С. В. Конягин, А. Ю. Попов, О скорости расходимости некоторых интегралов, *Матем. заметки*, 1995, том 58, выпуск 2, 243–255

Математические заметки

том 58 выпуск 2 август 1995

О СКОРОСТИ РАСХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С. В. Конягин, А. Ю. Попов

Пусть

$$M(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n),\qquad \psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),\qquad \Delta(x)=\psi(x)-x, \tag{1}$$

$\theta = \sup\bigl\{\operatorname{Re} s \mid \zeta(s) = 0\bigr\}$. Здесь, как обычно, μ-функция Мёбиуса, Λ – функция Мангольдта, ζ – дзета-функция Римана.

Оценка роста функций Δ и M и нахождение величины θ является одной из центральных задач аналитической теории чисел. Значение θ до сих пор не известно. Доказано, что $\theta\in[1/2,1]$ и

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|\Delta(x)|}{\ln x}=\limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|M(x)|}{\ln x}=\theta. \tag{2}$$

Поскольку мы не знаем, чему равно θ, то соотношение (2) дает слишком мало информации о поведении функций (1). Наилучшие по порядку из известных эффективных оценок сверху для $\bigl|\Delta(x)\bigr|$ и $\bigl|M(x)\bigr|$ приведены в [1]–[3]. В этой работе мы будем оценивать снизу средние значения функций Δ и M. Литтлвуд и Ландау доказали, соответственно (см. [2]), что

$$\Delta(x)=\Omega_\pm\bigl(\sqrt{x}\ln\ln\ln x\bigr),\qquad M(x)=\Omega_\pm\bigl(\sqrt{x}\bigr).$$

В предположении справедливости гипотезы Римана (т.е. $\theta=1/2$) Крамер [4] получил асимптотику

$$\int_1^X\Delta^2(x)x^{-2}\,ds\sim c_1\ln X,\qquad X\to+\infty. \tag{3}$$

Выполнение работы С. В. Конягиным поддержано грантом № MC5000 Международного научного фонда и грантом № 93-01-002400 Российского фонда фундаментальных исследований.

(Через c_1, c_2, c_3 и т. д. мы обозначаем некоторые положительные постоянные.) Соотношение (3) означает, что если $\theta = 1/2$, то $\Delta(x)$ ведет себя "в среднем" так же, как и $c_1\sqrt{x}$. Рассуждения Крамера в значительной степени использовали специфику функции Δ и для функции M были непригодны. До недавнего времени не было даже известно, сходится или расходится интеграл $\int_1^{+\infty} M^2(x)x^{-2}\,dx$. С. Б. Стечкин в докладе на семинаре доказал расходимость этого и некоторых других интегралов. Его доказательство расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} M^2(x)x^{-2}\,dx$ основывалось на применении полученной им новой тауберовой теоремы к преобразованию Меллина

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{+\infty} M(x)x^{-s-1}\,dx, \qquad \operatorname{Re} s > \theta.$$

Поясним вкратце основное содержание упомянутой тауберовой теоремы С. Б. Стечкина.

Пусть $A \in L_\infty[1,b]\ \forall\, b > 1$, и интеграл

$$f(s) = \int_1^{+\infty} A(x)x^{-s-1}\,dx \tag{4}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > \theta_1 \geqslant 1/2$. Тогда

1) если интеграл (4) расходится при некотором s_0, $\operatorname{Re} s_0 > 1/2$, то и интеграл
$$\int_1^{+\infty} \bigl|A(x)\bigr|^2 x^{-2}\,dx \tag{5}$$
расходится;

2) если при любом $\varepsilon > 0$
$$A(x) = O\bigl(x^{1/2+\varepsilon}\bigr), \qquad x \to +\infty,$$
и при некотором $t_1 \in \mathbb{R}$
$$\bigl|f(\sigma + it_1)\bigr| > c_2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}, \qquad \sigma \to \frac{1}{2} + 0,$$
то интеграл (5) также расходится.

При выполнении условия 2) С. Б. Стечкин указал метод для получения оценок скорости расходимости интегралов (5). Правда, эти оценки в значительной степени зависели от специфики функции $A(x)$ и при их доказательстве использовалась информация о поведении $f(s)$ лишь при $\operatorname{Re} s > 1/2$. На своем научно-исследовательском семинаре С. Б. Стечкин поставил задачу получения эффективных оценок скорости расходимости интегралов (5) вида $\int_1^X A^2(u)u^{-2}\,du \geqslant c_3 \ln X$ (т.е. не хуже, чем в [4] при $\theta = 1/2$) при наличии дополнительной информации об аналитическом продолжении функции $f(s)$ из (4) за прямую $\operatorname{Re} s = 1/2$. В нашей работе эта задача решена.

Теорема 1. *Пусть A – измеримая на $[1, +\infty)$ комплекснозначная функция, и при почти всех $x \geqslant 1$*

$$\bigl|A(x)\bigr| \leqslant c_4 x^{c_5}, \qquad c_5 > \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Пусть затем относительно преобразования Меллина функции A

$$f(s) = \int_1^{+\infty} A(x)x^{-s-1}\,dx$$

известно, что существует $t_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $f(s)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого полукруга

$$\bigl\{s \in C \mid \bigl|s - (c_5 + it_1)\bigr| \leqslant c_5 - 1/2,\ \operatorname{Re} s \leqslant c_5\bigr\},$$

из которой выколота точка $s_1 = 1/2 + it_1$, а в самой точке s_1 функция $f(s)$ имеет полюс. Тогда

$$\int_1^X \bigl|A(u)\bigr|^2 u^{-2}\,du \geqslant c_6 \ln X, \qquad X \geqslant c_7. \tag{7}$$

Замечание 1. Из (6) автоматически вытекает, что $f(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c_5$.

Замечание 2. Постоянные c_6 и c_7 могут быть вычислены, если известна эффективная оценка сверху для максимума модуля $f(s)$ на какой-либо окружности $\bigl|s - (c_6 + \delta_1 + it_1)\bigr| \leqslant c_6 - 1/2 + \delta_2$, $0 < \delta_1 < \delta_2$, внутри которой не содержится других особых точек $f(s)$, кроме s_1 (согласно условию теоремы 1 такая окружность существует), а также эффективные оценки сверху модулей коэффициентов $|B_k|$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, и снизу – $|B_m|$ в разложении

$$f(s) = \sum_{k=1}^{m} B_k(s - s_1)^{-k} + \sum_{\nu=0}^{\infty} B'_\nu (s - s_1)^\nu$$

в окрестности точки s_1.

Следствие 1. *Существуют эффективные постоянные c_8–c_{11} такие, что при $X > c_8$ выполняются неравенства*

$$\int_1^X \big(\psi(u)-u\big)^2 u^{-2}\,du \geqslant c_9 \ln X, \tag{8}$$

$$\int_1^X M^2(u) u^{-2}\,du \geqslant c_{10} \ln X, \tag{9}$$

$$\int_1^X B^2(u) u^{-2}\,du \geqslant c_{11} \ln X, \tag{10}$$

где $B(u) = \sum_{n\leqslant u} b_n$, $b_n = n^{-1}\sum_{d/n} d\mu(n/d)$.

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливы интегральные представления

$$\begin{aligned} s^{-1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1} &= \int_1^{+\infty} \big(x-\psi(x)\big)x^{-s-1}\,dx,\\ \frac{1}{s\zeta(s)} &= \int_1^{+\infty} M(x)x^{-s-1}\,dx, \\ \frac{\zeta(s+1)}{s\zeta(s)} &= \int_1^{+\infty} B(x)x^{-s-1}\,dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Для функций $x-\psi(x)$, $M(x)$, $B(x)$ выполнено условие (6) теоремы 1 с $c_5 = 1$. В качестве $s_1 = 1/2 + it_1$ можно взять первый нуль функции $\zeta(s)$ на луче $\{\operatorname{Re} s > 1/2,\ \operatorname{Im} s > 0\}$. Он является простым, $14 < t_1 < 15$, других нулей $\zeta(s)$ при $\big|s-(1+it_1)\big| \leqslant 1/2$ не имеет и даже не имеет нулей, отличных от s_1 внутри круга $\big|s-(2+it_1)\big| \leqslant 2$ (см. [5]). На границе этого круга можно дать оценки $\big|\zeta(s)\big| \geqslant c_{12}$, $\big|\zeta'(s)\big| \leqslant c_{13}$ (следовательно, $\big|\operatorname{Re} s/\zeta(s)\big|_{s=1/2+it_1}\big| = \big|1/\zeta'(1/2+it_1)\big| \geqslant 1/c_{13}$) с эффективными постоянными c_{12} и c_{13}. Таким образом, для функций, стоящих в обеих частях равенств (11) все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому неравенства (8)–(10) являются частным случаем (7). Следствие доказано.

Если $\theta > 1/2$, то можно доказать еще более сильные неравенства.

Теорема 2. *Пусть A – одна из трех функций Δ, B, M, $F(x) = \int_1^X \big|A(u)\big|^2 u^{-2}\,du$. Тогда если $\theta > 1/2$, то при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{X\to+\infty} F(X)X^{\varepsilon+1-2\theta} = +\infty.$$

Замечание 3. В отличие от теоремы 1, теорема 2 является неэффективной. Для $\varepsilon < 2\theta - 1$ мы не можем указать $X_0(\varepsilon, \theta)$ такое, что при всех $X > X_0$ выполняется неравенство $F(X) > X^{2\theta-1-\varepsilon}$. Эффективизация теоремы 2 позволила бы получить алгоритм оценки θ с любой наперед заданной точностью, на что в настоящее время мало надежды. К тому же, если окажется, что $\theta = 1/2$, то теорема 2 будет бесполезной.

Мы предполагаем вывести теоремы 1 и 2 из общей тауберовой теоремы для интегралов Лапласа.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha\colon [0, +\infty) \to C$ *и при любом* $x > 0$

$$V(x) = \operatorname{var} \alpha(u)\big|_0^x \leqslant c_{14} \exp(Cx), \qquad C > 0. \tag{12}$$

Пусть затем относительно функции[1]

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, d\alpha(x) \tag{13}$$

известно, что при некотором $R > C$ *она допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого полукруга* $\bigl\{|s - (R + it_1)| \leqslant R,\ \operatorname{Re} s \leqslant R\bigr\}$ *с выколотой точкой* $s_1 = it_1$, *а в точке* s_1 *функция* $G(s)$ *имеет полюс порядка* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $Y > c_{15}$ *справедливо неравенство*

$$V(Y) - V(\lambda Y) > c_{16} Y^m,$$

где $\lambda = (1-\delta)^2(1+\beta)^{-1}$, *а* $\delta \in (0,1)$ *и* $\beta \in (0, +\infty)$ – *произвольные числа, удовлетворяющие условиям*

$$\frac{\delta + \ln(1-\delta)}{\delta - 1} > \frac{C}{R}, \qquad \frac{\beta - \ln(1+\beta)}{1+\beta} > \frac{C}{R}. \tag{14}$$

Замечание 4. Числа δ и β, удовлетворяющие условиям (14) всегда найдутся, поскольку $C/R < 1$, а

$$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{\beta - \ln(1+\beta)}{1+\beta} = 1, \qquad \lim_{\delta \to 1-0} \frac{\delta + \ln(1-\delta)}{\delta - 1} = +\infty.$$

Замечание 5. Постоянные c_{15} и c_{16} эффективно зависят от $c_{14}, C, R, \delta, \beta, m$, коэффициентов при отрицательных $s - s_1$ Лоранова разложения $G(s)$ в окрестности s_1 и максимума модуля $G(s)$ на какой-либо окружности $\bigl|s - (R + it_1)\bigr| = R + c_{17}$, внутри которой у $G(s)$ нет особых точек, кроме s_1.

---

[1] Из (12) немедленно вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ интеграл (13) равномерно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > C + \varepsilon$, и, следовательно, функция $G(s)$ аналитична в области $\operatorname{Re} s > C$.

Замечание 6. Если $\eta \in (0,1)$, $C \leqslant \eta^2 R/27$, то нетрудно проверить, что (14) выполняется для $\delta = \beta = \eta/3$, и следовательно, $\lambda \geqslant 1-\eta$.

Выведем теорему 1 из теоремы 3. Функция $G(s) = f(s+1/2)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c_5 - 1/2$ может быть выражена интегралом

$$G(s) = \int_0^{+\infty} A(e^x) e^{-x/2} e^{-sx}\, dx \equiv \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, d\alpha(x),$$

где $\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x A(e^t) e^{-t/2}\, dt$,

$$V(x) = \int_0^x \bigl|A(e^t)\bigr| e^{-t/2}\, dt = \int_1^{e^x} \bigl|A(u)\bigr| u^{-3/2}\, du.$$

Нетрудно убедиться в том, что выполнение условия теоремы 3 с $C = c_5 - 1/2$ и некоторым $R > C$. Поэтому по теореме 3 находим

$$V(Y) - V(\lambda Y) = \int_{\exp(\lambda Y)}^{\exp Y} \bigl|A(u)\bigr| u^{-3/2}\, du \geqslant c_{16} Y, \qquad Y > c_{15},$$

или, что то же самое,

$$\int_{X^\lambda}^{X} \bigl|A(u)\bigr| u^{-3/2}\, du \geqslant c_{16} \ln X, \qquad X > c_{18}. \tag{15}$$

Отсюда, используя неравенство Коши, получаем

$$(c_{16} \ln X)^2 \leqslant \left(\int_1^X \bigl|A(u)\bigr| u^{-3/2}\, du \right)^2 \leqslant \int_1^X \bigl|A(u)\bigr|^2 u^{-2}\, du \cdot \int_1^X u^{-1}\, du.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_1^X \bigl|A(u)\bigr|^2 u^{-2}\, du \geqslant (c_{16})^2 \ln X$, $X > c_{18}$, а это и требовалось доказать.

Неравенство (15) позволяет также получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы* 1 $c_5 = 1$ *и в области*

$$\bigl\{ s \in C \mid \operatorname{Re} s > 1/2,\ \bigl|\operatorname{Im}(s - s_1)\bigr| \leqslant T \bigr\}, \qquad T \geqslant 48,$$

функция $f(s)$ *не имеет особых точек. Тогда при любых* $Q > c_{19}$ $\exists x \in [Q, Q^{1+4/T}]$ *такое, что* $\bigl|A(x)\bigr| \geqslant c_{20}\sqrt{x}$.

В настоящее время [6] доказано отсутствие нулей $\zeta(s)$ в полуполосе $\bigl\{\operatorname{Re} s > 1/2,\ |\operatorname{Im} s| \leqslant 5 \cdot 10^8\bigr\}$. Поэтому теорема 4 и интегральные представления (11) приводят нас к следующей теореме.

Теорема 5. *При любом* $Q > c_{21}$

$$\exists\, x_j \in \bigl[Q, Q^{1+10^{-8}}\bigr], \qquad j = 1, 2, 3,$$

такие, что

$$\bigl|B(x_1)\bigr| \geqslant c_{22}\sqrt{x_1}, \qquad \bigl|M(x_2)\bigr| \geqslant c_{23}\sqrt{x_2}, \qquad \bigl|\psi(x_3) - x_3\bigr| \geqslant c_{24}\sqrt{x_3}.$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно взять $R = T^2 + 1/4$. Тогда в круге $\bigl|s - (R + 1/2 + it_1)\bigr| \leqslant R$ нет особых точек $f(s)$, кроме $s_1 = 1/2 + it_1$, поскольку все точки этого круга, за исключением s_1, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$, причем при $1/2 < \sigma \leqslant 1$, $s = \sigma + it$, имеем $(t - t_1)^2 + (R + 1/2 - \sigma)^2 \leqslant R^2$, откуда

$$(t - t_1)^2 \leqslant R^2 - (R - 1/2)^2 = R - 1/4 = T^2.$$

Но при таких t функция $f(\sigma + it)$ не имеет особых точек по условию теоремы 4, а при $\operatorname{Re} s > 1$ $f(s)$ не имеет особых точек по условию теоремы 1. Следовательно, справедлива оценка (15) с

$$\lambda = 1 - \eta = 1 - \sqrt{27C/R} = 1 - \sqrt{13.5/(T^2 + 1/4)} > 1 - \sqrt{13.5}/T.$$

Положим $X^\lambda = Q$, тогда $X = Q^{1/\lambda} < Q^{1+4/T}$ при $T \geqslant 48$. Из (15) непосредственно вытекает, что для $\forall\, u \in [X^\lambda, X]$ неравенство

$$\bigl|A(u)\bigr| < c_{16}\frac{\sqrt{u}}{1 - \lambda}$$

не может быть выполнено. Следовательно, существует $x \in [Q, Q^{1+4/T}]$ такое, что $|A(x)| > c_{20}\sqrt{x}$.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$0 < \eta < \min(\theta - 1/2, \varepsilon/3), \qquad R = 13.5/\eta^2. \tag{16}$$

Покажем, что существует такой нуль $s_1 = \sigma_1 + it_1$ дзета-функции, что $\sigma_1 \geqslant \theta - \eta$ и ζ не имеет других нулей в круге $D = \bigl\{|s - (R + \sigma_1 + it_1)| \leqslant R\bigr\}$. Для этого возьмем такой произвольный нуль $\sigma_0 + it_0$ дзета-функции, что $\sigma_0 \geqslant \theta - \eta$. В силу (16) $\theta - \eta > 1/2$, поэтому мы можем воспользоваться плотностной теоремой [6], согласно которой количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$, $\operatorname{Re} s \geqslant \theta - \eta$, есть $o(T)$ при $T \to +\infty$. Значит при некотором $k > |t_0|$ прямоугольник $k \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant k + R$, $\operatorname{Re} s \geqslant \theta - \eta$ свободен от нулей ζ. Отсюда следует, что если $\zeta(\sigma + it) = 0$, $\sigma \geqslant \theta - \eta$ и $|t| > k$, то $|t| > k + R$. Среди нулей дзета-функции в прямоугольнике $|\operatorname{Im} s| \leqslant k$, $\operatorname{Re} s \geqslant \theta - \eta$ выберем нуль $s_1 = \sigma_1 + it_1$ с наибольшей действительной частью и проверим, что он – искомый. Действительно, $\sigma_1 \geqslant \sigma_0 \geqslant \theta - \eta$. Далее, если круг D содержит другой нуль $s = \sigma + it$ дзета-функции, то $\sigma > \sigma_1$, откуда в силу выбора s_1 получаем $|t| > k$ и значит, $|t| > k + R$, но тогда $\bigl|s - (R + \sigma_1 + it_1)\bigr| \geqslant |t - t_1| > R$, т.е. $s \notin D$.

Далее мы рассуждаем так же, как и при доказательстве теоремы 1. Как уже отмечалось, в условиях теоремы 2 неравенство (6) выполнено с $c_5 = 1$, поэтому представления (11) справедливы при $\operatorname{Re} s > 1$. Отсюда следует, что функция

$$G(s) = f(s + \sigma_1), \quad \text{где} \quad \rho(s) = \int_1^{+\infty} A(x) x^{-s-1}\, dx$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 - \sigma_1$ выражается интегралом

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, d\alpha(x),$$

где $\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x A(e^t) e^{-\sigma_1 t}\, dt$. При этом

$$V(x) = \int_1^{e^x} \bigl|A(u)\bigr| u^{-1-\sigma_1}\, du$$

и условия теоремы 3 выполнены с $C = 1 - \sigma_1 < 1/2$ и R, заданным соотношением (16). В силу замечания 6 для $\lambda = 1 - \eta$, аналогично неравенству (15), получаем

$$\int_{X^\lambda}^{X} \bigl|A(u)\bigr| u^{-1-\sigma_1}\, du \geqslant c_{16} \ln X \qquad (X > c_{18}).$$

Используя неравенство Коши при $X > c_{18}$ находим

$$(c_{16} \ln X)^2 \leqslant \int_{X^\lambda}^{X} \bigl|A(u)\bigr|^2 u^{-2}\, du \int_{X^\lambda}^{X} u^{-2\sigma_1}\, du. \tag{17}$$

Оценим последний интеграл в (17):

$$\int_{X^\lambda}^{X} u^{-2\sigma_1}\, du \leqslant c_{25} X^{-\mu},$$

где $\mu = \lambda(2\sigma_1 - 1) \geqslant (1 - \eta)(2\theta - 1 - 2\eta) \geqslant 2\theta - 1 - 3\eta \geqslant 2\theta - 1 - \varepsilon$. Поэтому из (17) следует, что

$$\int_{X^\lambda}^{X} \bigl|A(u)\bigr|^2 u^{-2}\, du \geqslant (c_{16} \ln X)^2 c_{25}^{-1} X^{2\theta - 1 - \varepsilon}.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству центрального результата – теоремы 3. Сперва нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $q \in (0,1)$, *а* $\beta \in (0,+\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\beta - \ln(1+\beta)}{1+\beta} > q. \tag{18}$$

Тогда при некотором $q_1 < 1$ *и любом* $n \in \mathbb{N}$, $n > c_{26}$ (c_{26} *и* q_1 *эффективно зависят от* β *и* q) *справедливо неравенство*

$$J_n = \int_{n(1+\beta)}^{+\infty} u^n \exp\bigl((q-1)u\bigr)\,du < n!\,q_1^n.$$

Доказательство. Сделав замену переменного $u(1-q) = x$, находим

$$J_n = (1-q)^{-n-1} J_n', \tag{19}$$

где

$$J_n' = \int_{Bn}^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx, \qquad B = (1+\beta)(1-q).$$

Заметим, что вследствие (18) $B > 1 + \ln(1+\beta) > 1$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
J_n' &= (Bn)^{n+1} \int_1^{+\infty} y^n e^{-Bny}\,dy \\
&= (Bn)^{n+1} e^{-Bn} \int_1^{+\infty} y^n \exp\bigl(-Bn(y-1)\bigr)\,dy \\
&< (Bn)^{n+1} e^{-Bn} \int_1^{+\infty} y^n \exp\bigl(-n(y-1)\bigr)\,dy \\
&= B^{n+1} e^{n(1-B)} n^{n+1} \int_1^{+\infty} y^n e^{-ny}\,dy \\
&= B^{n+1} e^{n(1-B)} \int_n^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \\
&< Bn! \exp\bigl(n(1-B+\ln B)\bigr).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) находим

$$J_n < c_{27} n! \exp(\gamma n), \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma &= 1 - B + \ln B - \ln(1-q) = 1 - B + \ln(1+\beta) \\
&= q - \beta + q\beta + \ln(1+\beta) = (1+\beta)\left(q - \frac{\beta - \ln(1+\beta)}{1+\beta}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство вместе с (21) доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть w – неубывающая на $[0,+\infty)$ функция, $w(0)=0$, а при всех $x>0$ с некоторым $q\in(0,1)$ выполняется оценка*

$$w(x)\leqslant c_{28}\exp(qx). \tag{22}$$

Пусть затем $\beta\in(0,+\infty)$ и $\delta\in(0,1)$ (см. выше замечание 4) удовлетворяют условиям

$$\frac{\beta-\ln(1+\beta)}{1+\beta}>q,\qquad \frac{\delta+\ln(1-\delta)}{\delta-1}>q.$$

Тогда при некотором $q_2<1$ и любых $n\in\mathbb{N}$, $n>c_{29}$ (постоянные c_{29} и q_2 эффективно зависят от c_{28}, q, δ и β) справедливы неравенства

$$\int_{E_n}u^ne^{-u}\,dw(u)\leqslant n!\,q_2^n, \tag{23}$$

где $E_n=\bigl[0,n(1-\delta)\bigr]\cup\bigl[n(1+\beta),+\infty\bigr)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_{E_n}u^ne^{-u}\,dw(u)=\int_0^{n(1-\delta)}u^ne^{-u}\,dw(u)+\int_{n(1+\beta)}^{+\infty}u^ne^{-u}\,dw(u)\\
&=u^ne^{-u}w(u)\big|_0^{n(1-\delta)}-\int_0^{n(1-\delta)}w(u)\,d(u^ne^{-u})\\
&\quad+u^ne^{-u}w(u)\big|_{n(1+\beta)}^{+\infty}-\int_{n(1+\beta)}^{+\infty}w(u)\,d(u^ne^{-u})\\
&\leqslant u^ne^{-u}w(u)\big|_{u=n(1-\delta)}-\int_{n(1+\beta)}^{+\infty}w(u)\,d(u^ne^{-u}).
\end{aligned}\tag{24}$$

Последнее неравенство в (24) получилось после отбрасывания заведомо неположительных слагаемых. Мы используем неравенство $w(u)\geqslant 0$, а также то обстоятельство, что функция u^ne^{-u} возрастает на промежутке $[0,n]$ и убывает на $[n,+\infty)$. Из (22) и(24) находим

$$\begin{aligned}
I_n&\leqslant c_{28}u^ne^{(q-1)u}\big|_{u=n(1-\delta)}+\int_{n(1+\beta)}^{+\infty}c_{28}e^{qu}\,d(-u^ne^{-u})\\
&=c_{28}\Bigl(\bigl(n(1-\delta)\bigr)^ne^{(q-1)(1-\delta)n}+\bigl(n(1+\beta)\bigr)^ne^{(q-1)(1+\beta)n}\Bigr)\\
&\quad+c_{28}q\int_{n(1+\beta)}^{+\infty}u^ne^{(q-1)u}\,du.
\end{aligned}\tag{25}$$

Из (25) и очевидного неравенства $n^n<n!\,e^n$ получаем

$$I_n\leqslant c_{28}n!\bigl(\exp(\gamma_1n)+\exp(\gamma_2n)\bigr)+c_{28}J_n, \tag{26}$$

где J_n – интеграл из леммы 1,

$$\gamma_1 = 1 + (q-1)(1-\delta) + \ln(1-\delta),$$
$$\gamma_2 = 1 + (q-1)(1+\beta) + \ln(1+\beta).$$

Так же, как и доказательстве леммы 1 проверяются неравенства $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 < 0$. Поэтому из (26) и леммы 1 следует (23). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. При $\operatorname{Re} s > C$ имеем

$$G^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^n e^{-sx}\, d\alpha(x). \tag{27}$$

Положим $\xi = R + it_1$. Из (27) находим

$$\bigl|G^{(n)}(\xi)\bigr| \leqslant \int_0^{+\infty} x^n e^{-Rx}\, dV(x). \tag{28}$$

Поскольку $G(s)$ аналитична при $|s-\xi| \leqslant R$, $s \neq s_1$, то это значит, что G аналитична в некотором большем круге $|s-\xi| \leqslant R + c_{17}$ с выколотой точкой s_1. Обозначим через $G^-(s)$ часть Лоранова разложения функции $G(s)$ в окрестности точки s_1, состоящую из отрицательных степеней $s - s_1$. Другими словами,

$$\begin{gathered} G^-(s) = \sum_{k=1}^{m} B_k (s-s_1)^{-k}, \qquad B_m \neq 0, \\ G_1(s) = G(s) - G^-(s) \in \mathscr{A}\bigl(|s-\xi| \leqslant R + c_{17}\bigr). \end{gathered} \tag{29}$$

Имеем очевидные соотношения

$$\begin{gathered} \bigl|G_1^{(n)}(\xi)\bigr| \leqslant \frac{c_{30} n!}{(R+c_{11})^n}; \qquad c_{30} = \max_{|s-\xi|=R+c_{17}} \bigl|G_1(s)\bigr|; \\ G^{-(n)}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^n B_k \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} (\xi - s_1)^{-k-n}. \end{gathered} \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает неравенство

$$\bigl|G^{(n)}(\xi)\bigr| > c_{31} R^{-n} n!\, n^{m-1}, \qquad n > c_{32}. \tag{31}$$

При этом постоянные c_{31} и c_{32} эффективно зависят от c_{17}, R, c_{30}, от оценки снизу для $|B_m|$ и оценок сверху для $|B_k|$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Сделав замену $x = u/R$ в интеграле (28), с учетом (31) находим

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, dV(u/R) > c_{31} n!\, n^{m-1}, \qquad n > c_{32}. \tag{32}$$

Для функции $w(u) = V(u/R)$ выполнены все условия леммы 2 с $q = C/R \in (0,1)$. Поэтому (см. (23) и (14))

$$\int_{E_n} u^n e^{-u}\,dV(u/R) \leqslant n!\,q_2^n, \qquad n > c_{29}. \tag{33}$$

Сравнивая оценки (32) и (33), приходим к неравенству

$$\int_{n(1-\delta)}^{n(1+\beta)} u^n e^{-u}\,dV(u/R) > c_{33} n!\,n^{m-1}, \qquad n > c_{34},$$

или, что то же самое,

$$\int_{n(1-\delta)/R}^{n(1+\beta)/R} x^n e^{-Rx}\,dV(x) > c_{33} R^{-n} n!\,n^{m-1}, \qquad n > c_{34}. \tag{34}$$

Теперь из неравенств (34) получим утверждение теоремы 3. Для $Y > 0$ через $K(Y)$ обозначим отрезок

$$K(Y) = \big[\lambda Y R/(1-\delta), RY/(1+\beta)\big].$$

Поскольку $\lambda = (1-\delta)^2(1+\beta)^{-1}$, то

$$K(Y) = \big[(1-\delta)Y_1, Y_1\big], \quad \text{где} \quad Y_1 = \frac{RY}{1+\beta}.$$

Легко сообразить, что если $n \in K(Y)$, то

$$\lambda Y \leqslant \frac{n(1-\delta)}{R} < \frac{n(1+\beta)}{R} \leqslant Y, \tag{35}$$

и при $Y > c_{35}$ в отрезке $K(Y)$ лежат только числа $n > c_{34}$. Поэтому, ввиду (34) и (35) при $Y > c_{35}$ и любом $n \in K(Y)$ имеем

$$\int_{\lambda Y}^{Y} x^n e^{-Rx}\,dV(x) \geqslant c_{33} R^{-n} n!\,n^{m-1}. \tag{36}$$

Умножим обе части неравенств (36) на $R^n/n!$ и просуммируем их по всем $n \in K(Y)$. Получим

$$\int_{\lambda Y}^{Y} \bigg(\sum_{n\in K(Y)} \frac{(xR)^n}{n!}\bigg) e^{-Rx}\,dV(x) \geqslant c_{33} \sum_{n\in K(Y)} n^{m-1}. \tag{37}$$

Очевидно, что

$$\sum_{n\in K(Y)} \frac{(xR)^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xR)^n}{n!} = e^{Rx}, \tag{38}$$

$$\sum_{n\in K(Y)} n^{m-1} > (\delta Y_1 - 1)\big((1-\delta)Y_1\big)^{m-1} > c_{36}Y^m.$$

Из (37)–(39) находим

$$\int_{\lambda Y}^{Y} dV(x) > c_{36}Y^m, \qquad Y > c_{35}.$$

Теорема 3 доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 01.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Walfisz A. Weylsche exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. Berlin, 1963.
[2] Ellison W. Mendes France M. Les nombres premiers. Paris, 1975.
[3] Карацуба А. А. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. №5. С. 81–140.
[4] Cramer H. Ein Mittelwertsatz der Primzahltheorie // Mat. Zeitschrift. 1922. V. 12. P. 147–153.
[5] Titchmarsh E. The theory of the Rieman Zeta-function. Second Edition. Oxford, 1986.
[6] Рибенбойм А. М. Рекорды простых чисел // УМН. 1987. Т. 42. №5. С. 119–176.