неубывающая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $x\to+\infty$. Тогда

$$\mathfrak{M}(V,x)=O\big(x\exp\{-c_{10}\sqrt{V(x)}\,\}\big). \tag{4.2}$$

Заметим, что из следствия 3 несложно вывести известную теорему [19]: *если $\Theta=1/2$, то*

$$R(u)=O(\sqrt{u}\ln^2 u).$$

Усилить ее, однако, не удается. Это получилось бы, если бы мы могли в (1.2) заменить $(c_7b)^{2b}$ на $(o(b))^{2b}$.

Следствие 4. *Существует абсолютная постоянная c_{11} такая, что при любых $b\geqslant 1$ и $x\geqslant 4$*

$$\int_2^x |P(u)|^b\,du\leqslant (c_{11}b)^{2b}x^{1+b\Theta}(\ln x)^{-b}. \tag{5.2}$$

Следствие 5. *Если $\Theta>1/2$, то*

$$|P(x)|\leqslant c_{12}(\Theta)x^{\Theta}/\ln x.$$

Если Θ недостижимо, то

$$P(x)=o(x^{\Theta}/\ln x)\qquad (x\to+\infty).$$

Из следствия 1, в свою очередь, вытекает

Следствие 6. *При любых $q\geqslant 1$ и $x\geqslant e$*

$$\int_1^x |\Delta(u)|^q u^{-1}du=O(\ln x).$$

Постоянная в O зависит от q, но не от Θ.

В частном случае $q=2$ в предположении справедливости гипотезы Римана Крамер [18] доказал утверждение более сильное, чем следствие 6:

$$\int_1^x R^2(u)u^{-2}\,du\sim k\ln x,$$

где $k=\sum_\rho(\nu_\rho/|\rho|)^2$, где ν_ρ – кратность нуля ρ, а $\sum_\rho$ понимается как сумма по всем различным нетривиальным нулям ρ дзета-функции Римана.[1]

Нам удалось найти обобщение этого результата Крамера.

---

[1] Напомним, что нетривиальными называются все нули $\zeta(s)$, лежащие в полосе $0<\operatorname{Re}s<1$. Остальные нули являются простыми, имеют вид $\{-2n\mid n\in\mathbb{N}\}$ и называются тривиальными. Все найденные к настоящему времени нетривиальные нули $\zeta(s)$ – простые, и до сих пор неизвестно, существуют ли у $\zeta(s)$ кратные нули.

Теорема 3. *Если* $b \in \mathbb{N}$, *то существует предел*

$$\mathscr{B}(b) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{-1} \int_1^x (\Delta(u))^b u^{-1}\, du, \tag{6.2}$$

где

$$\mathscr{B}(b) = (-1)^b \sum_{\substack{\operatorname{Im}(\sum_{k=1}^b \rho^{(k)}) = 0 \\ \operatorname{Re}\rho^{(k)} = \Theta,\ 1 \leqslant k \leqslant b}} \cdots \sum \prod_{k=1}^b (\rho^{(k)})^{-1}. \tag{7.2}$$

Суммирование в ряде (7.2) ведется по всем наборам $(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(b)})$ нетривиальных нулей $\zeta(s)$, для которых $\operatorname{Im}\bigl(\sum_{k=1}^b \rho^{(k)}\bigr) = 0$, а $\operatorname{Re}\rho^{(k)} = \Theta$, $1 \leqslant k \leqslant b$. Каждый нуль $\rho^{(k)}$ встречается в качестве k-й компоненты набора столько раз, какова его кратность. Доказано, что ряд (7.2) абсолютно сходится. Если Θ недостижимо, то сумма (7.2) пуста и $\mathscr{B}(b) = 0$.

В случае $b = 2$ имеем

$$\mathscr{B}(2) = \sum_{\substack{\operatorname{Im}(\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) = 0 \\ \operatorname{Re}\rho^{(1)} = \operatorname{Re}\rho^{(2)} = \Theta}} \sum \frac{1}{\rho^{(1)}\rho^{(2)}} = \sum_{\substack{\rho \text{ -- различны} \\ \operatorname{Re}\rho=\Theta}} \nu_\rho^2 |\rho|^{-2},$$

$$\mathscr{B}(2) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{-1} \int_1^x R^2(u) u^{-1-2\Theta}\, du.$$

Тем самым получается более сильная теорема, чем упомянутая теорема Крамера, поскольку здесь не делается никаких предположений о величине Θ.

Заметим, что $\mathscr{B}(1) = 0$. Сумма пуста, так как $\operatorname{Im}\rho \neq 0$. Авторам не известно, пуста или нет сумма $\mathscr{B}(2r+1)$, $r \in \mathbb{N}$, даже для достижимого Θ. С другой стороны, из симметричности нулей $\zeta(s)$ относительно действительной оси вытекает, что если Θ достижимо, то $\mathscr{B}(2r) > 0$ при любых $r \in \mathbb{N}$.

Перейдем к оценкам снизу интегралов от $|R(x)|$, $R^+(x)$, $R^-(x)$. Напомним, что

$$R^+(x) = \max(0, R(x)), \qquad R^-(x) = -\min(0, R(x)).$$

Центральным результатом этого раздела являются формулируемые ниже теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Существует, вообще говоря неэффективная, постоянная* c_{13} *такая, что при любом* $x > c_{13}$ *выполняется неравенство*

$$\int_x^{2x} |R(u)|\, du > \frac{x^{3/2}}{200}\,.$$

Теорема 5. *Существуют, вообще говоря неэффективные, положительные постоянные* c_{14} *и* A *такие, что при любом* $x > c_{14}$ *выполняются неравенства*

$$\int_x^{Ax} R^+(x)\,dx > x^{3/2},$$
$$\int_x^{Ax} R^-(x)\,dx > x^{3/2}.$$

В случае $\Theta = 1/2$ *утверждение теоремы* 5 *справедливо с* $A = 212$.

Как отмечалось во введении, если справедлива гипотеза Римана, то неравенства теорем 4 и 5 можно усилить только за счет постоянных в правых частях. Особенно интересно на наш взгляд то, что удалось дать оценки снизу в среднем для $|R|$, R^+, R^- на “не слишком длинном” отрезке. Мы полагаем, что следствия 7 и 8 являются новыми (см., например, [20]).

Следствие 7. *При* $x > c_{13}$ *на отрезке* $[x, 2x]$ *найдется число* u *такое, что*

$$|R(u)| > \frac{\sqrt{u}}{245}\,.$$

Следствие 8. *Если* A *и* $c_{14} > 0$ *– постоянные теоремы* 5, *то при всех* $x > c_{14}$ *на отрезке* $[x, Ax]$ *найдутся точки* u_1 *и* u_2, *в которых выполняются неравенства*

$$R(u_1) > A^{-3/2}\sqrt{u_1}, \qquad R(u_2) < -A^{-3/2}\sqrt{u_2}.$$

К достоинствам теорем 4 и 5, следствий 7 и 8 можно отнести их безусловность. Они верны при любом возможном значении Θ. Недостатком является неэффективность этих результатов. Мы не можем указать значения постоянных A, c_{13} и c_{14}. Дело в том, что теорема 4, например, вытекает из формулируемых ниже теорем 6 и 7. В теореме 6 рассматривается случай $\Theta = 1/2$, и в ней всё эффективно. Теорема 7 доказывается в предположении, что гипотеза Римана неверна. Для того чтобы наш метод ее доказательства дал эффективную постоянную c_{13}, нужно обладать достаточно большой информацией о нулях ζ. В частности, знать оценку сверху ординаты какого-нибудь нуля $\zeta(s)$ с вещественной частью, большей $1/2$. Такой ход рассуждений и приводит к неэффективности безусловной теоремы, несмотря на то, что при $\Theta > 1/2$ оценки снизу интегралов от $|R|$, R^+, R^- асимптотически лучше, чем при справедливости гипотезы Римана. Ситуация с теоремой 5 почти аналогична.

Теорема 6. *Если справедлива гипотеза Римана, то существует эффективная постоянная* c_{15} *такая, что при любых* $x > c_{15}$ *выполняется неравенство*

$$\int_x^{2x} |R(u)|\,du > \frac{x^{3/2}}{200}\,.$$

Из теоремы 6 и теоремы 1 немедленно вытекает

Следствие 9. *Если* $\Theta = 1/2$, *то при* $a \geqslant 2$

$$\int_x^{ax} |R(u)|\,du \underset{a}{\asymp} x^{3/2} \qquad (x \to +\infty). \tag{8.2}$$

Весьма вероятно, что утверждение (8.2) справедливо при любом $a > 1$, но доказать это мы не умеем.

Теорема 7. *Если* $\Theta > 1/2$, *то для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a > 1$ *существует постоянная* x_0, *зависящая от* ε *и* a, *такая, что при всех* $x > x_0$ *справедливо неравенство*

$$\int_x^{ax} |R(u)|\,du > x^{1+\Theta-\varepsilon}. \tag{9.2}$$

Если $\Theta > 1/2$ достижимо (т.е. при некотором $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ имеем $\zeta(\Theta + i\widetilde{\gamma}) = 0$), то теорему 7 можно несколько уточнить.

Теорема 8. *Если* $\Theta > 1/2$ *является достижимым, то для любого* $a > 1$ *существует положительная постоянная* c_{16}, *зависящая от* a, *такая, что при всех* $x \geqslant 1$

$$\int_x^{ax} |R(u)|\,du \geqslant c_{16} x^{1+\Theta}. \tag{10.2}$$

Постоянные x_0 в теореме 7 и c_{16} в теореме 8 зависят от возможного значения Θ и величин, указанных в формулировках этих теорем, неэффективно. Чтобы сосчитать эти постоянные в рамках наших методов требуется обладать достаточно обширной информацией о распределении нулей $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ (если они вообще там имеются). Заметим, что если бы постоянная x_0 в теореме 7 была эффективной, то мы получили бы алгоритм вычисления Θ с любой наперед заданной точностью, на что в настоящее время мало надежды.

Сравнивая оценки теорем 7 и 8 с (2.2), мы видим, что (9.2) может быть улучшено только за счет ε, а (10.2) – за счет c_{16}. В этом смысле результаты теорем 7 и 8 по порядку точны.

Теорема 9. *Если справедлива гипотеза Римана, то при всех* $x > 2 \cdot 10^9$ *выполняются неравенства*

$$\int_x^{10x} R^+(u)\,du \geqslant 0.01 x^{3/2}, \qquad \int_x^{10x} R^-(u)\,du \geqslant 0.01 x^{3/2}.$$

Теорема 10. *Предположим, что* $\Theta > 1/2$ *недостижимо. Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a > 1$ *при всех* $x > x_1(\varepsilon, a)$ *выполняются неравенства*

$$\int_x^{ax} R^+(u)\,du > x^{1+\Theta-\varepsilon}, \qquad \int_x^{ax} R^-(u)\,du > x^{1+\Theta-\varepsilon}. \tag{11.2}$$

Теорема 11. *Предположим, что* $\Theta > 1/2$ *достижимо. Обозначим*

$$k_1 = \sum_{\substack{\operatorname{Re}\rho=\Theta \\ \rho \text{ – различны}}} |\operatorname{Im}\rho|^{-1}, \qquad A_1 = \exp\{2\pi k_1\}.$$

Тогда существуют положительные постоянные c_{17} *и* c_{18} *такие, что при всех* $x > c_{18}$ *выполняются неравенства*

$$\int_x^{A_1 x} R^+(u)\,du > c_{19}x^{1+\Theta}, \qquad \int_x^{A_1 x} R^-(u)\,du > c_{19}x^{1+\Theta}.$$

Здесь и далее под символом

$$\sum_{\rho\in E} f(\rho), \tag{12.2}$$

где $E \subset \mathbb{C}$, $f\colon E \to \mathbb{C}$, понимается сумма значений функции f в нетривиальных нулях $\zeta(s)$, принадлежащих множеству E. Если не оговорено противное, то считается, что каждый нуль в сумме (12.2) встречается столько раз, какова его кратность. Если ряд не является абсолютно сходящимся, то под его суммой понимается предел конечных сумм

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{\substack{\rho\in E \\ |\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}} f(\rho). \tag{13.2}$$

У нас будут встречаться только такие ряды (12.2), которые будут сходиться в смысле существования предела (13.2) или даже абсолютно сходиться.

Ряд, сумму которого мы обозначили через k_1, абсолютно сходится, если $\Theta > 1/2$. Это вытекает из простейшей плотностной теоремы [21, с 237].

Теорема 12. *При любом* $x > c_{19}$ *справедливо неравенство*

$$\int_x^{2x} |P(u)|\,du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}. \tag{14.2}$$

Если $\Theta = 1/2$, *то постоянная* c_{19} *эффективна. Если* $\Theta > 1/2$, *то каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и* $a > 1$ *при* $x > c_{20}(a,\varepsilon)$ *имеем*

$$\int_x^{ax} |P(u)|\,du > x^{1+\Theta-\varepsilon}. \tag{15.2}$$

Если же $\Theta > 1/2$ *является достижимым, то при любом* $a > 1$ *и* $x > c_{21}(a)$ *имеем*

$$\int_x^{ax} |P(u)|\,du > c_{22}(a)x^{1+\Theta}(\ln x)^{-1}. \tag{16.2}$$

Невозможность принципиального улучшения теоремы 12 вытекает из следствия 4 ($b = 1$). Как и в теореме 4, постоянная c_{19} в безусловной оценке (14.2) является неэффективной.

Случай $\Theta = 1/2$ разобран отдельно в теоремах 13 и 14. Если справедлива гипотеза Римана, то в некотором смысле “чаще всего” $P(x) < 0$. Следующая теорема представляет из себя уточнение результата, имеющегося на с. 138–139 в [16]. Положим

$$\mathscr{P}(x) = x^{-3/2} \ln x \int_2^x P(u)\, du,$$

$$\omega = \sum_\rho \frac{1}{\sqrt{\gamma^4 + 2,5\gamma^2 + 9/16}}\,, \qquad \gamma = \operatorname{Im}\rho.$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$\omega = \sum_\rho \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} < \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} < 0.0456.$$

(См. ниже (20.4) в доказательстве теоремы 6.)

Теорема 13. *Если справедлива гипотеза Римана, то выполняются оценки*

$$\overline{L} = \limsup_{x\to+\infty} \mathscr{P}(x) \leqslant -\frac{2}{3} + \omega,$$

$$\underline{L} = \liminf_{x\to+\infty} \mathscr{P}(x) \geqslant -\frac{2}{3} - \omega.$$

При этом $\underline{L} \neq \overline{L}$.

Следствие 10. *Если верна гипотеза Римана, то при всех* $x > c_{23}$ *справедливы неравенства*

$$-0.714x^{3/2}(\ln x)^{-1} < \int_1^x P(u)\, du < -0.62x^{3/2}(\ln x)^{-1}.$$

При $\Theta = 1/2$ отрицательные значения функции P превалируют над положительными и на отрезках вида $[x, ax]$, где a “не слишком близко” к 1. Наоборот, при a, близких к 1, бесконечно часто наблюдается противоположный эффект.

Теорема 14. *Предположим, что справедлива гипотеза Римана. Тогда*

1) *при любом* $a > 1$ *существует эффективная постоянная* $c_{24} = c_{24}(a)$ *такая, что при всех* $x > c_{24}$ *выполнено неравенство*

$$\int_x^{ax} P(u)\, du < -\frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{\ln x}(a^{3/2}-1)K(a) + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right), \tag{17.2}$$

где

$$K(a) = 1 - \frac{3\omega}{2}\frac{(a^{3/2}+1)}{(a^{3/2}-1)}\,;$$

2) *существует эффективная постоянная* c_{25} *такая, что при всех* $X \geqslant 3$ *и* $\alpha \in (0, c_{25})$ *на отрезке* $[X, X^B]$, $B = \exp\{\alpha^{-1}\ln^3 1/\alpha\}$, *найдется точка* ξ, *для которой выполняется неравенство*

$$\int_\xi^{\xi+\alpha\xi} P(u)\, du > \frac{\xi^{3/2}\alpha\ln(1/\alpha)}{6\ln\xi}\,; \tag{18.2}$$

3) *существует постоянная* $A_2 > 1$ *такая, что при всех* $x > x_2$ *имеет место неравенство*

$$\int_x^{A_2x} P^+(u)\, du > \frac{x^{3/2}}{\ln x}\,.$$

Следствие 11. *Если справедлива гипотеза Римана, то при достаточно больших x имеем*

$$\int_x^{1,2x} P(u)\,du < -0.1x^{3/2}(\ln x)^{-1}, \tag{19.2}$$

$$\int_x^{2x} P(u)\,du < -x^{3/2}(\ln x)^{-1}, \tag{20.2}$$

$$\int_x^{2x} |P(u)|\,du \geqslant \int_x^{2x} P^-(u)\,du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}, \tag{21.2}$$

а при любом фиксированном $a > 1$

$$\int_x^{ax} P^+(u)\,du = \Omega\bigl(x^{3/2}(\ln x)^{-1}\bigr). \tag{22.2}$$

Неравенства следствия 11 по порядку неулучшаемы (см. следствие 4 при $b = 1$). Нам не известно, можно ли к безусловной оценке (14.2) добавить оценки снизу

$$\int_x^{A_2 x} P^+(u)\,du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}, \qquad \int_x^{A_2 x} P^-(u)\,du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}$$

хотя бы при каком-нибудь, пусть даже очень большом, но постоянном значении A_2. Таким образом, мы не смогли перенести на функцию P результат теоремы 5. В теореме 14 мы доказали это в предположении справедливости гипотезы Римана с постоянной $A_2 = 2$ для P^- (см. (21.2)) и с некоторой неэффективной постоянной A_2 для P^+. По-видимому, эта задача не является легкой в случае, если Θ недостижимо. Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то из теоремы 11 и леммы 1 (см. ниже) почти тривиально получается

Следствие 12. *Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то при $x > c_{26}$*

$$\int_x^{A_1 x} P^+(u)\,du > c_{27}x^{1+\Theta}(\ln x)^{-1},$$
$$\int_x^{A_1 x} P^-(u)\,du > c_{27}x^{1+\Theta}(\ln x)^{-1}.$$

Постоянная A_1 определена в теореме 11.

Следующая часть наших результатов посвящена обобщению на средние для $R(x)$ по “коротким отрезкам” теоремы Литтлвуда о бесконечно больших в сравнении с $\sqrt{x}$ при $x \to +\infty$ значениях $R(x)$. В 1914 году Литтлвуд доказал, что

$$R(x) = \Omega_\pm(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x). \tag{23.2}$$

Эта безусловная $\Omega_\pm$-оценка функции R остается лучшей по порядку и на сегодняшний день.

Пусть $H(x)$ – некоторая функция, положительная на $(1,+\infty)$. Рассмотрим среднее значение для R на отрезке $[x,x+H(x)]$:

$$R_1(x,H(x))=\frac{1}{H(x)}\int_x^{x+H(x)} R(u)\,du.$$

Из (10) при $\Theta=1/2$ (см. также теорему 1 при $b=1$) немедленно вытекает, что если $H(x)\geqslant \alpha x$, $\alpha>0$, то

$$\int_x^{x+H(x)} |R(u)|\,du=O\bigl((x+H(x))^{3/2}\bigr),$$

и, тем более,

$$R_1(x,H(x))=O\bigl(\sqrt{x+H(x)}\,\bigr).$$

Таким образом, если справедлива гипотеза Римана, то при усреднении функции R по "не очень короткому" отрезку феномен Литтлвуда пропадает, и $R(u)$ "в среднем есть $O(\sqrt{u})$".

В связи со сказанным возникает следующая задача. Требуется выяснить, для каких $H(x)=o(x)$ $(x\to+\infty)$ функция $x^{-1/2}R_1(x,H(x))$ неограничена или даже

$$R_1(x,H(x))=\Omega_\pm(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x). \tag{24.2}$$

Из (24.2) очевидным образом вытекает (23.2). Поэтому утверждения типа (24.2) можно рассматривать как обобщения упомянутого результата Литтлвуда. Отметим сразу же, что для

$$H(x)=o(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x)\qquad (x\to\infty) \tag{25.2}$$

соотношение (24.2) тривиально следует из (23.2). Действительно, исходя из равенства

$$R(x+y)-R(x)=-y+\sum_{x<n\leqslant x+y}\Lambda(n),\qquad y>0,$$

и равномерной по x оценки [22]

$$\pi(x+y)-\pi(x)=O\biggl(\frac{y+2}{\ln(y+2)}\biggr),\qquad y>0,$$

при $1\leqslant y\leqslant x$ получаем

$$R(x+y)-R(x)=O\biggl(\frac{(y+2)\ln x}{\ln(y+2)}\biggr)$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
(26.2)\qquad R_1(x,H(x)) &= R(x) + \frac{1}{H(x)}\int_0^{H(x)} \big(R(x+y)-R(x)\big)\,dy \\
&= R(x) + \frac{1}{H(x)}\int_0^{H(x)} O\biggl(\frac{(y+2)\ln x}{\ln(y+2)}\biggr)\,dy \\
&= \begin{cases} R(x) + O\biggl(\dfrac{H(x)\ln x}{\ln H(x)}\biggr), & H(x)\geqslant 3, \\ R(x)+O(\ln x), & 0<H(x)<3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Из (16.2), (25.2) и (23.2) следует (24.2).

Если же функция $x^{-1/2-\delta}H(x)$ неограничена на $(1,+\infty)$ при некотором $\delta>0$, то вряд ли (24.2) можно вывести из (23.2) на основе таких же простых соображений. Для достаточно широкого класса функций $H(x)=o(x)$ $(x\to+\infty)$ нам удалось решить поставленную выше задачу. В теоремах 15–19 будет предполагаться, что задано $x_0>0$, $H(x)\geqslant 1$ – произвольная действительнозначная функция на луче $[x_0,+\infty)$.

Теорема 15. *Если при некотором $\delta>0$ имеем*

$$
(27.2)\qquad H(x) = O(x^{1-\delta}),
$$

то

$$
R_1(x,H(x)) = \Omega_\pm(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x).
$$

Отметим, что теорема 15 является безусловной. Для функций $H(x)=o(x)$, растущих быстрее, чем (27.2), мы смогли обобщить результат Литтлвуда только лишь для достижимого Θ, в частности, в предположении справедливости гипотезы Римана.

Теорема 16.

1) *Если $\Theta=1/2$ и*

$$
(28.2)\qquad H(x) = O\big(x(\ln\ln x)^{-1}\big),
$$

то

$$
(29.2)\qquad R_1(x,H(x)) = \Omega_\pm(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x).
$$

2) *Если $\Theta>1/2$ достижимо и $H(x)=o(x)$ $(x\to+\infty)$, то*

$$
R_1(x,H(x)) = \Omega_\pm(x^\Theta),
$$

и, следовательно, тем более, верна оценка (29.2).

В предположении справедливости гипотезы Римана на функции, растущие быстрее, чем в (28.2), пришлось наложить дополнительные условия регулярности.

Теорема 17. *Пусть функция H имеет на $(x_0, +\infty)$ непрерывную неотрицательную производную. Обозначим для краткости $V(x) = x/H(x)$. Пусть затем*

$$V(x) \leqslant \ln\ln x, \qquad V(x) \uparrow +\infty,$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V(x)}\right) = O\left(\frac{1}{x\ln x}\right), \tag{30.2}$$
$$V(x^{\ln x}) \leqslant (V(x))^{\lambda},$$

где λ – некоторая постоянная. Тогда если $\Theta = 1/2$, то

$$R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x}\,\ln V(x)). \tag{31.2}$$

Условия (30.2) накладывают некоторые ограничения на регулярность роста функции H, подчиненной условию $x(\ln\ln x)^{-1} \leqslant H(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$. Ясно, что они выполняются для всех "достаточно медленно" и "достаточно правильно" растущих функций $V(x)$. В частности, условиями (30.2) удовлетворяют все функции $H(x) = x(\ln\ln x)^{\alpha}$, $-1 \leqslant \alpha < 0$, $H(x) = x(\ln\ln\ln x)^{\alpha}$, $\alpha < 0$, и т. д.

Теорема 18. *Пусть справедлива гипотеза Римана. Тогда равномерно по $x \geqslant 10$, $0 < v < 1/3$ справедлива оценка*

$$\int_x^{x+vx} R^2(u)\,du = O(vx^2\ln^4 v). \tag{32.2}$$

В частности, если $H(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, то

$$R_1(x, H(x)) = O\bigl(\sqrt{x}\,\ln^2(x/H(x))\bigr). \tag{33.2}$$

Постоянные в символах O – абсолютные и эффективные.

Из (29.2), (31.2) и (33.2) видно, что даже при $\Theta = 1/2$ и любых допустимых $H(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$ сохраняется зазор между Ω-оценкой $R_1(x, H(x))$ и оценкой сверху этой функции. Правда, чем медленнее убывает $H(x)/x$, тем этот зазор меньше.

Если не задаваться целью устанавливать количественные $\Omega_{\pm}$-оценки (29.2) и (31.2), то в предположении $\Theta = 1/2$ можно доказать теорему более простую, чем теоремы 15–17, не накладывая при этом на функцию $H(x)$ существенных ограничений.

Теорема 19. *Предположим, что $\Theta = 1/2$,*

$$1 \leqslant H(x) = o(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Тогда функция $x^{-1/2}R_1(x, H(x))$ неограничена как сверху, так и снизу.

Теоремы 15–18 автоматически переносятся с $R_1(x, H(x))$ на

$$P_1(x, H(x)) = \frac{1}{H(x)}\int_x^{x+H(x)} P(u)\,du. \tag{34.2}$$

При замене в (27.2), (29.2) и (31.2) R_1 на P_1 требуется правые части этих соотношений разделить на $\ln x$. Если $\Theta = 1/2$, $1 \leqslant H(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, то функция $x^{-1/2}P_1(x, H(x))\ln x$ неограничена как сверху, так и снизу.

Некоторые из результатов, сформулированных в этом параграфе, были анонсированы нами в [23]–[25].

В заключение § 2 скажем несколько слов о методах исследования, используемых в этой работе, и поясним, за счет чего нам удалось получить новые результаты. Для $R_0(x)$ (определение см. в начале статьи) известна формула, открытая Риманом, а потом доработанная Мангольдтом, Э. Ландау и другими:

$$-R_0(x) = \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right). \tag{35.2}$$

Ряд $\sum_\rho x^\rho/\rho$ по нетривиальным нулям $\zeta(s)$ сходится в смысле (13.2). Нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси, а для функции $\mathscr{N}(T)$, равной количеству нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{0 < \operatorname{Re} s < 1,$ $0 < \operatorname{Im} s \leqslant T\}$, справедлива асимптотика [10, с. 44] с эффективной постоянной в символе O

$$\mathscr{N}(T) = \frac{T\ln T}{2\pi} - \frac{1+\ln 2\pi}{2\pi}T + O(\ln T). \tag{36.2}$$

Обозначим

$$\mathscr{F}(x) = \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}\,. \tag{37.2}$$

Из (35.2) (см. также [16, с. 105–106]) очевидным образом вытекает, что

$$\begin{aligned} R_0(x) &= -\mathscr{F}(x) + O(1), && x \geqslant 2,\\ R_0(x) &= -\mathscr{F}(x) + O(\ln(x-1)), && 1 < x < 2,\\ R(x) &= -\mathscr{F}(x) + O(\ln x), && x \geqslant 2. \end{aligned} \tag{38.2}$$

Поэтому совершенно ясно, что теоремы 1–11 и 15–19 достаточно доказать для $\mathscr{F}(x)$ вместо $R(x)$. Функция $\mathscr{F}(e^t) = \sum_\rho \exp(\rho t)/\rho$ представляет из себя ряд экспонент, показатели которых – нетривиальные нули дзета-функции Римана.

Мы не доказали ничего нового о нулях $\zeta(s)$, но зато разработали ряд технических приемов для оценок интегралов от степеней модуля, положительных и отрицательных частей рядов экспонент такого рода. Это и позволило нам получить все основные теоремы этой работы.

§ 3. Доказательства теорем 1–3 и их следствий

Доказательство теоремы 1. Заметим сперва, что неравенство (1.2) достаточно установить лишь для четных целых b. Тогда для остальных b оно окажется верным с постоянной $2c_7$ вместо c_7. Действительно, если $b/2 \notin \mathbb{N}$, то возьмем в качестве m наименьшее четное число, превосходящее b. Если

$$\int_1^x (R(u))^m\,du \leqslant (c_{28}m)^{2m}x^{1+m\Theta},$$

то, обозначив $q = m/b$, $1/q' = 1 - 1/q$, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\int_1^x |R(u)|^b\,du &\leqslant \left(\int_1^x (R(u))^m\,du\right)^{1/q}\left(\int_1^x du\right)^{1/q'}\\ &\leqslant (c_{28}m)^{2b}x^{1/q+b\Theta}(x-1)^{1/q'}\\ &\leqslant (c_{28}m)^{2b}x^{1+b\Theta}\\ &\leqslant (2c_{28}b)^{2b}x^{1+b\Theta},\end{aligned}$$

а это и требовалось установить.

Ввиду сказанного, а также соотношений (38.2) заключаем, что для доказательства теоремы 1 достаточно при $b = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, проверить справедливость неравенства

$$\int_1^x (\mathscr{F}(u))^b\,du \leqslant (c_{29}b)^{2b}x^{1+b\Theta}. \tag{1.3}$$

Как известно [3], последовательность частичных сумм $\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T} x^\rho/\rho$ ряда (37.2) сходится к $\mathscr{F}(x)$ при $T \to +\infty$ (для удобства будем считать, что $T \in \mathbb{N}$) в каждой точке $x \in (1, +\infty)$. Следовательно, при любом $u > 1$

$$\lim_{T\to\infty} S(T, b, u) = (\mathscr{F}(u))^b, \tag{2.3}$$

где

$$S(T,b,u) = \sum_{\substack{\rho_1 \\ |\operatorname{Im}\rho_j|\leqslant T}}\cdots\sum_{\rho_b}\frac{u^{\rho_1+\cdots+\rho_b}}{\rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_b}.$$

Напомним лемму Фату [26, с. 40]. Пусть на промежутке $\omega \subset \mathbb{R}$ задана последовательность неотрицательных функций $f_T \in L(\omega)$ $(\forall\, T \in \mathbb{N})$. Пусть затем известно, что

$$\sup_{T\in\mathbb{N}}\int_\omega f_T(u)\,du = M < +\infty$$

и при почти всех $u \in \omega$

$$\exists \lim_{T\to+\infty} f_T(u) = f(u) \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f \in L(\omega)$ и $0 \leqslant \displaystyle\int_\omega f(u)\,du \leqslant M$.

Функции $S(T, 1, u)$ действительнозначны при $u \in \mathbb{R}$, поскольку нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси. Поэтому последовательность функций $S(T,b,u) = (S(T,1,u))^b$ при $b = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, неотрицательна. Интегралы от $S(T,b,u)$ по отрезку $[1,x]$ легко вычисляются:

$$\int_1^x S(T,b,u)\,du = \sum_{\substack{\rho_1 \\ |\operatorname{Im}\rho_j|\leqslant T}} \cdots \sum_{\rho_b} \frac{x^{1+\rho_1+\cdots+\rho_b}-1}{(1+\rho_1+\cdots+\rho_b)\rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_b}\,. \tag{3.3}$$

Поэтому, если мы покажем, что

$$M_1(b) = \sum_{\rho_1}\cdots\sum_{\rho_b}\biggl(|1+\rho_1+\cdots+\rho_b|\prod_{j=1}^b|\rho_j|\biggr)^{-1} \leqslant (c_{30}b)^{2b}, \tag{4.3}$$

то из (3.3), (4.3), учитывая, что $\operatorname{Re}\rho_j \leqslant \Theta$, получим

$$M(b,x) = \sup_T \int_1^x S(T,b,u)\,du \leqslant 2x^{1+b\Theta}M_1(b) < (2c_{30}b)^{2b}x^{1+b\Theta}.$$

А это вместе с (2.3) и леммой Фату приведет нас к (1.3).

Итак, осталось доказать неравенство (4.3). Имеем:

$$M_1(b) = \sum_{\overline{n}=(n_1,\ldots,n_b)\in\mathbb{Z}^b} A(\overline{n}),$$

где

$$A(\overline{n}) = \sum_{\substack{n_j\leqslant \operatorname{Im}\rho_j\leqslant n_j+1 \\ 1\leqslant j\leqslant b}}\cdots\sum \Biggl(\biggl|1+\sum_{j=1}^b\rho_j\biggr|\prod_{j=1}^b|\rho_j|\Biggr)^{-1}.$$

Оценим $A(\overline{n})$ сверху. Обозначим $\nu(\overline{n}) = \sum_{j=1}^b n_j$. Поскольку $\operatorname{Re}\rho > 0$, то в сумме $A(\overline{n})$ стоят нули, для которых

$$\operatorname{Re}\biggl(\sum_{j=1}^b\rho_j\biggr) > 0, \qquad \nu(\overline{n}) \leqslant \operatorname{Im}\biggl(\sum_{j=1}^b\rho_j\biggr) < \nu(\overline{n})+b.$$

Поэтому

$$\biggl|1+\sum_{j=1}^b\rho_j\biggr|^{-1} \leqslant a(\nu) = \begin{cases} 1, & |\nu|\leqslant b, \\ (|\nu|-b)^{-1}, & |\nu|>b. \end{cases}$$

Количество нулей $\zeta(s)$ с учетом кратности в прямоугольнике $\bigl\{s\in\mathbb{C} \mid 0<\operatorname{Re}s<1,$ $T\leqslant \operatorname{Im}s<T+1\bigr\}$ есть $O(\ln|T|)$, к тому же [27] мнимые части нетривиальных нулей ζ по абсолютной величине больше 14. Ввиду сказанного получаем оценку

$$A(\overline{n}) \leqslant \begin{cases} a(\nu)(c_{31})^b\prod_{j=1}^b\biggl(\dfrac{\ln|n_j|}{|n_j|-1}\biggr), & \min|n_j|\geqslant 14, \\ 0, & \min|n_j|<14. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$M_1(b) \leqslant (c_{31})^b M_2(b), \tag{5.3}$$

где

$$M_2(b) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a(\nu)\sigma(\nu),$$

$$\sigma(\nu) = \sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z} \\ n_1+\dots+n_b=\nu, \\ \min|n_j|\geqslant 14}} \cdots \sum_{n_b\in\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{b}\left(\frac{\ln|n_j|}{|n_j|-1}\right).$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, получаем следующее представление для суммы $M_2(b)$:

$$M_2(b) = \int_0^1 f_1(t) f_2(t)\,dt,$$

где

$$f_1(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a(\nu)\exp\{-2\pi i\nu t\},$$

$$f_2(t) = (f_3(t))^b, \qquad f_3(t) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z} \\ |n|\geqslant 14}} \frac{\ln|n|}{|n|-1}\exp\{2\pi i n t\}.$$

Учитывая четность коэффициентов Фурье функций f_1 и f_3, приходим к соотношениям

$$M_2(b) = 2^{b+2}\int_0^{1/2} f_4(t)(f_5(t))^b\,dt, \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a(\nu)\cos(2\pi\nu t), \\ f_5(t) &= \sum_{n=14}^{\infty}\frac{\ln n}{n-1}\cos(2\pi n t). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Стандартным образом [28, гл. 10, с. 671] получаем оценки функций (7.3):

$$\begin{aligned} |f_4(t)| &\leqslant c_{32} b|\ln t|, \\ |f_5(t)| &\leqslant c_{33}\ln^2 t, \end{aligned} \qquad 0 < t < 1/2. \tag{8.3}$$

Из (8.3) и (6.3) находим

$$M_2(b) \leqslant (c_{34} b)^{2b},$$

откуда, учитывая (5.3), получаем (4.3). Как отмечалось выше, это доказывает теорему 1.

Доказательство следствия 1. Обозначим

$$\Phi_b(u) = \int_1^u |R(t)|^b \, dt.$$

Интегрируя по частям, с учетом (1.2) находим

$$\begin{aligned}\int_1^x |\Delta(u)|^b \, du &= \int_1^x |R(u)|^b u^{-b\Theta} du \\ &= \Phi_b(x) x^{-b\Theta} + b\Theta \int_1^x \Phi_b(u) u^{-1-b\Theta} \, du \\ &\leqslant x(c_7 b)^{2b} + b\Theta \int_1^x (c_7 b)^{2b} \, du < x(c_7 b)^{2b}(1+b).\end{aligned} \tag{9.3}$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 6 выводится из (9.3) аналогичным приемом.

Доказательство следствия 2. Имеем

$$\exp\bigl\{\lambda\sqrt{|\Delta(u)|}\,\bigr\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n |\Delta(u)|^{n/2}}{n!}\,. \tag{10.3}$$

Согласно (9.3)

$$x^{-1}\int_1^x |\Delta(u)|^{n/2} \, du \leqslant (1+n/2)(c_7 n/2)^n, \qquad n \geqslant 2, \tag{11.3}$$

и очевидно, что

$$x^{-1}\int_1^x \bigl(|\Delta(u)|^0 + \lambda |\Delta(u)|^{1/2}\bigr) du \leqslant c_{35}. \tag{12.3}$$

Из (10.3)–(12.3) находим

$$\begin{aligned} x^{-1}\int_1^x \exp\bigl\{\lambda\sqrt{|\Delta(u)|}\,\bigr\} du &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\cdot\frac{1}{x}\int_1^x |\Delta(u)|^{n/2} \, du \\ &\leqslant c_{35} + \sum_{n=2}^{\infty}\Bigl(1+\frac{n}{2}\Bigr)\frac{(\lambda c_7 n/2)^n}{n!}\,. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Ясно, что если $\lambda \leqslant (ec_7)^{-1}$, то сумма ряда в (13.3) не превосходит некоторой абсолютной постоянной. Тем самым следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Согласно следствию 2 для $c_{36} = (ec_7)^{-1}$ имеем

$$I = \int_1^{2x} \exp\bigl\{c_{36}\sqrt{|\Delta(u)|}\,\bigr\}du = O(x). \tag{14.3}$$

С другой стороны, выполнено очевидное неравенство

$$I \geqslant I_1 = \int_E \exp\bigl\{c_{36}\sqrt{|\Delta(u)|}\,\bigr\}, \tag{15.3}$$

где

$$E = \bigl\{u \in [x, 2x] \mid |\Delta(u)| \geqslant V(u)\bigr\}. \tag{16.3}$$

Из (15.3) и (16.3) ввиду монотонности функции V получаем

$$I_1 \geqslant \mathfrak{M}(V, x)\exp\bigl\{c_{36}\sqrt{V(x)}\,\bigr\}. \tag{17.3}$$

Из (14.3), (15.3) и (17.3) вытекает (4.2). Следствие 3 доказано.

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 1. *Пусть*

$$Q(x) = \int_2^x \frac{|R(t)|\,dt}{t\ln^2 t}\,.$$

Тогда при любых $x \geqslant 2$ *с некоторой абсолютной постоянной* c_{37} *выполняется неравенство*

$$Q(x) \leqslant c_{37}x^{\Theta}\ln^{-2} x. \tag{18.3}$$

Доказательство. Сохраняя обозначение, введенное в доказательстве следствия 1, имеем

$$Q(x) = \frac{\Phi_1(t)}{t^2\ln^2 t}\bigg|_2^x + \int_2^x \Phi_1(t)\biggl(\frac{1}{t^2\ln^2 t} + \frac{2}{t^2\ln^3 t}\biggr)dt. \tag{19.3}$$

Из (2.2) и (19.3) находим

$$Q(x) \leqslant c_8x^{\Theta}\ln^{-2} x + c_8\int_2^x t^{-\Theta-1}(\ln^{-2} t + 2\ln^{-3} t)dt \leqslant c_{37}x^{\Theta}\ln^{-2} x.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство следствия 4. Из (1.1) и (18.3) находим

$$|P(x)| \leqslant \frac{|R(x)|}{\ln x} + c_{38}\frac{x^{\Theta}}{\ln x} \qquad (\forall\, x \geqslant 2).$$

Так как при любых $b \geqslant 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ справедливо неравенство $(\alpha+\beta)^b \leqslant 2^{b-1}(\alpha^b+\beta^b)$, то

(20.3)

$$\begin{aligned}\int_2^x |P(u)|^b\,du &\leqslant 2^{b-1}\left(\int_2^x |R(u)|^b(\ln u)^{-b}\,du + c_{38}^b\int_2^x u^{b\Theta}(\ln u)^{-b}\,du\right)\\ &= 2^{b-1}\left(\frac{\Phi_b(u)}{(\ln u)^b}\bigg|_2^x + b\int_2^x \frac{\Phi(u)\,du}{u(\ln u)^{b+1}} + c_{38}^b\int_2^x \frac{u^{b\Theta}}{(\ln u)^b}du\right)\\ &< (c_{39}b)^{2b}\left(x^{1+b\Theta}(\ln x)^{-b} + \int_2^x u^{b\Theta}(\ln u)^{-b}\,du\right).\end{aligned}$$

Проверим, что при любых $b \geqslant 1$, $\alpha \geqslant b/2$ и $x \geqslant 4$ имеет место оценка

$$I(x,b,\alpha) = \int_2^x u^{\alpha}(\ln u)^{-b}du \leqslant 6^b x^{\alpha+1}(\ln x)^{-b}. \tag{21.3}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}I(x,b,\alpha) &= \int_2^{\sqrt{x}} u^{\alpha}(\ln u)^{-b}\,du + \int_{\sqrt{x}}^x u^{\alpha}(\ln u)^{-b}\,du\\ &\leqslant (\ln 2)^{-b}x^{1+\alpha/2} + \left(\frac{1}{2}\ln x\right)^{-b} + \int_{\sqrt{x}}^x u^{\alpha}\,du\\ &\leqslant 2^b x^{\alpha+1}\big(x^{-\alpha/2} + (\ln x)^{-b}\big)\\ &\leqslant 2^b x^{\alpha+1}(\ln x)^{-b}\big(1 + (x^{-1/4}\ln x)^b\big).\end{aligned}$$

(В последнем переходе мы использовали, что $\alpha \geqslant b/2$ и, следовательно, $x^{-\alpha/2} \leqslant x^{-b/4}$.) Поскольку $\max_{x\geqslant 4}(x^{-1/4}\ln x) = 4/e$, окончательно получаем

$$I(x,b,\alpha) \leqslant 2^b x^{\alpha+1}(\ln x)^{-b}(1+(4/e)^b) < 6^b x^{\alpha+1}(\ln x)^{-b}.$$

Неравенство (21.3) доказано. Из (21.3) при $\alpha = b\Theta$ получаем (20.3), а из (20.3), в свою очередь, вытекает (5.2).

Перед тем, как приступить к доказательствам теорем 2 и 3, введем несколько обозначений и установим справедливость одной леммы. Положим

$$\mathscr{F}_1(x,\sigma) = \sum_{\operatorname{Re}\rho<\sigma} x^{\rho}/\rho, \tag{22.3}$$

$$\mathscr{F}_2(x,\sigma) = \mathscr{F}(x) - \mathscr{F}_1(x,\sigma) = \sum_{\operatorname{Re}\rho\geqslant\sigma} x^{\rho}/\rho. \tag{23.3}$$

Из простейшей плотностной теоремы о нулях дзета-функции Римана [21, с. 237], которая утверждает, что количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\big\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \leqslant \operatorname{Re} s < 1$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T\big\}$ есть $O(T^{3/2-\sigma}\ln^5 T)$, вытекает, что при $\sigma > 1/2$

$$S(\sigma) = \sum_{\operatorname{Re}\rho\geqslant\sigma} |1/\rho| < +\infty. \tag{24.3}$$

Следовательно, ряд (23.3) абсолютно сходится при всех $x > 0$, а ряд (22.3) сходится в каждой точке $x \in (1,+\infty)$, как и ряд (37.2) для $\mathscr{F}(x)$.

Лемма 2. *Если* $\sigma > 1/2$, *то*

$$\mathscr{F}_1(x,\sigma) = o(x^\sigma) \qquad (x \to +\infty).$$

Доказательство. Обозначим $B = (\sigma - 1/2)^{-1}$,

$$U(x) = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant x^B} x^\rho/\rho, \quad U_1(x,\sigma) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant x^B \\ \operatorname{Re}\rho < \sigma}} x^\rho/\rho.$$

Известно [3, с. 122, формулы (9)–(10)], что[2]

(25.3) $$\mathscr{F}(x) = U(x) + O(\ln x).$$

Отсюда находим

(26.3) $$\begin{aligned}\mathscr{F}_1(x,\sigma) &= \mathscr{F}(x) - \mathscr{F}_2(x,\sigma) = U(x) - \mathscr{F}_2(x,\sigma) + O(\ln x) \\ &= U_1(x,\sigma) - \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| > x^B \\ \operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma}} x^\rho/\rho + O(\ln x).\end{aligned}$$

Из упомянутой выше плотностной теоремы вытекает, что при любых $\sigma > 1/2$ и $d > 2$

$$\sum_{\substack{\operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma \\ |\operatorname{Im}\rho| > d}} |1/\rho| = O_\sigma(d^{1/2-\sigma}\ln^5 d).$$

Это вместе с (26.3) дает

(27.3) $$\begin{aligned}\mathscr{F}_1(x,\sigma) &= U_1(x,\sigma) + O_\sigma(x^{\Theta + B(1/2-\sigma)}\ln^5 x + \ln x) \\ &= U_1(x,\sigma) + O_\sigma(\ln^5 x).\end{aligned}$$

Осталось показать, что $U_1(x,\sigma) = o(x^\sigma)$ $(x \to +\infty)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Положим $\sigma_1 = 1/4 + \sigma/2$. Ясно, что $1/2 < \sigma_1 < \sigma$. В силу (24.3) найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что

(28.3) $$\sum_{\substack{\operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma_1 \\ |\operatorname{Im}\rho| > T}} |1/\rho| < \varepsilon/3.$$

Теперь воспользуемся очевидным представлением

(29.3) $$U_1(x,\sigma) = U_2(x) + U_3(x) + U_4(x),$$

где

$$U_2(x) = \sum_{\substack{\operatorname{Re}\rho < \sigma_1 \\ |\operatorname{Im}\rho| \leqslant x^B}} x^\rho/\rho, \quad U_3(x) = \sum_{\substack{\sigma_1 \leqslant \operatorname{Re}\rho < \sigma \\ T < |\operatorname{Im}\rho| \leqslant x^B}} x^\rho/\rho, \quad U_4(x) = \sum_{\substack{\sigma_1 \leqslant \operatorname{Re}\rho < \sigma \\ |\operatorname{Im}\rho| \leqslant T}} x^\rho/\rho.$$

[2] В [3] дана существенно лучшая, чем (25.3), оценка, но она нам не потребуется.

Оценим каждую из сумм в отдельности. Поскольку (см. [3, с. 124–125])

$$\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant y} |1/\rho| = O(\ln^2 y),$$

то

$$|U_2(x)| \leqslant x^{\sigma_1} \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant x^B} |1/\rho| \leqslant c_{40} B^2 x^{\sigma_1} \ln^2 x.$$

Ввиду (28.3)

$$U_3(x) \leqslant x^{\sigma} \sum_{\substack{\mathrm{Re}\,\rho\geqslant\sigma_1\\ |\mathrm{Im}\,\rho|>T}} |1/\rho| < x^{\sigma}\varepsilon/3.$$

Наконец,

$$|U_4(x)| \leqslant x^{\alpha} \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant T} |1/\rho| \leqslant c_{40} x^{\alpha} \ln T,$$

где

$$\alpha = \max\bigl\{\mathrm{Re}\,\rho \mid \mathrm{Re}\,\rho < \sigma,\ |\mathrm{Im}\,\rho| \leqslant T\bigr\}.$$

Поскольку α вместе с T зависит только от ε и $\alpha < \sigma$, то найдется такое число $T_1 = T_1(\varepsilon)$, что при любых $x > T_1$ будут выполняться неравенства

$$c_{40} B^2 x^{\sigma_1-\sigma} \ln^2 x < \varepsilon/3,$$
$$c_{40} x^{\alpha-\sigma} \ln^2 T < \varepsilon/3.$$

Тогда окажется, что при $\forall\, x > T_1$

$$|U_j(x)| < x^{\sigma}\varepsilon/3, \qquad j = 2, 3, 4. \tag{30.3}$$

Складывая оценки (30.3) для сумм U_j, приходим ввиду (29.3) к следующему утверждению. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_1 = T_1(\varepsilon)$ такое, что при всех $x > T_1$ справедливо неравенство $|U_1(x)| < \varepsilon x^{\sigma}$. Это и означает, что $U_1(x) = o(x^{\sigma})$ $(x \to +\infty)$. Последнее соотношение вместе с (27.3) убеждает нас в справедливости леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Если Θ недостижимо, то теорема 2 сразу же получается из леммы 2 при $\sigma = \Theta$. Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то согласно лемме 2

$$\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}_2(x, \Theta) + o(x^{\Theta}) \qquad (x \to +\infty). \tag{31.3}$$

Ввиду (24.3) и определений $\mathscr{F}_2(x, \Theta)$ и Θ имеем

$$|\mathscr{F}_2(x, \Theta)| \leqslant x^{\Theta} S(\Theta). \tag{32.3}$$

Из (31.3) и (32.3) получаем (3.2). Теорема 2 доказана.

Следствие 5 непосредственно вытекает из теоремы 2, леммы 1 и соотношения (1).

Доказательство теоремы 3. Если Θ недостижимо, то по теореме 2 имеем $\Delta(u) = o(1)$ $(u \to +\infty)$, и, следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left((\ln x)^{-1}\int_1^x (\Delta(u))^b u^{-1}du\right) = 0.$$

С другой стороны, сумма в (7.2) пуста, и, значит, $B = 0$. Таким образом, равенство (6.2) в этом случае доказано. Если Θ достижимо, то согласно лемме 2

$$\Delta(u) = \mathscr{F}_2(u)u^{-\Theta} + o(1) \qquad (u \to +\infty),$$

и, следовательно, достаточно доказать, что

$$B(b) = \lim_{x\to+\infty}\left((\ln x)^{-1}\int_1^x (\mathscr{F}_2(u),\Theta)u^{-1}du\right). \tag{33.3}$$

Сделав замену переменного $u = e^t$ и обозначив $y = \ln x$, $\gamma = \operatorname{Im}\rho$, получим соотношение, равносильное (33.3):

$$B(b) = \lim_{y\to+\infty}\left(y^{-1}\int_0^y \left(\sum_{\operatorname{Re}\rho=\Theta} e^{i\gamma t}/\rho\right)^b dt\right). \tag{34.3}$$

Если $\Theta > 1/2$, то соотношение (34.3) является почти очевидным. Поскольку

$$\sum_{\operatorname{Re}\rho=\Theta>1/2} |1/\rho| < +\infty,$$

функция

$$\varphi(t) = \sum_{\operatorname{Re}\rho=\Theta} e^{i\gamma t}/\rho \tag{35.3}$$

является почти периодической функцией Бора [29] с абсолютно сходящимся рядом экспонент. Ясно, что и при любом $b \in \mathbb{N}$ функция $(\varphi(t))^b$ обладает тем же свойством. Согласно теореме из [30] предел, стоящий в правой части выражения (34.3), равен свободному члену в разложении $(\varphi(t))^b$ в ряд экспонент. С другой стороны, возводя в степень ряд (35.3), убеждаемся в том, что свободный член получившегося ряда равен сумме $B(b)$.

Если $\Theta = 1/2$, то $\varphi(t)$ является почти периодической функцией Безиковича класса $B_2 \subset B_1$, но не Бора.[3] Упомянутая выше теорема из [30] доказывается для функций из B_1. Поэтому нам остается только установить, что в случае справедливости гипотезы Римана любая целая степень $\varphi(t)$ лежит в B_1, а ряд экспонент, сходящийся к ней по метрике этого пространства, получается после возведения в ту же степень ряда (35.3). Последнее означает, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\limsup_{y\to+\infty} J(N,y)\right) = 0, \tag{36.3}$$

[3] Определения этих пространств функций и стандартных метрик в них см. в [29].

где
$$J(N,y)=\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}|(\varphi(N,t))^b-(\varphi(t))^b|\,dt,\qquad \varphi(N,t)=\sum_{|\gamma|\leqslant N}e^{i\gamma t}/\rho.$$
При любых $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $b\in\mathbb{N}$ имеем

$$(37.3)\qquad \begin{aligned}|x_1^b-x_2^b|&=|x_1-x_2|\cdot\left|\sum_{k=0}^{b}x_1^kx_2^{b-k}\right|\\ &\leqslant|x_1-x_2|\cdot\sum_{k=0}^{b}|x_1|^k|x_2|^{b-k}\\ &\leqslant|x_1-x_2|\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{b}\big(|x_1|^{2k}+|x_2|^{2b-2k}\big)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{b-1}\big(|x_1-x_2|\,|x_1|^{2k}+|x_1-x_2|\,|x_2|^{2k}\big).\end{aligned}$$

Используя (37.3) для $x_1=\varphi(N,t)$, $x_2=\varphi(t)$ и далее неравенство Коши–Буняковского для интегралов, получаем

$$(38.3)\qquad \begin{aligned}J(N,y)&<\left(\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}\big(\varphi(N,t)-\varphi(t)\big)^2\,dt\right)^{1/2}\\ &\times\sum_{k=0}^{b-1}\left(\left(\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}(\varphi(N,t))^{4k}\,dt\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}(\varphi(t))^{4k}\,dt\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Вспомним теперь результат следствия 6 и его доказательство. Если положить $y=\ln x$, $u=e^t$, то следствие 6 при $\Theta=1/2$ утверждает, что

$$(39.3)\qquad \int_0^y|R(e^t)e^{-t/2}|^q dt\leqslant c_{41}(q)y\qquad(\forall\,q\geqslant1,\ \forall\,y\geqslant1).$$

Соотношение (39.3) выводилось из основного неравенства (1.2) теоремы 1. А в процессе доказательства теоремы 1 было видно, что оценка, стоящая в правой части (1.2), годится и для интегралов от степеней модуля всех сумм $\sum_{|\gamma|\leqslant N}x^\rho/\rho$. Всюду мы опираемся на то, что R "мало отличается" от $\mathscr{F}$ (см. (31.3)). А так как в случае $\Theta=1/2$ имеем $\mathscr{F}(e^t)e^{-t/2}=\varphi(t)$, то в действительности было показано, что при любом $q\geqslant1$

$$(40.3)\qquad \begin{gathered}\sup_{y\geqslant1}\frac{1}{y}\int_0^y|\varphi(t)|^q\,dt\leqslant c_{41}(q),\\ \sup_{y\geqslant1}\sup_{N>0}\frac{1}{y}\int_0^y|\varphi(N,t)|^q\,dt\leqslant c_{41}(q).\end{gathered}$$

Нетрудно проверить справедливость тождества

$$\varphi(t)+\varphi(-t)=\sum_{\gamma}\frac{\cos\gamma t}{\gamma^2+1/4}\qquad(\Theta=1/2).$$

Это означает, что $\varphi(-t)$ и $\varphi(N,-t)$ отличаются соответственно от $\varphi(t)$ и $\varphi(N,t)$ на $O(1)$ равномерно по N и t. Поэтому оценки (40.3) переносятся на интегралы по отрезкам $[-y,y]$:

$$\left.\begin{aligned} \sup_{y\geqslant 1}\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}|\varphi(t)|^q\,dt \leqslant c_{42}(q),\\ \sup_{y\geqslant 1}\sup_{N>0}\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}|\varphi(N,t)|^q\,dt \leqslant c_{42}(q). \end{aligned}\right. \qquad (\forall\, q\geqslant 1)$$

Эти неравенства вместе с (38.3) приводят к оценке

$$J(N,y) < c_{43}(q)\left(\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}\bigl(\varphi(N,t)-\varphi(t)\bigr)^2dt\right)^{1/2}. \tag{41.3}$$

Ввиду сходимости ряда $\sum_\rho |1/\rho|^2$ справедливо включение $\varphi\in B_2$. Поэтому ее ряд экспонент (35.3) сходится к φ по метрике этого пространства. То есть

$$\lim_{N\to\infty}\left(\limsup_{y\to+\infty}\frac{1}{2y}\int_{-y}^{y}\bigl(\varphi(N,t)-\varphi(t)\bigr)^2dt\right)^{1/2}=0. \tag{42.3}$$

Из (42.3) и (41.3) получаем (36.3). Как отмечалось выше, это доказывает теорему 3 и в случае $\Theta=1/2$.

Заметим, что обобщенная нами теорема Крамера, представляющая частный случай теоремы 3 ($b=2$ и $\Theta=1/2$) с точки зрения теории почти периодических функций, является тривиальным замечанием. Это – формула среднего для φ^2. Ясно, что она верна, так как $\varphi^2\in B_1$, поскольку $\varphi\in B_2$.

§ 4. Доказательства теорем 4–14 и их следствий

Докажем сначала теоремы 6–11. Из теорем 6, 7 очевидным образом будет следовать теорема 4, а из теорем 9–11 – теорема 5. Доказательству теоремы 6 предпошлем две леммы и введем еще несколько обозначений. Положим

$$\begin{gathered} \alpha=\frac{\ln 2}{8}, \qquad g(z)=\left(\frac{\sin\alpha z}{\alpha z}\right)^4\left(1-\frac{z}{12}\right),\\ \widehat{g}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-izy)\,dz. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Ясно, что $g\in L^2(\mathbb{R})$ и является целой функцией экспоненциального типа 4α. Поэтому

$$\begin{gathered} \operatorname{supp}\widehat{g}\subset[-4\alpha,4\alpha],\\ g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(y)\exp(iyz)\,dy=\int_{-4\alpha}^{4\alpha}\widehat{g}(y)\exp(iyz)\,dy. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Лемма 3.

$$\max_{y\in\mathbb{R}}|\widehat{g}(y)|=\frac{8}{3\ln 2}.$$

Доказательство. Положим

$$G(y)=\begin{cases}0, & |y|\geqslant 4,\\ \dfrac{|y|-4}{16}, & 2\leqslant|y|<4,\\ \dfrac{4-3|y|}{16}, & 0\leqslant|y|<2.\end{cases}\tag{3.4}$$

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\int_{\infty}^{+\infty}G(y)\exp(iyz)\,dy=\frac{\sin^4 z}{z^2}\qquad\forall\, z\in\mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$G(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 z}{z^2}\exp(-iyz)\,dz.\tag{4.4}$$

Пусть $G_1(y)=\displaystyle\int_0^y G(t)\,dt$, т.е. G_1 – первообразная для G, которая обращается в нуль в точке $y=0$. Интегрируя по y под знаком интеграла (4.4), находим

$$G_1(y)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 z}{z^3}\exp(-iyz)\,dz.$$

С другой стороны, интегрируя (3.4), получаем явную формулу для $G_1(y)$:

$$G_1(y)=\begin{cases}\dfrac{8y-3y^2}{32}, & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ \dfrac{(y-4)^2}{32}, & 2<y<4,\\ 0, & y\geqslant 4,\\ -G_1(-y), & y<0.\end{cases}\tag{5.4}$$

Пусть

$$G_2(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^4\exp(-iyz)\,dz.$$

Так как G_2 – преобразование Фурье целой функции $\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^4$ экспоненциального типа 4 из класса $L_2(\mathbb{R})$, то $\operatorname{supp} G_2\subset[-4,4]$. Имеем также

$$G_2'(y)=-G_1(y),\qquad G_2(0)=1/3.$$

Легко видеть, что функция $\widehat{g}$, определенная в (1.4), выражается через G_1 и G_2 следующим образом:

$$\widehat{g}(y)=\frac{1}{\alpha}\left(G_2\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)+\frac{i}{12\alpha}G_1\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)\right).$$

Отсюда находим
$$|\widehat{g}(y)| = \frac{1}{\alpha}\sqrt{G_2^2\Big(\frac{y}{\alpha}\Big) + \Big(\frac{2}{3\ln 2}\Big)^2 G_1^2\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)}.$$
Поскольку $\widehat{g}$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, обращающаяся в нуль вне $(-4\alpha, 4\alpha)$, ясно, что максимум $|\widehat{g}(y)|$ на $\mathbb{R}$ существует и лежит на интервале $(-4\alpha, 4\alpha)$. Но, как мы сейчас установим, функция $G_2^2(y/\alpha) + k^2 G_1^2(y/\alpha)$, $k = 2/(3\ln 2)$, имеет на интервале $(-4\alpha, 4\alpha)$ единственный локальный экстремум в точке $y = 0$. Отсюда и будет следовать, что
$$\max_{y\in\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)| = |\widehat{g}(0)| = \frac{1}{\alpha}|G_2(0)| = \frac{8}{3\ln 2}\,.$$

Итак, проверим, что функция $H(x) = G_2^2(x) + \lambda G_1^2(x)$ при $0 < \lambda < 1$ имеет на интервале $(-4, 4)$ единственный локальный экстремум в точке $x = 0$. Имеем:
$$\begin{aligned} H'(x) &= 2G_2(x)G_2'(x) + 2\lambda G_1(x)G_1'(x) \\ &= -2G_2(x)G_1(x) + 2\lambda G_1(x)G(x) \\ &= -2G_1(x)(G_2(x) - \lambda G(x)). \end{aligned}$$

Из (5.4) следует, что $G_1(x)$ имеет на $(-4, 4)$ единственный нуль в точке $x = 0$. Поэтому осталось показать, что

$$H_1(x) = G_2(x) - \lambda G(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in (-4, 4). \tag{6.4}$$

При $x \in (4/3, 4)$ неравенство (6.4) очевидно, так как на этом интервале $G(x) < 0$ (см. (3.4)), а $G_2(x) > 0$. (Если бы на интервале $(0, 4)$ нашлась точка x_0, в которой $G_2(x_0) \leqslant 0$, то ввиду того, что $G_2(0) > 0$, нашлась бы и точка $x_1 \in (0, 4)$, в которой $G_2(x_1) = 0$. Но тогда по теореме Ролля на интервале $(x_1, 4)$ функция $G_2'(x) = -G_1(x)$ имела бы нуль, а это, как отмечалось выше, неверно.) На $[0, 4/3]$ проверить (6.4) тоже несложно. При этих значениях x имеем

$$\begin{aligned} H_1(x) \geqslant G_2(x) - G(x) = H_2(x) = H_2(0) + \int_0^x H_2'(t)\,dt \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \int_0^x \big(G_2'(t) - G'(t)\big)\,dt = \frac{1}{12} + \int_0^x \Big(\frac{3}{16} - G_1(t)\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Из (5.4) видно, что $G_1(t) \leqslant 3/16\, \forall\, t \in (0, 4/3)$. Поэтому $H_1(x) \geqslant H_2(x) > 0$. Таким образом, мы установили (6.4) при $\forall\, x \in [0, 4)$, а значит, и при любых $x \in (-4, 4)$ ввиду четности H_1. Тем самым лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. *Справедливы следующие неравенства*:

$$|g(x)| < \frac{0.8}{x + 14.5} \qquad \forall\, x \geqslant 26, \tag{7.4}$$

$$|g(x)| < \frac{0.8}{|x + 14|} \qquad \forall\, x \leqslant -40. \tag{8.4}$$

Доказательство. Неравенство (7.4) установим по отдельности на промежутках $\delta_1 = [26, 46]$ и $\delta_2 = (46, +\infty)$. Из определения функции g (см. (1.4)) получаем

$$|g(x)| = \frac{a(x)(\sin \alpha x)^4}{12\alpha^4(x + 14.5)},$$

где $a(x) = x^{-4}(x + 14.5)(x - 12)$. Нетрудно убедиться в том, что при $x \geqslant 20$ функция $a(x)$ положительна и строго убывает. Ввиду сказанного приходим к оценкам

$$\sup_{x\in\delta_2} |g(x)(x + 14.5)| \leqslant \frac{a(46)}{12\alpha^4}, \tag{9.4}$$

$$\max_{x\in\delta_1} |g(x)(x + 14,5)| \leqslant \frac{a(26)}{12\alpha^4} \cdot \max_{x\in\delta_1}(\sin^4 \alpha x). \tag{10.4}$$

Легко проверить, что $\max_{x\in\delta_1}(\sin^4 \alpha x) < 0.4$, и после этого непосредственным подсчетом установить, что правые части неравенств (9.4) и (10.4) меньше 0.8. Тем самым (7.4) доказано. Аналогичным образом доказывается и неравенство (8.4). Имеем:

$$|g(x)| = \frac{a_1(x)\sin^4 \alpha x}{|x + 14| \cdot 12\alpha^4} \leqslant \frac{a_1(x)}{|x + 14| \cdot 12\alpha^4},$$

где $a_1(x) = |x + 14|\,|x - 12|x^4$. При $x \leqslant -20$ функция $a_1(x)$ строго возрастает, следовательно,

$$\max_{x\leqslant -40}\bigl(|x + 14|\,|g(x)|\bigr) \leqslant \frac{a_1(-40)}{12\alpha^4} < 0.8,$$

а это и означает справедливость (8.4). Лемма 4 полностью доказана.

Напомним, что в теореме 6 рассматривается случай $\Theta = 1/2$. Это означает, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Нам будет удобно расположить их в последовательность $\{\rho_n = 1/2 + i\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0}$ в порядке возрастания их мнимых частей. Если нуль оказался кратным, то он записывается в получившуюся последовательность столько раз, какова его кратность. Наконец, $\gamma_{-n} = -\gamma_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\varphi(t) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \exp(i\gamma_n t).$$

Из (27.2) следует, что

$$\mathscr{F}(e^t)e^{-t/2} = \varphi(t) \qquad (\Theta = 1/2). \tag{11.4}$$

Доказательство теоремы 6. Поскольку при $x \geqslant 2$ имеем $R_0(x) = -\mathscr{F}(x) + O(1)$, достаточно доказать, что

$$\int_x^{2x} |\mathscr{F}(u)|\,du \geqslant 51 \cdot 10^{-4} x^{3/2} \qquad (\forall\, x \geqslant 1). \tag{12.4}$$

В свою очередь, (12.4) вытекает из неравенства

$$\int_x^{2x} |\mathscr{F}(u)| u^{-3/2}\,du \geqslant 51 \cdot 10^{-4} \qquad (\forall\, x \geqslant 1). \tag{13.4}$$

Сделаем в интеграле замену переменного $u = e^t$. В результате этого, обозначив $X = \ln x + \frac{1}{2}\ln 2$ и учитывая (11.4), придем к соотношению, эквивалентному (13.4):

$$J(X) = \int_{X-4\alpha}^{X+4\alpha} |\varphi(t)|\,dt \geqslant 51 \cdot 10^{-4}, \qquad X \geqslant \frac{1}{2}\ln 2. \tag{14.4}$$

Положим

$$J_1(X) = \int_{X-4\alpha}^{X+4\alpha} \varphi(t)\widehat{g}(t-X)\exp\{i\gamma_1(X-t)\}\,dt.$$

Используя результат леммы 3, получаем оценку

$$|J_1(X)| \leqslant J(X)\max_{y\in\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)| = \frac{8}{3\ln 2} \cdot J(X). \tag{15.4}$$

С другой стороны, интеграл $J_1(X)$ вычисляется в виде ряда, модуль которого не очень сложно оценить снизу. Имеем:[4]

$$\begin{aligned} |J_1(X)| &= \left| \int_{-4\alpha}^{4\alpha} \varphi(y+X)\widehat{g}(y)\exp(-i\gamma_1 y)\,dy \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(i\gamma_n X)}{\rho_n} \int_{-4\alpha}^{4\alpha} \widehat{g}(y)\exp\{i(\gamma_n-\gamma_1)y\}\,dy \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(i\gamma_n X)}{\rho_n} g(\gamma_n-\gamma_1) \right| \\ &\geqslant \frac{|g(0)|}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|g(\gamma_n-\gamma_1)|}{|\rho_n|} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n} \right| \\ &= \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{g(-(\gamma_n+\gamma_1))}{\rho_n} \right|. \end{aligned} \tag{16.4}$$

---

[4] Равенство $\int_a^b \varphi(t)f(t)\,dt = \sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \int_a^b f(t)\exp(i\gamma_n t)\,dt$ выполняется для любой функции $f \in L[a,b]$, $0 < a < b < +\infty$, так как частичные суммы $\sum\limits_{0<|n|<N}$ ряда $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1}\exp(i\gamma_n t)$ сходятся к $\varphi(t)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$ и являются равномерно ограниченными на этом отрезке (см. [3, с. 122, (9)–(10)]).

Ясно, что если доказать оценку

$$\sigma = \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| - \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{g(-(\gamma_n-\gamma_1))}{\rho_n}\right| > 0.02, \tag{17.4}$$

то из (15.4)–(17.4) получим (14.4):

$$|J(X)| \geqslant \frac{3\ln 2}{8}|J_1(X)| \geqslant \frac{3\ln 2}{8}\sigma \geqslant \frac{3\ln 2}{8\cdot 50} > 51\cdot 10^{-4}.$$

Тем самым теорема 6 будет доказана. Таким образом, осталось проверить справедливость неравенства (17.4).

Используя приведенные в [31] (см. также [27]) приближенные значения ординат первых шести нулей дзета-функции Римана, с помощью компьютера[5] получаем оценки

$$\frac{1}{|\rho_1|} > 0.07, \quad \sum_{n=2}^{6}\left|\frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| < 0.026, \quad \sum_{n=1}^{3}\left|\frac{g(-\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| < 0.002. \tag{18.4}$$

Теперь оценим сверху сумму

$$\sigma_1 = \sum_{n=7}^{\infty}\left|\frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| + \sum_{n=4}^{\infty}\left|\frac{g(-\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right|.$$

При $n \geqslant 7$ имеем [31] $\gamma_n-\gamma_1 \geqslant \gamma_7-\gamma_1 > 26$, а если $n \geqslant 4$, то $\gamma_n+\gamma_1 \geqslant \gamma_4+\gamma_1 > 40$. Поэтому к оценке значений $|g(\gamma_n-\gamma_1)|$ и $|g(-(\gamma_n-\gamma_1))|$ можно применить лемму 4. Учитывая неравенство $14.1 < \gamma_1 < 14.2$, из леммы 4 получаем

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leqslant \sum_{n=7}^{\infty}\frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n-\gamma_1+14.5)} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n+\gamma_1-14)} \\ &< \sum_{n=7}^{\infty}\frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n+0.3)} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n+0.1)} \\ &< 0.8\left(\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{|\rho_n|^2} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{|\rho_n|^2}\right) \\ &= 0.8\left(\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{|\rho_n|^2} - \left(\frac{1}{|\rho_4|^2}+\frac{1}{|\rho_5|^2}+\frac{1}{|\rho_6|^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{19.4}$$

[5] Мы использовали известные неравенства $a_n \leqslant \gamma_n \leqslant b_n$, $1 \leqslant n \leqslant 7$, где a_n, b_n – десятичные дроби, $0 < b_b - a_n < 10^{-3}$. Далее, делалась оценка $\left|\frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| \leqslant \frac{M_n}{a_n}$, где $M_n = \max_{t\in\delta_n}|g(t)|$, $\delta_n = [a_n-b_1, b_n-a_1]$. Получить границу сверху $M_n' \geqslant M_n$, где M_n' – конечные десятичные дроби, мало отличающиеся от M_n, не представило труда. Далее было установлено, что $\sum_{n=2}^{6} M_n'/a_n \leqslant 0.026$. Аналогично оценивались и другие конечные суммы, связанные с $\rho_1,\dots,\rho_6$. На компьютере велись *только точные вычисления с рациональными числами.* Таким образом, все неравенства строго доказаны. Однако, выкладки слишком громоздки для того, чтобы приводить их здесь.

Имеет место равенство [3, с. 91–92]

$$\sum_{\rho} \frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2} = 2 + C - \ln 4\pi < 0.0465,$$

где C – постоянная Эйлера, $\beta = \operatorname{Re}\rho$, $\gamma = \operatorname{Im}\rho$. Если справедлива гипотеза Римана, то

$$\sum_{\rho} \frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-2} < 0.0465. \tag{20.4}$$

Имеем также

$$\begin{gathered} 2(|\rho_1|^{-2} + |\rho_2|^{-2} + |\rho_3|^{-2}) > 0.0175, \\ |\rho_4|^{-2} + |\rho_5|^{-2} + |\rho_6|^{-2} > 0.002. \end{gathered} \tag{21.4}$$

Из (19.4)–(21.4) получаем $\sigma_1 < 0,022$. Отсюда и из (18.4) находим

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{6} \left|\frac{g(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| - \sum_{n=2}^{3} \left|\frac{g(-\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right| - \sigma_1 \\ &> 0.07 - 0.026 - 0.002 - 0.022 = 0.02. \end{aligned}$$

Мы получили (17.4), а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 6.

Докажем сразу же и теорему 9, поскольку метод ее доказательства очень близок к методу, применявшемуся только что при доказательстве теоремы 6.

Лемма 5. *Предположим, что справедлива гипотеза Римана. Пусть* $b > 0$, $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n^{-1} \exp(i\gamma_n t)$, $Y > b$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\int_{Y-b}^{Y+b} |\varphi(t)|\,dt \geqslant \frac{4b}{\pi|\rho_1|} - \frac{\pi}{b} \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0,\, n\neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos((\gamma_n-\gamma_1)b)|}{|(\gamma_n-\gamma_1)^2 - (\pi/2b)^2|\,|\rho_n|}\,.$$

Доказательство. Положим

$$g_1(y) = \cos\Big(\frac{\pi y}{2b}\Big), \qquad |y| \leqslant b. \tag{22.4}$$

Тогда [32, с. 357] имеем

$$\widehat{g}_1(z) = \int_{-b}^{b} \cos\Big(\frac{\pi y}{2b}\Big) \exp(izy)\,dy = \frac{4\pi a \cos(bz)}{\pi^2 - 4z^2b^2}\,.$$

Следовательно,

$$|\widehat{g}_1(z)| = \frac{\pi}{b}\left|\frac{\cos bz}{z^2 - (\pi/2b)^2}\right|. \tag{23.4}$$

Из (22.4) и (23.4) находим

$$\begin{aligned}\int_{Y-b}^{Y+b}|\varphi(t)|\,dt &\geqslant \left|\int_{Y-b}^{Y+b}\varphi(t)g_1(Y-t)\exp(i\gamma_1(t-Y))\,dt\right|\\ &= \left|\int_{-b}^{b}\varphi(Y+y)g_1(y)\exp(-i\gamma_1 y)\,dy\right|\\ &= \left|\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\rho_n^{-1}\int_{-b}^{b}\exp\{-i\gamma_n(Y+y)\}g_1(y)\exp(-i\gamma_1 y)\,dy\right|\\ &= \left|\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{e^{i\gamma_n Y}}{\rho_n}\int_{-b}^{b}g_1(y)\exp\{iy(\gamma_n-\gamma_1)\}\,dy\right|\\ &= \left|\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{e^{i\gamma_n Y}}{\rho_n}\widehat{g}_1(\gamma_n-\gamma_1)\right|\\ &\geqslant \left|\frac{\widehat{g}_1(0)}{\rho_1}\right| - \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0, n\neq 1}}^{+\infty}\left|\frac{\widehat{g}_1(\gamma_n-\gamma_1)}{\rho_n}\right|\\ &= \frac{4b}{\pi|\rho_1|} - \frac{\pi}{b}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0, n\neq 1}}^{+\infty}\frac{|\cos((\gamma_n-\gamma_1)b)|}{|(\gamma_n-\gamma_1)^2-(\pi/2b)^2|\,|\rho_n|}\,.\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 9. Положим

$$b=\frac{5\pi}{\gamma_1}\,,\qquad I(Y)=\int_{Y-b}^{Y+b}\varphi(t)\,dt,\quad J(Y)=\int_{Y-b}^{Y+b}|\varphi(t)|\,dt,\quad Y>b.$$

Интеграл $I(Y)$ легко вычисляется:

$$I(Y)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{2e^{i\gamma_n Y}\sin(\gamma_n b)}{\rho_n\gamma_n}\,.$$

Учитывая выбор b, находим

$$|I(Y)|\leqslant 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n|\gamma_n}\,. \tag{24.4}$$

К оценке снизу интеграла $J(Y)$ применим лемму 5. Получим

$$J(Y)\geqslant\frac{20}{|\rho_1|\gamma_1}-\frac{\gamma_1}{5}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0, n\neq 1}}^{+\infty}\frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n|\,|(\gamma_n-\gamma_1)^2-(\gamma_1/10)^2|}\,.$$

Используя приближенное значение для γ_1 из [31], находим $\gamma_1^2 < \gamma_1|\rho_1| < 200$. Поэтому

$$J(Y) > 0.1 - \frac{\gamma_1}{5} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0, n\neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n|\,|(\gamma_n-\gamma_1)^2-2} \,. \tag{25.4}$$

Легко проверяется справедливость неравенств

$$\begin{gathered} (\gamma_n-\gamma_1)^2 - 2 > 2\gamma_n \quad \forall n \geqslant 2, \\ (\gamma_n-\gamma_1)^2 - 2 = (\gamma_{-n}+\gamma_1)^2 - 2 > \gamma_n^2 > 21|\gamma_n| \quad \forall n \leqslant -2, \\ \frac{1}{5((2\gamma_1)^2-2)} < 3\cdot 10^{-4}. \end{gathered} \tag{26.4}$$

Соотношения (25.4) и (26.4) влекут за собой оценку

$$\begin{aligned} J(Y) &> 0.1 - \Big(\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_1}{105}\Big) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n|\gamma_n} - 3\cdot 10^{-4} \\ &> 0.0997 - 1.56 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)}{|\rho_n|\gamma_n} \,. \end{aligned} \tag{27.4}$$

Поскольку при любых $x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha| \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, из (24.4) и (27.4) находим

$$J(Y) - |I(Y)| > 0.0997 - \sqrt{18.44} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|\gamma_n} \,.$$

При $n \geqslant 2$ имеем $|\rho_n|/\gamma_n = \sqrt{1+1/4\gamma_n^2} < \sqrt{1+1/(4\cdot 21^2)} < \sqrt{1.001}$. Кроме того, $|\rho_1|^{-2} > 0.00499$, а если и верна гипотеза Римана (см. доказательство предыдущей теоремы), то $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-2} < 0.02325$. Ввиду сказанного получаем

$$\begin{aligned} J(Y) - |I(Y)| &> 0.0997 - \sqrt{18.44} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1.001}}{|\rho_n|^2} \\ &> 0.0997 - 4.3 \sum_{n=2}^{\infty} |\rho_n|^{-2} \\ &> 0.0997 - 4.3(0.02325 - 0.00499) = 0.021182. \end{aligned} \tag{28.4}$$

Полученное неравенство показывает, что модуль интеграла от $\varphi(t)$ по отрезку $[Y-b, Y+b]$ меньше интеграла от $|\varphi(t)|$ на некоторую величину, отделенную от нуля. Отсюда заключаем, что интегралы от положительной и отрицательной части $\varphi(t)$[6] не слишком малы. На этой идее и построена завершающая часть доказательства теоремы 9.

[6]Напомним, что ввиду симметричного расположения относительно $\mathbb{R}$ нулей $\zeta(s)$ функция φ действительнозначна.

Положим

$$\varphi^+(t) = \max(0, \varphi(t)), \qquad \varphi^-(t) = -\min(0, \varphi(t)),$$
$$J^+(Y) = \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi^+(t)\,dt, \quad J^-(Y) = \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi^-(t)\,dt.$$

Напомним, что $b = 5\pi/\gamma_1$. Имеем очевидные равенства

$$\begin{aligned} J(Y) &= J^+(Y) + J^-(Y),\\ I(Y) &= J^+(Y) - J^-(Y). \end{aligned} \tag{29.4}$$

Из (29.4) можно выразить $J^+(Y)$ и $J^-(Y)$:

$$J^+(Y) = (J(Y) + I(Y))/2, \qquad J^-(Y) = (J(Y) - I(Y))/2. \tag{30.4}$$

Из (30.4), (28.4) и элементарных неравенств $|x_1+x_2| \geqslant |x_2|-|x_1|$, $|x_1-x_2| \geqslant |x_2|-|x_1|$ находим

$$J^+(Y) > 0,0105, \quad J^-(Y) > 0,0105 \qquad \forall\, Y > b. \tag{31.4}$$

Если верна гипотеза Римана, то $\varphi(t) = \mathscr{F}(e^t)e^{-t/2}$. Поэтому при $x > 1$

$$\begin{aligned} \int_x^{10x} \mathscr{F}^+(u)\,du &\geqslant \int_x^{10x} \mathscr{F}^+(u)\Big(\frac{x}{u}\Big)^{3/2}\,du\\ &= x^{3/2}\int_{\ln x}^{\ln 10+\ln x} \mathscr{F}^+(e^t)e^{-t/2}\,dt\\ &= x^{3/2}\int_{Y-\frac12\ln 10}^{Y+\frac12\ln 10} \varphi^+(t)\,dt. \end{aligned} \tag{32.4}$$

(Здесь обозначено $Y = \frac12 \ln 10 + \ln x$.) Поскольку

$$\frac12 \ln 10 > 1.15, \qquad b = \frac{5\pi}{\gamma_1} < \frac{5\cdot 3.142}{14.13} < 1.12,$$

из (31.4) и (32.4) выводим

$$\int_x^{10x} \mathscr{F}^+(u)\,du > 0.0105x^{3/2} \qquad \forall\, x > 1. \tag{33.4}$$

Аналогично находим

$$\int_x^{10x} \mathscr{F}^-(u)\,du > 0.0105x^{3/2} \qquad \forall\, x > 1. \tag{34.4}$$

Из определения функций $R_0(x)$ и $R(u)$ видно, что они не совпадают только лишь на счетном дискретном на $[1, +\infty)$ множестве точек. Следовательно, при любом $x \geqslant 1$ имеем

$$\int_x^{10x} R^+(u)\,du = \int_x^{10x} R_0^+(u)\,du, \quad \int_x^{10x} R^-(u)\,du = \int_x^{10x} R_0^-(u)\,du. \tag{35.4}$$

А при $u \geqslant 2$ вследствие (28.2) и (29.2) выполняются неравенства

$$-\mathscr{F}(u) \geqslant R_0(u) \geqslant -\mathscr{F}(u) - \ln 2\pi > -\mathscr{F}(u) - 1.84.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_0^+(u) &\geqslant (\mathscr{F}(u))^- - 1.84, \\ R_0^-(u) &\geqslant \mathscr{F}^+(u). \end{aligned} \qquad (\forall\, u \geqslant 2) \tag{36.4}$$

Из (33.4)–(36.4) находим, что в случае справедливости гипотезы Римана при всех $x \geqslant 2$ имеют место оценки

$$\int_x^{10x} R^-(u)\,du = \int_x^{10x} R_0^-(u)\,du \geqslant \int_x^{10x} \mathscr{F}^+(u)\,du > 0.0105x^{3/2},$$
$$\int_x^{10x} R^+(u)\,du = \int_x^{10x} R_0^+(u)\,du \geqslant \int_x^{10x} (\mathscr{F}^-(u) - 1.84)du > 0.0105x^{3/2} - 16.56x.$$

В частности, при всех $x \geqslant 2 \cdot 10^9$

$$\int_x^{10x} R^+(u)\,du > \frac{x^{3/2}}{100}\,.$$

Теорема 9 доказана.

Перейдем к доказательствам оценок снизу интегралов от $|R(u)|$, $R^+(u)$, $R^-(u)$ в предположении, что гипотеза Римана неверна. Из соотношений (23.3), (38.2) и леммы 2 следует упрощенная формула для $R(u)$ в случае $\Theta > 1/2$:

$$R(u) = \mathscr{F}_2(\Theta_1, u) + o(u^{\Theta_1}) \qquad (u \to +\infty). \tag{37.4}$$

(Мы обозначили $\Theta_1 = 1/4 + \Theta/2$.) Она убеждает нас в том, что теоремы 7 и 8 непосредственно вытекают из следующего утверждения.

Пусть $\widetilde{\rho} = \widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma}$ – произвольный нуль $\zeta(s)$, вещественная часть которого $\widetilde{\beta}$ больше Θ_1. Тогда для любого $a > 1$ существует постоянная $c_{43}(a, \widetilde{\rho}) > 0$ такая, что при всех $x \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\int_x^{a\,x} |\mathscr{F}_2(\Theta_1, u)|\,du \geqslant c_{43}(a, \widetilde{\rho})x^{1+\widetilde{\beta}}. \tag{38.4}$$

Действительно, для доказательства теоремы 7 выберем нуль с вещественной частью $\widetilde{\beta} > \Theta - \varepsilon/2$ (он существует по определению числа Θ). А в доказательстве теоремы 8 возьмем $\widetilde{\rho} = \Theta + i\widetilde{\gamma}$.

Докажем сформулированное утверждение. Положим

$$L(z) = \prod_{\substack{\operatorname{Re}\rho \geqslant \Theta_1 \\ \rho \neq \widetilde{\rho}}} (1 - iz/\rho). \tag{39.4}$$

Поскольку количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{\Theta_1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \Theta, |\operatorname{Im} s| \leqslant T\}$ есть $O(T^{\delta_1})$, $0 < \delta_1 < 1$, то [33, с. 197] произведение (39.4) представляет из себя целую функцию, имеющую оценку роста

$$|L(z)| \leqslant c_{44} \exp(c_{45}|z|^{\delta_1}) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{40.4}$$

Нули $L(z)$ расположены в точности в точках $\{-i\rho\}$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant \Theta_1$, $\rho \neq \widetilde{\rho}$. Постоянные c_{44}, c_{45} и δ_1, естественно, зависят от возможного значения Θ.

Хорошо известно, что, каковы бы ни были заданные числа $\tau > 0$ и $\delta \in (0,1)$, существует целая функция f, имеющая экспоненциальный тип, равный τ, и "достаточно быстро" убывающая на действительной оси:

$$|f(t)| = O\big(\exp(-|t|^{\delta})\big), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{41.4}$$

Такой целой функцией является, например,

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin d_k t}{d_k t}\right), \qquad d_k = \frac{\tau k^{-1/\delta_2}}{\zeta(1/\delta_2)}\,, \quad \delta_2 = \frac{1+\delta}{2}\,.$$

Возьмем такую функцию f для $\tau = \frac{1}{2}\ln a$ и $\delta = (1+\delta_1)/2$. Положим, наконец,

$$g(z) = \begin{cases} f(z)L(z), & \text{если } f(-i\widetilde{\rho}) \neq 0,\\ \dfrac{f(z)L(z)}{(z+i\widetilde{\rho})^q}\,, & \text{если } -i\widetilde{\rho} - \text{нуль } f(z) \text{ кратности } q. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} &g(-i\rho) = 0, \quad \operatorname{Re}\rho \geqslant \Theta_1,\ \rho \neq \widetilde{\rho},\\ &g(-i\widetilde{\rho}) \neq 0. \end{aligned} \tag{42.4}$$

Кроме того, из (40.4) и (41.4) вытекает, что g является целой функцией экспоненциального типа τ и быстро убывает на действительной оси. Поэтому преобразование Фурье

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\exp(-izy)\,dz$$

лежит в классе $C^{\infty}(\mathbb{R})$ и имеет носитель внутри отрезка $[-\tau,\tau] = [-\frac{1}{2}\ln a, \frac{1}{2}\ln a]$.

Подготовительная работа завершена и теперь мы можем приступить к оценке снизу интеграла $\displaystyle\int_x^{ax} |\mathscr{F}_2(\Theta_1,u)|\,du$. Сделаем замену переменного $u = e^t$ и обозначим $X = \ln x + \frac{1}{2}\ln a$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_x^{ax} |\mathscr{F}_2(\Theta_1,u)|\,du &\geqslant x\int_x^{ax} |\mathscr{F}_2(\Theta_1,u)|\frac{du}{u}\\ &= x\int_{X-\tau}^{X+\tau} |\mathscr{F}_2(\Theta_1,e^t)|\,dt\\ &\geqslant \frac{x}{\max_{y\in\mathbb{R}}|\widehat{g}(y)|}\left|\int_{X-\tau}^{X+\tau} \mathscr{F}_2(\Theta_1,e^t)\widehat{g}(t-X)\,dt\right|\\ &= c_{46}x\left|\int_{X-\tau}^{X+\tau}\Bigg(\sum_{\operatorname{Re}\rho\geqslant\Theta_1}\frac{\exp(\rho t)}{\rho}\Bigg)\widehat{g}(t-X)\,dt\right|. \end{aligned}$$

Сделав в последнем интеграле замену $t-X=y$, произведя почленное интегрирование (это возможно в силу равномерной сходимости ряда для $\mathscr{F}_2(\Theta_1, e^t)$ на любом отрезке в $\mathbb{R}$) и обозначив $\lambda = -i\rho$, получаем оценку

$$\int_x^{ax} |\mathscr{F}_2(\Theta_1, u)\, du \geqslant c_{46}x \left| \sum_{\operatorname{Re}\rho \geqslant \Theta_1} \frac{\exp(\rho X)}{\rho} \int_{-\tau}^{\tau} \widehat{g}(y) e^{i\lambda y}\, dy \right|$$
$$= c_{46}x \left| \sum_{\operatorname{Re}\rho \geqslant \Theta_1} \frac{\exp(\rho X)}{\rho} g(\lambda) \right|.$$

Ввиду соотношений (42.4) в последней сумме все слагаемые, кроме соответствующих $\widetilde{\rho}$ (количество их равно ν – кратности нуля $\widetilde{\rho}$), обращаются в ноль. Поэтому приходим к неравенствам

$$\int_x^{ax} |\mathscr{F}_2(\Theta_1, u)|\, du \geqslant c_{46}x \left| \frac{\nu}{\widetilde{\rho}} g(-i\rho) \right| |\exp\{(\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})X\}| = c_{47}x \exp(\widetilde{\beta}X) > c_{47}x^{1+\widetilde{\beta}},$$

а это и доказывает требуемое.

Для дальнейшего нам потребуется доказать существование еще одного вида непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с конечным носителем, которые вместе со своим преобразованием Фурье имеют нужные для наших целей специальные свойства. Рассмотрим семейство функций

$$f(\beta, \gamma, z) = \frac{1}{1+(z/\beta)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - \cos(\frac{2\pi z}{\gamma})}{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1}, \tag{43.4}$$

$$\beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \gamma > 10, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{44.4}$$

Лемма 6. *Относительно любой функции вида* (43.4) *с ограничениями на параметры* (44.4) *справедливы следующие утверждения*:

1) f – *четная целая функция экспоненциального типа* $2\pi/\gamma$, *вещественная на* $\mathbb{R}$. *Все ее нули в* $\mathbb{C}$ *имеют вид* $m\gamma \pm i\beta$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) $f(\beta, \gamma, 0) = 1$.

3) $0 < f(\beta, \gamma, z) < 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4) *Если* $\gamma > 2\pi|z|$, *то равномерно по* β, γ, z

$$f(\beta, \gamma, z) = 1 + O\big((1+|z|^2)\gamma^{-2}\big). \tag{45.4}$$

5) *Преобразование Фурье*

$$\widehat{f}(\beta, \gamma, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta, \gamma, z) \exp(-izy)\, dz$$

положительно при всех $y \in (-2\pi\gamma, 2\pi\gamma)$ *и обращается в нуль всюду вне этого интервала.*

Проверка истинности утверждений 1) и 2) леммы 6 предоставляется читателю. Докажем утверждения 3)–5). Для вычисления преобразования Фурье функции f воспользуемся известной формулой [34, с. 391]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+1} dx = \pi e^{-|b|}, \qquad b \in \mathbb{R}. \tag{46.4}$$

Доказательство. Учитывая четность функции f и используя (46.4), находим

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\beta,\gamma,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-\cos(\frac{2\pi z}{\gamma})}{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-1}\cdot\frac{\cos zy}{1+(z/\beta)^2}\,dz\\ &= \frac{\beta}{2\pi(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-1)}\\ &\quad\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\beta xy)\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-\frac12\cos(\beta xy+\frac{2\pi\beta x}{\gamma})-\frac12\cos(\beta xy-\frac{2\pi\beta x}{\gamma})}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})\exp(-\beta|y|)-\frac12\exp(-\beta|y+\frac{2\pi}{\gamma}|)-\frac12\exp(-\beta|y-\frac{2\pi}{\gamma}|)}{2(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-1)}.\end{aligned}$$

Раскрывая модули в полученном выражении и записывая стоящий в числителе дроби гиперболический косинус через экспоненты, приходим к равенствам

$$\widehat{f}(\beta,\gamma,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}((\frac{2\pi}{\gamma}-|y|))}{2(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})-1)}, & |y|<\dfrac{2\pi}{\gamma},\\[2ex] 0, & |y|\geqslant\dfrac{2\pi}{\gamma}.\end{cases}$$

Утверждение 5) доказано. Положительность функции f на $\mathbb{R}$ очевидна, а неравенство $f(\beta,\gamma,z)<1$ при любом действительном $z\neq 0$ легко следует из 2), неотрицательности, непрерывности и четности на $\mathbb{R}$ преобразования Фурье $\widehat{f}(\beta,\gamma,y)$:

$$\begin{aligned}f(\beta,\gamma,z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\beta,\gamma,y)\exp(iyz)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\beta,\gamma,y)\cos zy\,dy\\ &<\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\beta,\gamma,y)|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\beta,\gamma,y)\,dy=f(\beta,\gamma,y)=1.\end{aligned}$$

Тем самым установлено неравенство 3). Для доказательства 4) заменим в выражении для $f(\beta,\gamma,z)$ функции cos и ch по известным формулам: $\cos w=1-w^2/2+O(w^4)$, $\operatorname{ch} w=1+w^2/2+O(w^4)$ $(w\geqslant 1)$. Тогда при $\gamma>2\pi|z|$, $z\notin(K_1\cup K_2)$ $(K_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-i\beta|<0,1\}$, $K_2=-K_1)$ получим

$$f(\beta,\gamma,z)=\frac{\frac12\big((\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2+(\frac{2\pi z}{\gamma})^2+O((1+|z|^4)\gamma^{-4})\big)}{(1+(\frac{z}{\beta}))(\frac12(\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2+O(\gamma^{-4}))}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на $\frac12(\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}f(\beta,\gamma,z)&=\frac{1+(z/\beta)^2+O((1+|z|^4)\gamma^{-2}))}{(1+(z/\beta)^2)(1+O(\gamma^{-2}))}\\ &=\left(1+O\left(\frac{1+|z|^4}{\gamma^2(1+(z/\beta)^2)}\right)\right)(1+O(\gamma^{-2})).\end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что при $|z| < 0.1$

$$f(\beta, \gamma, z) = 1 + O(\gamma^{-2}),$$

а при $0.1 < |z| < \gamma/2\pi$, $z \notin (K_1 \cup K_2)$

$$f(\beta, \gamma, z) = 1 + O(z^2\gamma^{-2}). \tag{47.4}$$

В частности, из (47.4) следует, что на границах кругов K_1 и K_2 выполняется неравенство $|f(\beta, \gamma, z) - 1| \leqslant c_{48}\gamma^{-2}$. Поскольку функция $f(\beta, \gamma, z)$ целая, такое же неравенство выполняется по принципу максимума и при $z \in (K_1 \cup K_2)$. Тем самым (45.4) доказано при всех $|z| < \gamma/2\pi$. Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 10. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $a > 1$ и зафиксируем их. Из плотностных теорем вытекает сходимость ряда $\sum_{\mathrm{Re}\,\rho \geqslant \Theta_1} |\,\mathrm{Im}\,\rho|^{-1}$, где $\Theta_1 = 1/4 + \Theta/2$. Следовательно,

$$\lim_{T \to +\infty} \sum_{\substack{\mathrm{Re}\,\rho \geqslant \Theta_1 \\ |\mathrm{Im}\,\rho| > N}} |\,\mathrm{Im}\,\rho|^{-1} = 0.$$

Но так как согласно посылке теоремы 10 Θ недостижимо, то легко сообразить, что для любого фиксированного T существует $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что прямоугольник $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s \geqslant \Theta - \delta(T),\ |\,\mathrm{Im}\, s| \leqslant T\}$ не содержит нулей $\zeta(s)$. Поэтому найдется такое $\delta = \delta(a)$, что

$$\sum_{\mathrm{Re}\,\rho \geqslant \Theta - \delta} |\,\mathrm{Im}\,\rho|^{-1} < \frac{\ln a}{4\pi}\,.$$

При этом, естественно, можно взять $\delta < \varepsilon$.

Возьмем $\widetilde{\rho} = \widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma}$ – нуль $\zeta(s)$, лежащий в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \Theta - \delta$ и имеющий среди таких нулей наименьшую положительную ординату (если их несколько, то выберем тот, у которого больше действительная часть). Теперь все различные нули $\zeta(s)$, лежащие в полосе $\mathrm{Re}\, s \geqslant \Theta - \delta$, за исключением двух $\widetilde{\beta} \pm i\widetilde{\gamma}$ занумеруем в последовательность $\{\omega_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Через ν_n обозначим кратность нуля ω_n. Нули нумеруются, как обычно, в порядке возрастания их мнимых частей, а при равных мнимых частях – в произвольном порядке. Наконец, $\omega_{-n} = \overline{\omega}_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Номер “0” в нашей нумерации не задействован. Согласно введенным обозначениям имеем

$$\mathscr{F}_2(\Theta - \delta, e^t) = \widetilde{\nu}\left(\frac{e^{(\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma}} + \frac{e^{(\widetilde{\beta} - i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta} - i\widetilde{\gamma}}\right) + \mathscr{F}_3(e^t), \tag{48.4}$$

где $\widetilde{\nu}$ – кратность нуля $\widetilde{\rho}$, а

$$\mathscr{F}_3(x) = \sum_{|n| \geqslant 1} \frac{\nu_n x^{\omega_n}}{\omega_n}\,.$$

Перед тем, как приступить к оценкам интегралов от $\mathscr{F}_2^+$ и $\mathscr{F}_2^-$, докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 7. *Обозначим*[7]

$$\beta_n = \operatorname{Re}\omega_n, \qquad \gamma_n = \operatorname{Im}\omega_n, \qquad q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}\,.$$

Тогда существует неотрицательная непрерывная на $\mathbb{R}$ *функция* $\widehat{g}$, *обращающаяся в нуль вне интервала* $(-2\pi q, 2\pi q)$, *такая, что*

$$\int_{-2\pi q}^{2\pi q} e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})t}\widehat{g}(t)\,dt \neq 0, \tag{49.4}$$

а при любом $Y \in \mathbb{R}$

$$\int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \mathscr{F}_3(e^t)\widehat{g}(t-Y)\,dt = 0. \tag{50.4}$$

Доказательство. Положим

$$g_N(z) = \prod_{n=1}^{N} f(\beta_n, \gamma_n, z).$$

В силу (45.4) последовательность функций $g_N(z)$ имеет предел

$$g(z) = \lim_{N\to\infty} g_N(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f(\beta_n, \gamma_n, z),$$

причем сходимость на любом компакте в $\mathbb{C}$ равномерна. Следовательно (см. утверждение 1) леммы 6), $g(z)$ является целой четной вещественной на $\mathbb{R}$ функцией и все ее нули в $\mathbb{C}$ расположены в точках

$$m\gamma_n \pm i\beta_n, \qquad m,n \in \mathbb{Z}, \quad mn \neq 0.$$

Согласно выбору нуля $\widetilde{\rho} = \widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma}$ нет другого нуля $\zeta(s)$ с положительной мнимой частью, меньшей $\widetilde{\gamma}$, и с вещественной частью $\widetilde{\beta}$. Поэтому если бы для каких-нибудь $m,n \in \mathbb{Z}$ имело место равенство $\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta} = m\gamma_n \pm i\beta_n$, то мы получили бы $\widetilde{\gamma} = \gamma_{|n|}$, $\beta = \beta_{|n|}$, т.е. $\widetilde{\rho} = \omega_{|n|}$. Но все элементы $\{\omega_n\}$ отличны от $\widetilde{\rho}$ по определению этой последовательности. Сказанное означает, что

$$g(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta}) \neq 0. \tag{51.4}$$

Поскольку преобразование Фурье произведения двух функций является сверткой их преобразований Фурье, справедливо соотношение

$$\widehat{g}_N(y) = \widehat{f}(\beta_1, \gamma_1, y) * \cdots * f(\beta_N, \gamma_N, y).$$

[7] В сумме q участвуют нули $\zeta(s)$, вещественные части которых больше или равны $\Theta - \delta > 1/2$. Следовательно, по плотностной теореме [21, с. 237] имеем $q < +\infty$.

Поэтому (см. утверждение 5) леммы 6)

$$\begin{aligned} &\widehat{g}_N(y) > 0, \qquad |y| < 2\pi q_N, \\ &\widehat{g}_N(y) = 0, \qquad |y| \geqslant 2\pi q_N, \end{aligned} \tag{52.4}$$

где $q_N = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n^{-1}$.

Из утверждения 3) леммы 6 следует, что все функции g_N положительны на $\mathbb{R}$, и при любом фиксированном $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ последовательность $g_N(z_0)$ убывает. Как отмечалось выше, $\lim_{N\to\infty} g_N(z) = g(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $g_1(z) = f(\beta_1, \gamma_1, \cdot\,) \in L(\mathbb{R})$. Поэтому $g \in L(\mathbb{R})$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_N(z) - g(z)|\, dz = 0. \tag{53.4}$$

Вследствие (53.4) $\widehat{g} \in C(\mathbb{R})$ и последовательность $\widehat{g}_N(y)$ сходится к $\widehat{g}(y)$ равномерно на $\mathbb{R}$. Это вместе с (52.4) влечет за собой справедливость соотношений

$$\begin{gathered} \widehat{g}(y) \geqslant 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{supp} \widehat{g} \subset [-2\pi q, 2\pi q]. \end{gathered} \tag{54.4}$$

Первая часть леммы 7 доказана. Установим справедливость соотношений (49.4) и (50.4). По формуле обращения преобразования Фурье имеем

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) \exp(izy)\, dy.$$

Отсюда, из (51.4) и (54.4) находим

$$\begin{aligned} 0 \neq g(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) \exp((\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})y)\, dy \\ &= \int_{-2\pi q}^{2\pi q} \widehat{g}(y) \exp((\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})y)\, dy. \end{aligned}$$

Тем самым (49.4) доказано. Поскольку $g(\gamma_n - i\beta_n) = 0$ при любых $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\int_{-2\pi q}^{2\pi q} \widehat{g}(y) \exp((\beta_n + i\gamma_n)y)\, dy = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{55.4}$$

Ряд для $\mathscr{F}_3(e^t)$ сходится равномерно на любом отрезке в $\mathbb{R}$ и, следовательно, допускает почленное интегрирование. Поэтому, учитывая (55.4), находим

$$\begin{aligned} \int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \mathscr{F}_3(e^t)\widehat{g}(t-Y)\, dt &= \int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \biggl(\sum_{|n|\geqslant 1} \frac{\nu_n e^{\omega_n t}}{\omega_n}\biggr) \widehat{g}(t-Y)\, dt \\ &= \sum_{|n|\geqslant 1} \frac{\nu_n e^{\omega_n t}}{\omega_n} \int_{-2\pi q}^{2\pi q} e^{\omega_n y} \widehat{g}(y)\, dy = 0. \end{aligned}$$

Лемма 7 полностью доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим $X = \ln x + \frac{1}{2}\ln a$, $\widehat{g}(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta}) = \xi e^{i\alpha}$ (можно взять $\xi > 0$, так как $\widehat{g}(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta}) \neq 0$). Если Y пробегает некоторый отрезок действительной оси длины $2\pi/\widetilde{\gamma}$, то точка $\exp(iY\widetilde{\gamma})$ совершает полный оборот по единичной окружности в $\mathbb{C}$. Поэтому найдутся два числа $X_1, X_2 \in [X - \pi/\widetilde{\gamma}, X + \pi/\widetilde{\gamma}]$ такие, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\exp(i(X_1\widetilde{\gamma} + \alpha))}{\widetilde{\rho}}\right) = \frac{1}{|\widetilde{\rho}|}, \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{\exp(i(X_2\widetilde{\gamma} + \alpha))}{\widetilde{\rho}}\right) = -\frac{1}{|\widetilde{\rho}|}. \tag{56.4}$$

Обозначим для краткости $\mathscr{F}_2(u) = \mathscr{F}_2(\Theta - \delta, u)$ и приступим к оценке снизу интеграла $\displaystyle\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^+(u)\,du$. Имеем:

$$\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^+(u)\,du \geqslant x\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^+(u)\frac{du}{u} = x\int_{X-\frac{1}{2}\ln a}^{X+\frac{1}{2}\ln a} \mathscr{F}_2^+(e^t)\,dt. \tag{57.4}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2}\ln a > 2\pi\left(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{\gamma}}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\right) = 2\pi q + 2\pi\widetilde{\gamma}^{-1},$$

справедливы включения

$$[X_j - 2\pi q, X_j + 2\pi q] \subset [X - \tfrac{1}{2}\ln a, X + \tfrac{1}{2}\ln a], \qquad j = 1, 2. \tag{58.4}$$

Из (57.4) и (58.4) находим

$$\begin{aligned}\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^+(u)\,du &\geqslant \int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q} \mathscr{F}_2^+(e^t)\,dt \\ &\geqslant \frac{x}{\max_{y\in\mathbb{R}}\widehat{g}(y)}\int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q} \mathscr{F}_2^+(e^t)\widehat{g}(t - X_1)\,dt \\ &\geqslant c_{49}x\int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q} \mathscr{F}_2(e^t)\widehat{g}(t - X_1)\,dt,\end{aligned} \tag{59.4}$$

где $c_{49} = 1/\max_{y\in\mathbb{R}}\widehat{g}(y)$. Здесь мы использовали, что функция $\widehat{g}$ неотрицательна, непрерывна на $\mathbb{R}$ и не равна нулю тождественно (см. (49.4)). Используя представление (48.4) функции $\mathscr{F}_2(e^t)$, а также равенства (50.4) и (49.4), получаем

$$\begin{aligned}&\int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q} \mathscr{F}_2(e^t)\widehat{g}(t - X_1)\,dt \\ &= \int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q}\left(\widetilde{\nu}\left(\frac{e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma}} + \frac{e^{(\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma}}\right) + \mathscr{F}_3(e^t)\right)\widehat{g}(t - X_1)\,dt \\ &= \widetilde{\nu}\int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q}\left(\frac{e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma}} + \frac{e^{(\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma})t}}{\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma}}\right)\widehat{g}(t - X_1)\,dt \\ &= \widetilde{\nu}\int_{-2\pi q}^{2\pi q}\left(\frac{e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})X_1}}{\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma}}e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})y}\widehat{g}(y) + \frac{e^{(\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma})X_1}}{\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma}}e^{(\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma})y}\widehat{g}(y)\right)dy \\ &= \widetilde{\nu}e^{\beta X_1}\left(\frac{e^{i\widetilde{\gamma}X_1}g(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta})}{\widetilde{\beta}+i\widetilde{\gamma}} + \frac{e^{-i\widetilde{\gamma}X_1}}{\widetilde{\beta}-i\widetilde{\gamma}}g(-\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta})\right).\end{aligned}$$

Поскольку функция g четна и вещественна на $\mathbb{R}$, числа $g(\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\beta})$ и $g(-\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\beta})$ являются комплексно-сопряженными и, следовательно, в скобках в последнем выражении стоит сумма двух комплексно-сопряженных чисел. Ввиду сказанного приходим к равенству

$$\int_{X_1-2\pi q}^{X_1+2\pi q} \mathscr{F}_2^+(e^t)\widehat{g}(t-X_1)\,dt = 2\widetilde{\nu}e^{\beta X_1}\cdot \operatorname{Re}\biggl(\frac{e^{i\widetilde{\gamma}X_1}g(\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\beta})}{\widetilde{\rho}}\biggr). \tag{60.4}$$

Вспоминая обозначение $g(\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\beta}) = \xi e^{i\alpha}$, $\xi > 0$, и исходя из выбора X_1, из (56.4), (59.4) и (60.4) находим

$$\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^+(u)\,du \geqslant c_{50}xe^{\widetilde{\beta}X_1}\frac{\xi}{|\widetilde{\rho}_1|} = c_{51}x^{1+\widetilde{\beta}} > c_{51}x^{1+\Theta-\delta}.$$

С помощью совершенно аналогичных рассуждений получаем оценку для интеграла от $\mathscr{F}^-$:

$$\begin{aligned}
\int_x^{ax} \mathscr{F}_2^-(u)\,du &\geqslant x\int_{X-\frac12\ln a}^{X+\frac12\ln a} \mathscr{F}_2(e^t)\,dt \\
&\geqslant c_{49}x\int_{X_2-2\pi q}^{X_2+2\pi q} \mathscr{F}_2(e^t)\widehat{g}(t-X_2)\,dt \\
&\geqslant c_{49}x\int_{X_2-2\pi q}^{X_2+2\pi q} -\mathscr{F}_2(e^t)\widehat{g}(t-X_2)\,dt \\
&= -2c_{49}x\widetilde{\nu}e^{\widetilde{\beta}X_2}\operatorname{Re}\biggl(\frac{e^{i\widetilde{\gamma}X_2}g(\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\beta})}{\widetilde{\rho}}\biggr) \\
&= c_{51}x^{1+\widetilde{\beta}} > c_{51}x^{1+\Theta-\delta}.
\end{aligned}$$

Из доказанных оценок и соотношения

$$R(x) = -\mathscr{F}_2(\Theta-\delta,x) + o(x^{\Theta-\delta}) \qquad (x\to+\infty)$$

(см. лемму 2 и (38.2)) получаем

$$\left.\begin{aligned}
\int_x^{Ax} R^+(u)\,du &> c_{51}x^{1+\Theta-\delta} + o(x^{1+\Theta-\delta}), \\
\int_x^{Ax} R^-(u)\,du &> c_{51}x^{1+\Theta-\delta} + o(x^{1+\Theta-\delta}).
\end{aligned}\right. \qquad (x\to\infty)$$

Так как $\delta < \varepsilon$, то отсюда при $x > x_1(\varepsilon)$ получаем неравенства (11.2).

Доказательство теоремы 11 основывается совершенно на той же идее, что и доказательство теоремы 10, только чуть-чуть проще. Вкратце, оно состоит в следующем.

По лемме 2

$$R(u) = \mathscr{F}_2(\Theta, u) + o(u^{\Theta}) \qquad (u \to +\infty).$$

Поэтому задача сводится к оценкам интегралов от $\mathscr{F}_2^+(\Theta, u)$ и $\mathscr{F}_2^-(\Theta, u)$. В качестве $\widetilde{\rho}$ берем нуль с наименьшей положительной ординатой, лежащий на прямой $\operatorname{Re} s = \Theta$ (в этой теореме предполагается, что Θ достижимо). Остальные различные нули $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \Theta$ расположим в последовательность ω_n по тому же принципу, что и ранее. Далее делаем в точности те же выкладки, что и в доказательстве теоремы 10. Но так как здесь $\widetilde{\beta} = \Theta$, то никакого ε не появляется.

Доказательство теоремы 13. Если справедлива гипотеза Римана, то из (1), леммы 1 и (35.2) получается следующая приближенная явная формула для $P(u)$:

$$P(u) = -(\ln u)^{-1}\biggl(\sqrt{u} + \sum_{\rho} \frac{u^{\rho}}{\rho}\biggr) + O\biggl(\frac{\sqrt{u}}{\ln^2 u}\biggr), \qquad u \geqslant 2. \tag{61.4}$$

Интегрируя (61.4) от 2 до x, находим

$$\begin{aligned} \int_2^x P(u)\,du = &-\biggl(\frac{2}{3}\frac{u^{3/2}}{\ln u}\biggr|_2^x + \frac{2}{3}\int_2^x \frac{\sqrt{u}}{\ln^2 u}\,du \\ &+ \sum_{\rho}\biggl(\frac{u^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)\ln u}\biggr|_2^x + \frac{1}{\rho(\rho+1)}\int_2^x \frac{u^{\rho}du}{\ln^2 u}\biggr)\biggr) + O\biggl(\int_2^x \frac{\sqrt{u}\,du}{\ln^2 u}\biggr). \end{aligned} \tag{62.4}$$

Поскольку $\rho = 1/2 + i\gamma$, $\displaystyle\int_2^x \sqrt{u}\,\ln^{-2} u\,du = O(x^{3/2}\ln^{-2} x)$ и

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} = \sum_{\rho} \frac{1}{\sqrt{\gamma^4 + 2.5\gamma^2 + 9/16}} = \omega \ \text{ при } \ \Theta = 1/2, \tag{63.4}$$

из (62.4) и (63.4) получаем

$$\int_2^x P(u)\,du = -\frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{\ln x} - \sum_{\rho}\frac{x^{3/2+i\gamma}}{\rho(\rho+1)\ln x} + O\biggl(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\biggr).$$

Отсюда и из определения функции $\mathscr{P}$ находим

$$\mathscr{P}(x) = -\frac{2}{3} - \sum_{\rho}\frac{x^{i\gamma}}{\rho(\rho+1)} + O\bigl((\ln x)^{-1}\bigr). \tag{64.4}$$

Из (63.4) и (64.4) легко следуют требуемые оценки $\overline{L}$ и $\underline{L}$. Неравенство $\underline{L} \neq \overline{L}$ вытекает из того, что функция $v(t) = \sum\limits_{\rho}\dfrac{\exp(i\gamma t)}{\rho(\rho+1)}$ не имеет предела при $t \to +\infty$.

Это – хорошо известный факт из теории почти периодических функций. Впрочем, его легко доказать. Предположив, что существует

$$l = \lim_{t\to+\infty} v(t), \tag{65.4}$$

мы получили бы $l = 0$, так как ввиду того, что все показатели γ отличны от нуля и ряд (63.4) абсолютно сходится, справедливо соотношение

$$\int_0^T v(t)\,dt = \sum_\rho \frac{e^{i\gamma t}-1}{i\gamma\rho(\rho+1)} = O(1).$$

С другой стороны,

$$\int_0^T v(t)e^{-i\gamma_1 t}\,dt = \frac{T}{\rho_1(\rho_1+1)} + O(1),$$

но если $l = 0$, то $\displaystyle\int_0^T |v(t)|\,dt = o(T)$ $(T\to\infty)$. Полученное противоречие показывает, что предел (65.4) не существует. Теорема 13 доказана.

Для доказательства теорем 14, 15, 17 и 19 нам потребуются два вспомогательных утверждения. Обозначим в предположении гипотезы Римана

$$S(y,h) = \sum_{\gamma>0} \frac{\sin\gamma y}{\gamma}\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}, \qquad y\in\mathbb{R},\quad h>0. \tag{66.4}$$

Ввиду (36.2) ряд (66.4) при всех $y\in\mathbb{R}$ и $h>0$ сходится абсолютно и равномерно по y при фиксированном h. Из дальнейшего будет видно, что равномерная сходимость ряда (66.4) по совокупности переменных (y,h) не имеет места.

Лемма 8. *Если верна гипотеза Римана, то равномерно по $x\geqslant 6$ и $h\in(0,1)$*

$$\frac{1}{2hx^{3/2}}\int_{x\exp(-h)}^{x\exp h} R(u)\,du = -2S(\ln x,h) + w(x,h), \tag{67.4}$$

$|w(x,h)|\leqslant c_{52}$, постоянная c_{52} – абсолютная и эффективная.

Доказательство. Ввиду ограничений на x и h в интеграле (67.4) $u\geqslant 2$. Поэтому из (35.2) и (38.2) находим

$$\begin{aligned}
\frac{x^{-3/2}}{2h}&\int_{x\exp(-h)}^{x\exp h} R(u)\,du \\
&= \frac{x^{-3/2}}{2h}\int_{x\exp(-h)}^{x\exp h}\Bigl(-\sum_\gamma \frac{u^{1/2+i\gamma}}{1/2+i\gamma} + O(1)\Bigr)du \\
&= \frac{x^{-3/2}}{2h}\Bigl(-\sum_\gamma \frac{u^{3/2+i\gamma}}{(1/2+i\gamma)(3/2+i\gamma)}\Bigr|_{x\exp(-h)}^{x\exp h} + O(x\,\mathrm{sh}\,h)\Bigr) \\
&= \frac{1}{2h}\sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}(e^{(3/2+i\gamma)h} - e^{-(3/2+i\gamma)h})}{(\gamma+3/2i)(\gamma+1/2i)} + O(1/\sqrt{x}) \\
&= \frac{1}{h}\sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}\,\mathrm{sh}((3/2+i\gamma)h)}{\gamma^2-2i\gamma-3/4} + O(x^{-1/2}).
\end{aligned} \tag{68.4}$$

Поскольку при $u, v \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(u+iv) = \operatorname{sh} u \cos v + i \sin v \operatorname{ch} u,$$

а при $\gamma \to \pm\infty$

$$(\gamma^2 - 2i\gamma - 3/4)^{-1} = \gamma^{-2} + O(\gamma^{-3}),$$

из (68.4) получаем

$$\begin{aligned}
(69.4)\qquad & \frac{x^{-3/2}}{2h} \int_{x\exp(-h)}^{x\exp h} R(u)\,du \\
&= \frac{\operatorname{sh}(3h/2)}{h} \sum_{\gamma} \frac{\cos(\gamma h) x^{i\gamma}}{\gamma^2 - 2i\gamma - 3/4} \\
&\quad + \frac{i \operatorname{ch}(3h/2)}{h} \sum_{\gamma} \bigl(\gamma^{-2} + O(\gamma^{-3})\bigr) \sin(\gamma h) x^{i\gamma} + O(x^{-1/2}) \\
&= i \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} + O(1).
\end{aligned}$$

Мы воспользовались ограниченностью $\dfrac{\operatorname{sh}(3h/2)}{h}$ и $\dfrac{\operatorname{ch}(3h/2)-1}{h}$ на $(0,1)$ и равномерной ограниченностью по x и h суммы ряда

$$\sum_{\gamma} \left| \frac{x^{i\gamma} \sin \gamma h}{\gamma^3 h} \right| \leqslant \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma^2} < +\infty.$$

Теперь обозначим $y = \ln x$ и в ряде

$$\sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}$$

перейдем к суммированию по $\gamma > 0$. Имеем:

$$(70.4)\qquad \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} = \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \left(\frac{e^{i\gamma y}}{\gamma} + \frac{e^{-i\gamma y}}{-\gamma} \right) = \sum_{\gamma} \frac{2i \sin \gamma y}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}\,.$$

Из (69.4) и (70.4) получаем утверждение леммы 8.

Лемма 9. *Предположим, что верна гипотеза Римана. Тогда существует эффективная абсолютная постоянная* $c_{53} \in (0, 0.1)$ *такая, что при любых* $Y \geqslant 1$ *и* $h \in (0, c_{53}]$ *найдутся точки* $y_1, y_2 \in [Y, Y\exp(h^{-1}(\ln(1/h))^{5/2})]$, *в которых выполняются неравенства*

$$(71.4)\qquad \begin{aligned} S(y_1, h) &> 0.1 \ln(1/h), \\ S(y_2, h) &< 0.1 \ln h. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим

$$T(h) = h^{-1}\ln(1/h), \qquad S_1(y,h) = \sum_{0<\gamma\leqslant T(h)} \frac{\sin\gamma y}{\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\,.$$

Ввиду (29.2) имеем

$$\sum_{\gamma>T}\gamma^{-2} = O(T^{-1}\ln T), \qquad T\geqslant 2.$$

Поэтому равномерно по $y\in\mathbb{R}$, $h\in(0,1/3)$ с эффективной постоянной в символе O выполняется соотношение

$$S(y,h) = S_1(y,h) + O(1). \tag{72.4}$$

Используя (36.2), находим

$$\begin{aligned} S_1(h,h) &= h\sum_{0<\gamma\leqslant T(h)}\left(\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\right)^2 \geqslant h\sum_{0<\gamma\leqslant \pi/2h}\left(\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\right)^2\\ &\geqslant h\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{0<\gamma\leqslant\pi/2h}1 = \frac{4h}{\pi^2}\mathscr{N}\left(\frac{\pi}{2h}\right)\\ &= \frac{4h}{\pi^2}\left(\frac{1}{2h}\cdot\frac{\pi}{2h}\ln\frac{\pi}{2h} + O\left(\frac{1}{h}\right)\right) = \pi^{-2}\ln(1/h) + O(1),\\ S_1(-h,h) &= -S_1(h,h)\leqslant \pi^{-2}\ln h + O(1). \end{aligned}$$

Согласно аппроксимационной теореме Дирихле [15, с. 133] для любого $X\in\mathbb{N}$ найдется натуральное число k, $1\leqslant k\leqslant X^N$, $N=\mathscr{N}(T(h))$, такое, что при всех $m=1,2,\dots,N$ выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\gamma_m Y}{\pi}k\right\| < X^{-1}. \tag{73.4}$$

(Здесь мы занумеровали нули $\zeta(s)$ так же, как и в доказательстве теоремы 6, а через $\|z\|$ обозначим расстояние от z до ближайшего целого числа.) Положим $X=[\ln^2 h]$,

$$y_1 = 2kY + h, \qquad y_2 = 2kY - h, \tag{74.4}$$

где $k\in\mathbb{N}$ есть то самое число, для которого справедливы неравенства (73.4). Так как $Y\geqslant 1$, $0<h<1/3$, то очевидно, что $y_j\geqslant Y$, $j=1,2$. С другой стороны, $y_j\leqslant 3X^NY$, откуда имеем, что

$$y_jY^{-1}\leqslant 3\exp\{\mathscr{N}(T(h))\ln X\}\leqslant 3\exp\{c_{54}h^{-1}\ln^2 h\ln|\ln h|\} < \exp\{h^{-1}(\ln(1/h))^{5/2}\}$$

при $h\in(0,c_{55})$, $j=1,2$.

Таким образом, для доказательства леммы 9 осталось лишь установить справедливость соотношений (71.4) для y_j, определенных в (74.4), $j = 1, 2$, при $0 < h < c_{53} < c_{55}$. Для $j = 1, 2$ имеем:

$$
\begin{aligned}
(75.4)\qquad &|S_1(y_j,h) - S_1(y_j - 2kY, h)|\\
&= \Big|\sum_{0<\gamma<T(h)} \frac{(\sin\gamma y_j - \sin((y_j - 2kY)\gamma))}{\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\Big|\\
&= \Big|\sum_{m=1}^{N} \frac{2\sin((y_j - kY)\gamma_m)\sin(kY\gamma_m)}{\gamma_m}\cdot\frac{\sin\gamma_m h}{\gamma_m h}\Big|\\
&\leqslant \sum_{m=1}^{N}\Big|\frac{2\sin(kY\gamma_m)}{\gamma_m}\Big|.
\end{aligned}
$$

Так как $|\sin\pi\alpha| \leqslant \pi\|\alpha\|$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$, то, учитывая (73.4) при $1 \leqslant m \leqslant N$, получаем неравенства

$$
(76.4)\qquad \sin(kY\gamma_m)| \leqslant \pi\left\|\frac{kY\gamma_m}{\pi}\right\| \leqslant \pi([\ln^2 h])^{-1} = O(\ln^{-2} h).
$$

Из (75.4), (76.4) и (36.3) находим

$$
(77.4)\qquad |S_1(y_j,h) - S_1(y_j - 2kY, h)| \leqslant c_{56}\ln^{-2} h\sum_{m=1}^{N}\gamma_m^{-1} < c_{56},\qquad j = 1, 2.
$$

Ввиду (74.4) неравенства (77.4) можно переписать следующим образом:

$$
(78.4)\qquad
\begin{aligned}
|S_1(y_1,h) - S_1(h,h)| < c_{57},\\
|S_1(y_2,h) - S_1(-h,h)| < c_{57}.
\end{aligned}
$$

Полученные выше оценки для $S_1(\pm h, h)$ вместе с (72.4) и (78.4) влекут за собой справедливость неравенств (71.4) при $h\in(0, c_{53})$. Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 14. Поскольку при любом постоянном $a > 1$ и $u\in[x, ax]$ имеем

$$
(\ln u)^{-1} = (\ln x)^{-1} + O_a\big((\ln x)^{-2}\big),
$$

из (61.4) и (2.2) находим

$$
(79.4)\qquad \int_x^{ax} P(u)\,du = -(\ln x)^{-1}\int_x^{ax}\Big(\sqrt{u} + \sum_{\rho} u^{\rho}/\rho\Big)\,du + O\big(x^{3/2}(\ln x)^{-2}\big).
$$

Вычисляя интеграл, стоящий в правой части (79.4), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\int_x^{ax} & P(u)\,du \\ &= -(\ln x)^{-1}\left(\frac{2}{3}\big((ax)^{3/2}-x^{3/2}\big)+\sum_\rho \frac{(ax)^{\rho+1}-x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right)+O\big(x^{3/2}(\ln x)^{-2}\big)\\ &= \frac{x^{3/2}}{\ln x}\left(-\frac{2}{3}(a^{3/2}-1)-\sum_\rho \frac{x^{i\gamma}(a^{3/2+i\gamma}-1)}{\rho(\rho+1)}\right)+O\big(x^{3/2}(\ln x)^{-2}\big)\\ &\leqslant \frac{x^{3/2}}{\ln x}\left(-\frac{2}{3}(a^{3/2}-1)+\sum_\rho \frac{a^{3/2}+1}{|\rho(\rho+1)|}\right)+O\big(x^{3/2}(\ln x)^{-2}\big)\\ &= -\frac{2}{3}\frac{x^{3/2}(a^{3/2}-1)}{\ln x}K(a)+O\big(x^{3/2}(\ln x)^{-2}\big).\end{aligned}$$

Первая часть теоремы 14 доказана. Приступим к доказательству второй части. Положим

$$h=\frac{1}{2}\ln(1+\alpha),\qquad Y=h+\ln X. \tag{80.4}$$

Ясно, что $\alpha/3<h<\alpha/2$ при всех $\alpha\in(0,1/2)$ и при $0<\alpha<\min(e^{-50},c_{53})$ согласно лемме 9 на отрезке[8]

$$\big[Y, Y\exp\{h^{-1}(\ln(1/h))^{2.5}\}\big]\subset\big[Y, Y\exp\{\tfrac{1}{2}\alpha^{-1}\ln^3(1/\alpha)\}\big]$$

найдется точка y_2, для которой

$$S(y_2,h)<0.1\ln h<0.1\ln\alpha.$$

По лемме 8 это означает, что справедливо неравенство ($x=\exp y_2$)

$$\frac{x^{-3/2}}{2h}\int_{x\exp(-h)}^{x\exp h}R(u)\,du>0.2\ln(1/\alpha)+O(1),$$

т.е. при малых α верна оценка

$$\int_{x\exp(-h)}^{x\exp h}R(u)\,du>0.2\alpha x^{3/2}\ln(1/\alpha)-c_{58}\alpha x^{3/2} \tag{81.4}$$

с абсолютной и эффективной постоянной c_{57}.

Ввиду (1) и леммы 1

$$P(u)=\frac{R(u)}{\ln u}+O\left(\frac{\sqrt{u}}{\ln u}\right)\qquad(\Theta=1/2,\ u\geqslant 2). \tag{82.4}$$

[8] Это включение заведомо имеет место, если $\alpha<e^{-50}$.

Обозначая $\xi = xe^{-h}$ (тогда $xe^h = \xi + \xi\alpha$), из (81.4) и (82.4) находим (постоянные в символах O абсолютные)

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} P(u)\,du \\
&\quad= \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} \frac{R(u)}{\ln u}\,du + O\biggl(\frac{\alpha\xi^{3/2}}{\ln\xi}\biggr) \\
&\quad= \frac{1}{\ln\xi}\int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} R(u)\,du + \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} R(u)\biggl(\frac{1}{\ln u} - \frac{1}{\ln\xi}\biggr)du + O\biggl(\frac{\alpha\xi^{3/2}}{\ln\xi}\biggr) \\
&\quad> \frac{0.2\alpha\xi^{3/2}\ln(1/\alpha)}{\ln\xi} - \frac{c_{59}\alpha\xi^{3/2}}{\ln\xi} - \biggl[\max_{u\in[\xi,\xi+\alpha]}\biggl(\frac{1}{\ln\xi} - \frac{1}{\ln u}\biggr)\biggr]\cdot\int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} |R(u)|\,du \\
&\quad> \frac{0.2\alpha\xi^{3/2}\ln(1/\alpha)}{\ln\xi} - \frac{c_{60}\alpha\xi^{3/2}}{\ln\xi} > \frac{\alpha\xi^{3/2}\ln(1/\alpha)}{6\ln\xi}
\end{aligned}$$

при $\alpha \in (0, c_{24})$. Тем самым неравенство (18.2) доказано. Осталось установить, что $\xi \in [X, X^B]$, где $B = \exp(\alpha^{-1}\ln^3(1/\alpha))$. Имеем: $\ln\xi = \ln x - h = y_2 - h \geqslant Y - h = \ln X$. Требуемая оценка снизу для ξ получена. С другой стороны, $\ln\xi = y_2 - h < YB/2 = B(h + \ln X)/2 < B\ln X$. Поэтому $\xi < X^B$. Вторая часть теоремы 14 доказана.

Перейдем к доказательству третьей части теоремы 14. В доказательстве леммы 9 было установлено предельное соотношение: $\lim_{h\to+0} S(-h,h) = -\infty$. Поэтому найдется $h_0 \in (0, 0.01)$, для которого выполняется неравенство

$$S(-h_0, h_0) < 1 - c_{52},$$

где c_{52} – постоянная леммы 8. Поскольку ряд по системе $\{\sin\gamma_n y\}_{n=1}^{\infty}$ для функции $S(y, h_0)$ абсолютно сходится, $S(y, h_0)$ является почти периодической функцией Бора. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов $S(y, h_0)$ относительно плотно [30]. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $T(\varepsilon)$, что на любом отрезке в $\mathbb{R}$ длины $T(\varepsilon)$ имеется число τ, для которого

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |S(y+\tau, h_0) - S(y, h_0)| < \varepsilon.$$

Из сказанного несложно вывести, что при некотором достаточно большом L и при любом $\alpha > 0$ на отрезке $[\alpha, \alpha + L]$ отыщется точка $\widehat{y} = \widehat{y}(\alpha, L)$ такая, что

$$S(\widehat{y}, h_0) < -0.9 - c_{52}.$$

(Достаточно взять $\varepsilon = 0{,}1$, $L = T(0{,}1)$ и, положив $y = -h_0$, применить сформулированную выше теорему об ε-почти периодах к отрезку $[\alpha + h_0, \alpha + L + h_0]$.) Тогда по лемме 8 получаем, что при $\alpha_1 \geqslant 6$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_1 L_1]$ ($L_1 = \exp L$, $\alpha_1 = \exp\alpha$) найдется точка z, для которой имеет место неравенство

$$\int_{z\exp(-h_0)}^{z\exp h_0} R(u)\,du > 3.6 h_0 z^{3/2}.$$

Так как[9]

$$\int_{z\exp(-h_0)}^{z\exp h_0} \sqrt{u}\,du = (4/3)z^{3/2}\operatorname{sh}(3h_0/2) < (7/3)z^{3/2}h_0,$$

то, воспользовавшись приближенной явной формулой (61.4) для $P(u)$ ($\Theta = 1/2$) и (38.2), получаем

$$\int_{z\exp(-h_0)}^{z\exp h_0} P(u)\,du > \frac{1.2h_0z^{3/2}}{\ln z} + O\biggl(\frac{z^{3/2}}{\ln^2 z}\biggr).$$

Положив $a_1 = \max(L_1e^{2h_0}, 1/h_0)$, приходим к следующему утверждению. При всех $x > x_2$

$$\int_x^{a_1x} P^+(u)\,du > h_0x^{3/2}(\ln x)^{-1}.$$

Отсюда находим

$$\int_{a_1x}^{a_1^2x} P^+(u)\,du > h_0a_1^{3/2}x^{3/2}(\ln(a_1x))^{-1} > \frac{\sqrt{a_1}\,x^{3/2}}{\ln a_1 + \ln x} > x^{3/2}(\ln x)^{-1}.$$

Тем самым утверждение 3 теоремы 14 доказано, и, следовательно, теорема 14 доказана полностью.

Из теоремы 14 легко получить следствие 11. Неравенства (19.2) и (20.2) вытекают из (17.2) и непосредственно проверяемых оценок $K(1,2) > 0.6$, $K(2) > 0.85$. (Напомним, что $\omega < 0.0456$. Это было отмечено в § 2 перед формулировкой теоремы 13.) Неравенство (21.2) является тривиальным следствием (20.2), а утверждение 2 теоремы 14 немедленно влечет за собой (22.2).

Доказательство теоремы 12. Рассмотрим сначала самый простой случай: $\Theta > 1/2$ является достижимым. Из (1) и леммы 1 находим

$$P(u) = \frac{R(u)}{\ln u} + O_\Theta\biggl(\frac{u^\Theta}{\ln^2 u}\biggr). \tag{83.4}$$

Следовательно, при любом $a > 1$ из (83.4) и теоремы 8 получаем

$$\begin{aligned}\int_x^{ax} |P(u)|\,du &= \int_x^{ax} \frac{|R(u)|}{\ln u}\,du + O_\Theta\biggl(\frac{x^{1+\Theta}}{\ln^2 x}\biggr)\\ &\geqslant (\ln ax)^{-1}\int_x^{ax} |R(u)|\,du - c_{64}x^{1+\Theta}(\ln^{-2} x)\\ &\geqslant c_{16}(\ln ax)^{-1}x^{1+\Theta} - c_{64}x^{1+\Theta}\ln^{-2} x > c_{22}x^{1+\Theta}(\ln^{-1} x)\end{aligned}$$

при $x > c_{24}$. Неравенство (16.2) доказано.

Теперь пусть $\Theta > 1/2$ недостижимо. Обозначим

$$B(x) = \frac{R(x)}{\ln x}\,, \qquad \mathscr{P}(x) = B(x) + \int_2^x \frac{B(t)\,dt}{t\ln t}\,.$$

[9] Если $0 < q < 0.1$, то $\operatorname{sh}(3q/2) < (7/4)q$.

Поскольку $P(x) = \mathscr{P}(x) + O(\sqrt{x}/\ln x)$, $x \geqslant 2$, достаточно доказать, что при любых $a > 1, \varepsilon > 0$ и $x > x_3(a, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\int_x^{ax} |\mathscr{P}(u)|\,du > x_n^{1+\Theta-\varepsilon}. \tag{84.4}$$

Доказательство поведем от противного. Предположим, что сформулированное нами только что утверждение неверно. Это означает, что существуют $\delta > 0$, $a > 1$ и последовательность $x_n \to +\infty$ такие, что

$$\int_{x_n}^{ax_n} |\mathscr{P}(u)|\,du \leqslant x^{1+\Theta-\delta}. \tag{85.4}$$

Положим

$$\int_2^{x_n} \frac{B(t)}{t\ln t}\,dt = \mathscr{D}_n, \qquad \varphi_n(x) = \frac{\mathscr{D}_n \ln x_n}{\ln x},$$
$$B_n(x) = B(x) + \varphi_n(x).$$

Легко сообразить, что имеет место равенство

$$\mathscr{P}(u) = B_n(u) + \int_{x_n}^{u} \frac{B_n(t)}{t\ln t}\,dt, \qquad u > x_n. \tag{86.4}$$

Обозначим

$$\beta_n(u) = \int_{x_n}^{u} \frac{B_n(t)}{t\ln t}\,dt, \qquad K_n = \bigl\{(u,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n \leqslant u \leqslant ax_n,\ x_n \leqslant t \leqslant u\bigr\}$$

и оценим сверху

$$I_n = \int_{x_n}^{ax_n} |\beta_n(u)|\,du.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} I_n &\leqslant \int_{x_n}^{ax_n} \int_{x_n}^{u} \frac{|B_n(t)|\,dt}{t\ln t}\,du = \iint_{K_n} \frac{|B_n(t)|}{t\ln t}\,dt\,du \\ &= \int_{x_n}^{ax_n} \frac{|B_n(t)|(ax_n - t)}{t\ln t}\,dt \leqslant \frac{a-1}{\ln x_n} \int_{x_n}^{ax_n} |B_n(t)|\,dt. \end{aligned} \tag{87.4}$$

Из (86.4) и (87.4) находим, что при $n > n_0$

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{ax_n} |\mathscr{P}(u)|\,du &\geqslant \frac{1}{2}\int_{x_n}^{ax_n} |B_n(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{x_n}^{ax_n} \left|\frac{R(t) + \mathscr{D}_n \ln x_n}{\ln t}\right| dt \\ &\geqslant \frac{1}{2\ln(ax_n)} \int_{x_n}^{ax_n} |R(t) + k_n|\,dt, \end{aligned}$$

где $k_n = \mathscr{D}_n \ln x_n$. Очевидно, что если f – произвольная функция, интегрируемая по Лебегу на множестве конечной меры $\omega \subset \mathbb{R}$, то

$$\inf_{k\in\mathbb{R}} \|f+k\|_{L(\omega)} \geqslant \min\bigl(\|f^+\|_{L(\omega)}, \|f^-\|_{L(\omega)}\bigr).$$

Ввиду сказанного заключаем, что при $n > n_1 > n_0$ справедлива оценка

$$\int_{x_n}^{ax_n} |\mathscr{P}(u)|\,du \geqslant 0.4(\ln x_n)^{-1} \min\biggl(\int_{x_n}^{ax_n} R^+(u)\,du, \int_{x_n}^{ax_n} R^-(u)\,du\biggr).$$

Согласно теореме 10 в случае недостижимого Θ при $x > x_1(\delta/2, a)$

$$\int_x^{ax} R^+(u)\,du > x^{1+\Theta-\delta/2}, \qquad \int_x^{ax} R^-(u)\,du > x^{1+\Theta-\delta/2}.$$

Следовательно, при $n > n_2 > n_1$

$$\int_{x_n}^{ax_n} |\mathscr{P}(u)|\,du > x_n^{1+\Theta-\delta},$$

а это противоречит предположению (85.4). Тем самым (84.4), а значит, и (20.2) доказано. Из (21.2), (20.2) и (18.2) при $x > c_{19}$ получаем оценку

$$\int_x^{2x} |P(u)|\,du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}$$

вне зависимости от значения Θ. Если проследить доказательство теоремы 14 и следствия 11, то видно, что в случае $\Theta = 1/2$ постоянная c_{19} является эффективной. Теорема 12 полностью доказана.

§ 5. Доказательства теорем 15–19

Доказательство теоремы 18. Согласно определению R, R_0, $\mathscr{F}$, (37.2) и (38.3) при $x \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad \int_x^{x+vx} R^2(u)\,du &= \int_x^{x+vx} R_0^2(u)\,du = \int_x^{x+vx} (\mathscr{F}(u)+O(1))^2\,du \\ &\leqslant 2\int_x^{x+vx} \mathscr{F}^2(u)\,du + O\biggl(\int_x^{x+vx} du\biggr) \\ &\leqslant 2\int_x^{x+vx} \mathscr{F}^2(u)\,du + c_{65}vx.\end{aligned}$$

Интегрируя почленно возведенный в квадрат ряд (37.2) для $\mathscr{F}(u)$,[10] получаем[11]

$$\frac{1}{x^2}\int_x^{x+vx}\mathscr{F}^2(u)\,du = \frac{1}{x^2}\int_x^{x+vx}\sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\frac{u^{1+i(\gamma_1+\gamma_2)}}{\rho_1\rho_2}\,du$$
$$= \frac{1}{x^2}\sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\frac{(x+vx)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}-x^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}}{\rho_1\rho_2(2+i(\gamma_1+\gamma_2))}$$
$$\leqslant \sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}-1|}{|\rho_1\rho_2|\sqrt{4+(\gamma_1+\gamma_2)^2}} := \sigma(v). \tag{2.5}$$

В свете введенного обозначения осталось доказать, что при $v\in(0,1/3)$

$$\sigma(v) = O(v\ln^4 v). \tag{3.5}$$

Положим $T=[1/v]$ и разобьем двойной ряд $\sigma(v)$ на “начало” и “остаток”:

$$\sigma(v) = \sigma_1(v)+\sigma_2(v),$$
$$\sigma_1(v) = \sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}-1|}{|\rho_1\rho_2|\sqrt{4+(\gamma_1+\gamma_2)^2}},$$
$$\sigma_2(v) = \sigma(v)-\sigma_1(v).$$

Начало ряда оценим, пользуясь неравенствами ($s=1+i(\gamma_1+\gamma_2)$, $0<v<1$)

$$\left|\frac{(1+v)^{s+1}-1}{s+1}\right| = \left|\int_0^v(1+t^s)\,dt\right| \leqslant v(1+v)^{\operatorname{Re}s} = v(1+v) < 2v.$$

Получаем

$$\sigma_1(v) \leqslant 2v\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{1}{|\rho_1\rho_2|}$$
$$= 2v\Bigl(\sum_{|\gamma|\leqslant T}|\rho|^{-1}\Bigr)^{-2} = O(v\ln^4 T) = O(v\ln^4 v). \tag{4.5}$$

Теперь оценим остаток ряда. Воспользуемся очевидным представлением

$$\sigma_2(v) = \sum_{N=T}^{\infty}A(N), \tag{5.5}$$

где

$$A(N) = \sum\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Pi(N)}\frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}-1|}{|\rho_1\rho_2|\sqrt{4+(\gamma_1+\gamma_2)^2}},$$

---

[10] Законность этой операции была обоснована в доказательстве теоремы 1.

[11] Здесь мы снова, как и в доказательстве теоремы 1, нетривиальные нули $\zeta(s)$ не нумеруем, а через ρ_1 и ρ_2 обозначаем соответственно первую и вторую компоненты декартова квадрата множества $\{\rho\}$.

$\Pi(N) = K_{N+1} \setminus K_N$, а K_r – квадрат в $\mathbb{R}^2$ следующего вида: $K_r = [-r, r] \times [-r, r]$. $\Pi(N)$, в свою очередь, разобьем на квадратики со сторонами длины 1, параллельными координатным осям. В суммах $A(N)$ тривиально оценим числитель:

$$|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - 1| \leqslant (1+v)^2 + 1 < 3.$$

Из соображений симметрии ясно, что суммы от $|\rho_1\rho_2|^{-1}(4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2)^{-1/2}$ по любому из четырех рядов квадратиков (верхнему и нижнему горизонтальным, левому и правому вертикальным) совпадают между собой. Поэтому

$$A(N) < 12B(N), \tag{6.5}$$

где

$$B(N) = \sum_{m=-1-N}^{N} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in q_m} \frac{1}{|\rho_1\rho_2|\sqrt{4+(\gamma_1+\gamma_2)^2}},$$
$$q_m = \bigl\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N < y_1 < N+1,\ m \leqslant y_2 < m+1\bigr\}.$$

Количество элементов последовательности (γ_1, γ_2) в квадратике q_m составляет $O(\ln N \cdot \ln m)$, если $|m| \geqslant 14$, и равно нулю, если $|m| < 14$. К тому же $|\rho_1| > N$. Ввиду сказанного приходим к оценкам

$$\begin{aligned} B(N) &< \frac{\ln N}{N} \sum_{14\leqslant|m|\leqslant N+1} \frac{\ln m}{m\cdot|\max(2, N+m)|} \\ &< \frac{2\ln N}{N}\left(\frac{\ln N}{N} + \sum_{m=14}^{N-1}\frac{\ln m}{m(N-m)}\right) < c_{66}\frac{\ln^3 N}{N^2}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Из (5.5)–(7.5) находим

$$\sigma_2(v) \leqslant c_{67} T^{-1} \ln^3 T. \tag{8.5}$$

Из (1.5)–(4.5) и (8.5) получаем (32.2). Оценка (33.2) сразу же получается из (32.2) с помощью неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} |R_1(x, H(x))| &\leqslant (H(x))^{-1}\int_x^{x+H(x)} |R(u)|\,du \\ &\leqslant (H(x))^{-1}\left(\int_x^{x+H(x)} R^2(u)\,du\right)^{1/2} \cdot \left(\int_x^{x+H(x)} du\right)^{1/2} \\ &= O(H(x))^{-1}\sqrt{xH(x)\ln^4\left(\frac{x}{H(x)}\right)}\sqrt{H(x)} \\ &= O\left(\sqrt{x}\,\ln^2\left(\frac{x}{H(x)}\right)\right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 19 поведем от противного. Допустим, что существует некоторая функция $H(x)$, $1 \leqslant H(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, такая, что выражение

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,H(x)} \int_x^{x+H(x)} R(u)\,du$$

ограничено либо сверху, либо снизу. Мы разберем случай ограниченности $E(x)$ сверху. Неограниченность снизу $E(x)$ доказывается совершенно аналогично.

Итак, предположим, что существует постоянная $K \geqslant 1$ такая, что при любых $x > 2$

$$\int_x^{x+H(x)} R(u)\,du < K\sqrt{x}\,H(x). \tag{9.5}$$

Положим

$$h = \min\bigl(c_{53}, \exp(-20K - 10c_{52})\bigr),$$

где c_{52}, c_{53} – постоянные лемм 8 и 9 соответственно. По лемме 9 существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что выполнены неравенства

$$S(t_n, h) < 0.1 \ln h \leqslant -2K - c_{52}. \tag{10.5}$$

Обозначим $z_n = \exp(t_n)$. Лемма 8 вместе с (10.5) дает

$$\frac{1}{2hz_n^{3/2}} \int_{z_n e^{-h}}^{z_n e^h} R(u)\,du > 4K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Полагая $z_n e^{-h} = x_n$, $\alpha = e^{2h} - 1$ (ясно, что $2h > 3\alpha/4$), получаем

$$\int_{x_n}^{x_n + \alpha x_n} R(u)\,du > 3K\alpha x_n^{3/2}. \tag{11.5}$$

Покажем, что оценки (11.5) и (9.5) при больших x_n несовместны. Получившееся противоречие и будет означать неограниченность сверху функции $x^{-1/2}R_1(x, H(x))$.

Зададим рекуррентно последовательности чисел $x_{k,n}$. Положим

$$x_{0,n} = x_n, \qquad x_{k+1,n} = x_{k,n} + H(x_{k,n}), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{12.5}$$

Пусть N – такой номер, что

$$x_{N,n} \leqslant x_n + \alpha x_n < x_{N+1,n}.$$

Он обязательно существует, так как $H(x) \geqslant 1$, и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} x_{k,n} = +\infty$. Из (9.5) находим

$$\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} R(u)\,du = \int_{x_{k,n}}^{x_{k,n}+H(x_{k,n})} R(u)\,du < K\sqrt{x_{k,n}}\,H(x_{k,n}). \tag{13.5}$$

Но, так как при $k \leqslant N$ имеем $x_{k,n} \leqslant x_n + \alpha x_n < 2x_n$, то $\sqrt{x_{k,n}} \leqslant \sqrt{2x_n}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, и, складывая неравенства (13.5), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{N,n}} R(u)\,du &< \sqrt{2x_n}\,K \sum_{k=0}^{N-1} H(x_{k,n}) \\ &= \sqrt{2x_n}\,K \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \\ &= \sqrt{2x_n}\,K(x_{N,n} - x_{0,n}) \leqslant \alpha x_n \sqrt{2x_n}\,K.\end{aligned} \tag{14.5}$$

Обозначим $v_n = (x_n + \alpha x_n - x_{N,n})/x_{N,n}$. Из (13.5) следует, что $v_n < H(x_{N,n})/x_{N,n}$. Применяя теорему 18, находим

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_{N,n}}^{x_n+\alpha x_n} R(u)\,du\right| &= \left|\int_{x_{N,n}}^{x_{N,n}+v_n x_{N,n}} R(u)\,du\right| \\ &= O(x_n^{3/2} v_n \ln^2 v_n) = o(x_n^{3/2}) \qquad (n \to +\infty),\end{aligned} \tag{15.5}$$

так как $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Вследствие (14.5) и (15.5) при достаточно больших n получаем неравенство

$$\int_{x_{N,n}}^{x_n+\alpha x_n} R(u)\,du < 2K\alpha x_n^{3/2},$$

которое противоречит (11.5). Как отмечалось выше, это доказывает неограниченность сверху $x^{-1/2} R_1(x, H(x))$. Неограниченность снизу этой функции доказывается совершенно аналогично. Нужно лишь вместо оценки сверху $S(y_2, h)$ воспользоваться оценкой снизу $S(y_1, h)$ из леммы 9. Теорема 19 доказана.

Доказательство теоремы 17. Сначала с помощью леммы 8 перепишем утверждение теоремы 17 в более удобном для доказательства виде. Положим

$$z = \sqrt{x(x + H(x))}, \qquad h_0 = h_0(x) = \frac{1}{2}\ln\biggl(1 + \frac{H(x)}{x}\biggr).$$

Тогда $z\exp(-h_0) = x$, $z\exp(h_0) = x + H(x)$. По лемме 8

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h_0 z^{3/2}} \int_{z\exp(-h_0)}^{z\exp(h_0)} R(u)\,du \\ &= \frac{H(x)/x}{\ln(1 + H(x)/x)} \cdot x^{-1/2}\bigl(1 + H(x)/x\bigr)^{-3/4} \frac{1}{H(x)} \int_x^{x+H(x)} R(u)\,du \\ &= \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{x}} R_1(x, H(x)).\end{aligned}$$

Отсюда и из (67.4) находим (определение функции S см. в (66.4))

$$R_1(x, H(x)) = \sqrt{x}\,\bigl(1 + o(1)\bigr)\bigl(S(\ln z, h_0) + O(1)\bigr).$$

Поэтому требуется доказать, что

$$S(y, a(y)) = \Omega_{\pm}\bigl(\ln(a(y))\bigr), \tag{16.5}$$

где

$$y = \ln z, \qquad a(y) = \frac{1}{2}\ln\biggl(1 + \frac{H(x)}{x}\biggr) \sim \frac{1}{(2V(x))} \quad (x \to +\infty).$$

Из условий, наложенных на функцию H, получим условия на функцию a:

$$a(y) \searrow 0 \quad (y + \infty), \qquad a \in C^1(y(x_0), +\infty), \tag{17.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dy} = \frac{da}{dx}\,\frac{dx}{dy} = \frac{da}{dx}\,\frac{dx}{dz}\,\frac{dz}{dy} &= O\biggl(\frac{1}{x\ln x}\biggr)\bigl(1 + o(1)\bigr)e^y \\ &= O(1/\ln x) = O(1/y) \quad (y \to +\infty), \end{aligned} \tag{18.5}$$

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{a(y^2)} = \ln\frac{1}{a(z^{\ln z})} &= \ln V(z^{\ln z}) \\ &= O(\ln V(z)) = O(\ln(1/a(y))). \end{aligned} \tag{19.5}$$

Итак, осталось доказать $\Omega_{\pm}$-оценку (16.5) для любой функции $a(y)$, удовлетворяющей условиям (17.5)–(19.5). Положим

$$T(h) = h^{-1}\ln(1/h), \qquad h(Y) = \sqrt{a(Y)}.$$

При $Y > x_4 > x_3$ ввиду (17.5) имеем $h(Y) < c_{52}$. Поэтому согласно неравенствам, доказанным в лемме 9, для любых $Y > x_4$ и $h = h(Y)$ найдутся числа $y_1, y_2 \in [Y, Y\exp(h^{-1}\ln^{2.5}(1/h))]$, для которых

$$\begin{aligned} &S_1(y_1, h) > 0.1\ln(1/h), \\ &S_1(y_2, h) < 0.1\ln h. \end{aligned} \tag{20.5}$$

Из (20.5) несложно вывести, что при $Y > x_5 > x_4$

$$\begin{aligned} S_2(y_1, a(y), h) &> \frac{1}{30}\ln\biggl(\frac{1}{a(Y)}\biggr), \\ S_2(y_2, a(y), h) &< \frac{1}{30}\ln\bigl(a(Y)\bigr), \end{aligned} \tag{21.5}$$

где

$$S_2(y_1, a(y), h) = \sum_{0<\gamma<T(h)} \frac{\sin\gamma y}{\gamma}\,\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\,\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\,.$$

(Напомним, что здесь $h = \sqrt{a(Y)}$.) Действительно, при $|z| < 1$ имеем $1 - (\sin z)/z = O(z^2)$, а если $\gamma \in [0, T(h(Y))]$ и $y \geqslant Y$, то

$$0 < \gamma a(y) < T(h(Y))a(Y) = O\bigl(\sqrt{a(Y)}\,\ln(1/a(Y))\bigr).$$

Поэтому

$$(22.5)\quad |S_1(y,h)-S_2(y,a(y),h)| = O\biggl(a(Y)\ln^2(1/a(Y))\sum_{0<\gamma<T(h)}\biggl|\frac{\sin\gamma y}{\gamma}\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\biggr|\biggr)$$
$$= O\biggl(a(Y)\ln^2(a(Y))\sum_{0<\gamma<T(h)}\gamma^{-1}\biggr)$$
$$= O\bigl(a(Y)\ln^4(a(Y))\bigr) = o(1)\qquad (y\geqslant Y\to+\infty).$$

Тем самым из (20.5) и (22.5) следуют неравенства (21.5) при $Y > x_5$.

Теперь покажем, что $S_2(y,a(y),h)$ “мало отличается” от среднего для функции $S(t,a(t))$ на отрезке $[y-h,y+h]$. Имеем:

$$(23.5)\quad \frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} S(t,a(t))\,dt = \frac{1}{2h}\sum_{\gamma>0}\int_{y-h}^{y+h}\frac{\sin\gamma t}{\gamma}\frac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2h}\sum_{\gamma>0}\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\int_{y-h}^{y+h}\frac{\sin\gamma t}{\gamma}\,dt$$
$$+\frac{1}{2h}\sum_{\gamma>0}\int_{y-h}^{y+h}\frac{\sin\gamma t}{\gamma}\biggl(\frac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}-\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\biggr)dt$$
$$= S_3(y,a(y),h) + O\bigl(S_4(y,a(y),h)\bigr),$$

где

$$S_3(y,a(y),h) = \sum_{\gamma>0}\frac{\sin\gamma y}{\gamma}\,\frac{\sin\gamma h}{\gamma h}\,\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\,,$$
$$S_4(y,a(y),h) = h^{-1}\sum_{\gamma>0}\gamma^{-1}\int_{y-h}^{y+h}\biggl|\frac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}-\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\biggr|\,dt.$$

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 9, получаем соотношение

$$(24.5)\qquad S_2(y,a(y),h) - S_3(y,a(y),h) = O(1).$$

Оценим сумму S_4. С этой целью разобьем ее на две части:

$$S_4 = S_5 + S_6,\quad \text{где}\quad S_5 = \sum_{\gamma\leqslant a^{-2}(y)}\,,\quad S_6 = \sum_{\gamma>a^{-2}(y)}\,.$$

В сумме S_6 оценим интеграл тривиально:

$$\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h}\biggl|\frac{\sin\gamma t}{\gamma}-\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\biggr|\,dt \leqslant \max_{t\in[y-h,y+h]}\biggl|\frac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}-\frac{\sin\gamma a(y)}{\gamma a(y)}\biggr|$$
$$\leqslant \frac{2}{\gamma a(y+h)} < \frac{2}{\gamma a(y+1)}\,.$$

Поэтому[12]

$$S_6 \leqslant \frac{4}{a(y+1)} \sum_{\gamma > a^{-2}(y)} \gamma^{-2} = O\biggl(\frac{a^2(y)\ln(1/a(y))}{a(y+1)}\biggr) = o\biggl(\frac{a(y)}{a(y+1)}\biggr) = o(1) \qquad (y \to +\infty). \tag{25.5}$$

В сумме S_5 для $f(t) = f_\gamma(t) = \dfrac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}$ оценим интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} h^{-1}\int_{y-h}^{y+h} |f(t)-f(y)|\,dt &\leqslant h^{-1}\int_{y-h}^{y+h} |(t-y)f'(\xi(t,y))|\,dt \\ &\leqslant \max_{u\in[y-h,y+h]} |f'(u)| \cdot h^{-1}\int_{y-h}^{y+h} |t-y|\,dt \\ &= h\cdot \max_{u\in[y-h,y+h]} |f'(u)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_5 \leqslant h \sum_{0<\gamma<a^{-2}(y)} \gamma^{-1} \max_{u\in[y-h,y+h]} \frac{d}{dt}\biggl(\frac{\sin\gamma a(t)}{\gamma a(t)}\biggr). \tag{26.5}$$

Так как

$$\frac{d}{d\alpha}\biggl(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\biggr) \leqslant \min(\alpha, 2/\alpha) \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}$$

и, как уже отмечалось, справедливы соотношения

$$a(u) \sim a(y), \qquad u\in[y-h,y+h], \qquad a'(u) = O(1/u),$$

то из (26.5) с учетом (18.5) и (36.2) получаем оценки

$$S_5 = O\biggl(hy^{-1} \sum_{0<\gamma<a^{-2}(y)} \min\bigl(\gamma a(y), 1/(\gamma a(y))\bigr)\biggr) = O\biggl(hy^{-1}\frac{\ln(1/a(y))}{a(y)}\biggr) = o(y^{-1}\ln y \ln\ln y) = o(1) \qquad (y\to+\infty). \tag{27.5}$$

Из (23.5)–(25.5) и (27.5) находим

$$S_2(y, a(y), h) = \frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} S(t, a(t))\,dt + O(1), \qquad y \geqslant Y. \tag{28.5}$$

Соотношения (22.5) и (28.5) позволяют заключить, что

$$S(t, a(t)) = \Omega_\pm \ln(a(Y)), \qquad t \in \bigl[Y - h(Y), h(Y) + Y\exp(h^{-1}(Y))\ln^{2.5}(h^{-1}(Y))\bigr]. \tag{29.5}$$

Но, исходя из выбора $h(Y)$ и неравенства $a(Y) \geqslant 1/4\ln Y$, нетрудно проверить, что правый конец промежутка (29.5) не превосходит Y^2, а ввиду (19.5) и монотонности $a(t)$ при $t\in[Y, Y^2]$ имеем $\ln(a(t)) \asymp \ln(a(Y))$. Поэтому

$$S_2(t, a(t)) = \Omega_\pm \ln(a(t)),$$

а это доказывает теорему 17.

---

[12] Из (17.5)–(18.5) легко следует, что $\lim_{y\to+\infty}\bigl(a(y)/a(y+1)\bigr) = 1$.

Лемма 10. *Обозначим* $A(x) = \int_x^{2x} R(u)\,du$. *Тогда*

$$A(x) = \Omega_\pm(x^{1+\Theta-\varepsilon}) \quad \forall\,\varepsilon > 0,$$
$$A(x) = \Omega_\pm(x^{1+\Theta}), \quad \textit{если } \Theta \textit{ достижимо.}$$

Доказательство. Хорошо известно [16, с. 50] интегральное представление

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} R(u)u^{-s-1}\,du, \qquad \operatorname{Re} s > \Theta. \tag{30.5}$$

Произведя в правой части (30.5) интегрирование по частям, приходим к соотношению $\left(R_1(u) = \int_1^u R(t)\,dt\right)$

$$\int_1^{+\infty} R_1(u)u^{-s-2}\,du = -\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\right), \qquad \operatorname{Re} s > \Theta. \tag{31.5}$$

Поскольку $A(x) = R_1(2x) - R(x)$, из (32.2) получаем аналитическое выражение для преобразования Меллина функции $A(u)$:

(32.5)

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_1^{+\infty} A(u)u^{-s-2}\,du \\ &= \int_{1/2}^{+\infty} R_1(2u)u^{-s-2}\,du - \int_1^{+\infty} R_1(u)u^{-s-2}\,du - \int_{1/2}^{1} R_1(2u)u^{-s-2}\,du \\ &= -\frac{2^{s+1}-1}{s+1}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\right) + \text{целая функция.} \end{aligned}$$

Таким образом, $f(s)$ – преобразование Меллина функции $A(u)$ – регулярно на луче $(0, +\infty)$ и все особые точки $f(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ – изолированные, совпадают с нулями $\zeta(s)$ и являются полюсами. Воспользуемся теперь одной известной тауберовой теоремой.

Пусть $g(x)$ – всюду конечная измеримая действительнозначная функция на $[1, +\infty)$, $g(x) = O(x^\lambda)$ $(x \geqslant 1)$, где λ – некоторая постоянная. Пусть затем преобразование Меллина функции g

$$G(s) = \int_1^{+\infty} g(x)x^{-s-1}\,dx$$

имеет в $\mathbb{C}$ полюс в точке $s = \beta + i\gamma$, $\gamma \neq 0$, и регулярно на луче $[\beta, +\infty)$. Тогда

$$g(x) = \Omega_\pm(x^\beta) \qquad (x \to +\infty).$$

Из этой теоремы и представления (32.5) без труда получаем утверждение леммы 10.

Доказательство теоремы 16.

I. $\Theta = 1/2$. Идея доказательства очень проста. Предположив, что либо

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{R_1(x,H(x))}{\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x} \leqslant 0, \tag{33.5}$$

либо

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{R_1(x,H(x))}{\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x} \geqslant 0, \tag{34.5}$$

мы для функции $H_0(x) = x/\sqrt{\ln\ln x}$ из (33.5) получим

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{R_1(x,H_0(x))}{\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x} \leqslant 0, \tag{35.5}$$

а из (34.5) находим, что

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{R_1(x,H_0(x))}{\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x} \geqslant 0. \tag{36.5}$$

Но, применив к $R_1(x,H_0(x))$ теорему 17 (функция H_0 удовлетворяет всем условиям этой теоремы), убеждаемся в том, что оба соотношения (35.5) и (36.5) неверны. Значит, неверны и соотношения (33.5) и (34.5). Это и означает справедливость $\Omega_\pm$-оценки (29.2).

Установим справедливость импликации (33.5)$\Rightarrow$(35.5). С каждым $x > x_0$ свяжем последовательность чисел $a_n(x)$:

$$a_0(x) = x, \qquad a_n(x) = a_{n-1}(x) + H(a_{n-1}(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $N = N(x)$ – номер, для которого выполнено неравенство

$$a_N(x) \leqslant x + H_0(x) < a_{N+1}(x).$$

Ввиду (33.5) найдется монотонно стремящаяся к нулю положительная функция $\varepsilon(z)$ такая, что

$$\int_z^{z+H(z)} R(u)\,du < \varepsilon(z)\sqrt{z}\,H(z)\ln\ln\ln z. \tag{37.5}$$

Применяя (37.5) к $z = a_k(x)$, $k = 0,1,\dots,N-1$, находим

$$\begin{aligned}\int_{a_k(x)}^{a_{k+1}(x)} R(u)\,du &< \varepsilon(a_k(x))\sqrt{a_k(x)}\,H(a_k(x))\ln\ln\ln(a_k(x)) \\ &= \big(a_{k+1}(x) - a_k(x)\big)O\big(\varepsilon(x)\sqrt{x}\ln\ln\ln x\big).\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\int_x^{a_N(x)} R(u)\,du = o\big(\sqrt{x}\,H_0(x)\ln\ln\ln x\big) \qquad (x\to+\infty). \tag{38.5}$$

Осталось оценить интеграл $R(u)$ по “короткому” отрезку $[a_N(x), x+H_0(x)]$. Его длина $l(x)$ меньше, чем $H(a_N(x)) \leqslant H(2x)$. По теореме 18

$$\int_{a_N(x)}^{x+H_0(x)} |R(u)|\,du = O\big(x^{3/2}\varphi(x/l(x))\big), \tag{39.5}$$

где $\varphi(t) = t^{-1}\ln^2 t$. Так как $\varphi(t)$ убывает при $t \geqslant e^2$, то вместо $x/l(x)$ при больших x в (39.5) можно поставить оценку снизу этой величины: $x/l(x) \geqslant x/H(2x) \geqslant c_{58}\ln\ln(2x)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{a_N(x)}^{x+H_0(x)} |R(u)|\,du &= O\big(x^{3/2}(\ln\ln(2x))^{-1}(\ln\ln\ln(2x))^2\big)\\ &= o\big(\sqrt{x}\,H_0(x)\ln\ln\ln x\big).\end{aligned} \tag{40.5}$$

Из (38.5) и (40.5) получаем (35.5). Импликация (34.5)⇒(36.5) доказывается совершенно аналогично.

II. $\Theta > 1/2$ достижимо. Как и выше, положим

$$a_0(x) = x, \qquad a_n(x) = a_{n-1}(x) + H(a_{n-1}(x)), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{41.5}$$

Но здесь через $N = N(x)$ обозначим номер, для которого выполнено неравенство $a_N(x) \leqslant 2x < a_{N+1}(x)$. Из теоремы 2 находим

$$\begin{aligned}\int_{a_N(x)}^{2x} |R(u)|\,du &= O\big(x^{\Theta}(2x - a_N(x))\big) = O\big(x^{\Theta}H(a_N(x))\big)\\ &= o\big(x^{\Theta}a_N(x)\big) = o(x^{1+\Theta}) \qquad (x \to +\infty).\end{aligned} \tag{42.5}$$

Предположив, что $\limsup_{x\to+\infty} x^{-\Theta}R_1(x, H(x)) \leqslant 0$, получим, что существует монотонно стремящаяся к нулю положительная функция $\varepsilon(x)$, для которой справедливо неравенство

$$\int_x^{x+H(x)} R(u)\,du \leqslant \varepsilon(x)x^{\Theta}H(x), \qquad x > x_0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{a_k(x)}^{a_{k+1}(x)} R(u)\,du &\leqslant \big(a_{k+1}(x) - a_k(x)\big)\varepsilon(x)(a_k(x))^{\Theta}\\ &\leqslant \big(a_{k+1}(x) - a_k(x)\big)\varepsilon(x)(2x)^{\Theta}.\end{aligned} \tag{43.5}$$

Складывая неравенства (43.5), находим

$$\begin{aligned}\int_x^{a_N(x)} R(u)\,du &\leqslant \big(a_N(x) - a_0(x)\big)\varepsilon(x)(2x)^{\Theta}\\ &\leqslant 2x^{1+\Theta}\varepsilon(x) = o(x^{1+\Theta}) \qquad (x \to +\infty).\end{aligned} \tag{44.5}$$

Из (42.5) и (44.5) получаем импликацию

$$\limsup_{x\to+\infty} x^{-\Theta} R_1(x,H(x)) \leqslant 0 \implies \limsup_{x\to+\infty} x^{-1-\Theta} A(x) \leqslant 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-\Theta} R_1(x,H(x)) \geqslant 0 \implies \liminf_{x\to+\infty} x^{-1-\Theta} A(x) \geqslant 0.$$

Но согласно лемме 10 правые части этих импликаций неверны. Следовательно, неверны посылки. Это и означает, что $R_1(x,H(x)) = \Omega_\pm(x^\Theta)$. Теорема 16 полностью доказана.

Из теоремы 16 заключаем, что теорему 15 осталось доказать только в случае, когда Θ недостижимо. Снова, так же как и в (41.5), определим $a_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant N+1$. Предположив, что

$$\int_x^{x+H(x)} R(u)\,du \leqslant \varepsilon(x)\sqrt{x}\,H(x)\ln\ln\ln x \qquad (x > x_0),$$

где $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ (и, следовательно, можно без ограничения общности считать, что $\varepsilon(x) \downarrow 0$), получаем тем же техническим приемом, что и ранее,

$$\int_x^{a_N(x)} R(u)\,du = o(x^{3/2}\ln\ln\ln x) \qquad (x\to+\infty). \tag{45.5}$$

Пользуясь абсолютной оценкой $R(u)$ из теоремы 2, находим

$$\int_{a_N(x)}^{2x} |R(u)|\,du = o\bigl(x^\Theta H(a_N(x))\bigr) = o(x^{1+\Theta-\delta}). \tag{46.5}$$

Возьмем теперь $\varepsilon = \min(\delta/2, \Theta/2 - 1/4)$. Ясно, что из (45.5) и (46.5) следуют импликации

$$\limsup_{x\to+\infty} x^{-1/2-\varepsilon} R_1(x,H(x)) \leqslant 0 \implies \limsup_{x\to+\infty} x^{\varepsilon-1-\Theta} A(x) \leqslant 0, \tag{47.5}$$

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-1/2-\varepsilon} R_1(x,H(x)) \geqslant 0 \implies \liminf_{x\to+\infty} x^{\varepsilon-1-\Theta} A(x) \geqslant 0. \tag{48.5}$$

Согласно лемме 10 правые части (47.5) и (48.5) неверны и, следовательно, неверны посылки этих импликаций. Поэтому

$$R_1(x,H(x)) = \Omega_\pm(x^{1/2+\varepsilon}) = \Omega_\pm(\sqrt{x}\,\ln\ln\ln x).$$

А. Ю. Попов, писавший окончательный вариант этой работы после смерти профессора С. Б. Стечкина, приносит благодарность доктору физико-математических наук С. В. Конягину за прочтение рукописи и ценные замечания, которые помогли значительно улучшить изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hadamar J. Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et des consequences arithmetiques // Bull. Soc. Math. France. 1896. V. 24. P. 199–220.

[2] de la Vallée Poussin Ch. J. Recherches analytiques sur la théorie des nombres. Première parte: la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premièrs en générale // Ann. Sci. Bruxells. 1896. V. 20. P. 183–256.

[3] Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

[4] de la Vallée Poussin Ch. J. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres des nombres premièrs inferieurs à une limite donee // Memories couronnes de 1' Acad. Roy. des. de Belgique. 1899–1900. V. 59. №1.

[5] Виноградов И. М. Новая оценка $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. №1. С. 161–164.

[6] Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // ДАН СССР. 1958. Т. 118. С. 431–432.

[7] Коробов Н. М. Оценки тригонометрическихх сумм и их приложения // УМН. 1958. Т. 13. №4. С. 185–192.

[8] Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der neuren Zahlentheorie. Berlin: Verlag der Wissenschaften, 1963.

[9] Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line $\operatorname{Re} s = 1$ // Integral Transformation and Special Functions. 1993. V. 1. P. 1–7.

[10] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

[11] Карацуба А. А. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. №5. С. 81–140.

[12] Schmidt E. Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze // Math. Ann. 1903. V. 57. P. 195–204.

[13] Littlewood J. E. Sur la distribution des nombres premiers // Contes Rendus. 1914. V. 158. P. 1869–1872.

[14] Лаврик А. Ф. Распределение простых чисел // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 876–883.

[15] Landau E. Vorlesungen Über Zahlentheorie. V. 2. Leipzig: Verlag von S. Hirzelin, 1927.

[16] Ингам А. Е. Распределение простых чисел. М.-Л.: ОНТИ, 1936.

[17] Cramer H. Some theorems concerning prime numbers // Arkiv för Matematik 1920. V. 15. №5.

[18] Cramer H. Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie // Math. Zeitschrift. 1922. V. 12. P. 147–153.

[19] von Koch H. Sur la distribution de nombres premiers // Acta Math. 1901. V. 24. P. 159–182.

[20] Kaczorowski J. On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula // Acta Arith. 1984. V. 54. №4. P. 365–377.

[21] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

[22] Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of a number as a sum of primes // Acta Math. 1923. V. 44. P. 1–70.

[23] Попов А. Ю, Стечкин С. Б. Асимптотическое распределение простых чисел в среднем // II-я международная конференция "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тезисы докладов. Воронеж, 1995. С. 128.

[24] Popov A. Yu., Stechkin S. B. Almost periodic functions and the asymptotic distribution of prime numbers // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. P. 143–150.

[25] Попов А. Ю, Стечкин С. Б. О поведении разности $\psi(x) - x$ // III Международная конференция "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". Тезисы докладов. Тула, 1996. С. 116.

[26] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.

[27] Лаврик А. Ф. Дзета-функция. // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 112–119.

[28] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГТФМЛ, 1961.

[29] Бредихина Е. А. Почти периодическая функция // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 543–545.
[30] Bezicovitch A. S. Almost periodic functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.
[31] Arno S. The imaginary quadratic fields of the class number 4 // Acta. Arith. 1992. V. 60. №4. P. 321–334.
[32] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
[33] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
[34] Прудников А. Ф., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН;
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.09.1996