А. Ю. Попов, О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии, *Матем. заметки*, 1989, том 46, выпуск 3, 68–73

Математические заметки

т. 46, № 3 (1989)

О ФУНКЦИЯХ, ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ В ТОЧКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

А. Ю. Попов

В теории аналитических функций доказан ряд теорем о том, что целые функции, не являющиеся многочленами и принимающие целочисленные значения в некоторых последовательностях точек, не могут обладать ростом, меньшим некоторого. В настоящей работе рассматриваются функции, целочисленные в точках некоторых геометрических прогрессий.

В [1] А. О. Гельфонд доказал для $\beta \in \mathbf{N}$, $\beta \neq 1$, два утверждения:

1) все целые функции g, удовлетворяющие условиям

А. если $n \in \mathbf{N}$, то $g(\beta^n) \in \mathbf{Z}$;

Б. если $z \neq 0$, то

$$|g(z)| \leqslant \varepsilon(|z|)\,|z|^{-1/2} \exp(\ln^2|z|/4\ln\beta), \tag{1}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \varepsilon(|z|) = 0,$$

являются многочленами;

2) существует целая функция φ, не являющаяся многочленом, такая, что $\varphi(\beta^n) \in \mathbf{Z}\ \forall n \in \mathbf{N}$ и

$$|\varphi(z)| = O(|z|^{-1/2} \exp(\ln^2|z|/4\ln\beta)). \tag{2}$$

Приведенная теорема является довольно точной, но все же между оценками (1) и (2) имеется некоторый зазор. Насколько известно автору, этот результат впоследствии не улучшался, хотя общей интерполяционной задачей

$$g(\beta^n) = b_n,\quad \beta \in \mathbf{C},\quad |\beta| > 1, \tag{3}$$

занимался ряд авторов (см. [2, 3]), возвращался к ней и сам А. О. Гельфонд ([4, 5]).

Особо следует отметить интересный подход к задаче (3), найденный Ю. А. Казьминым в [2]. Им были получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность $\{b_n\}$, для разрешимости задачи (3) в разумно выбранных классах целых функций. В рассматриваемой задаче ($g(\beta^n) \in \mathbf{Z}$) эти методы применить не удается, поскольку они не работают для функций, растущих слишком медленно, как в (1) и (2). В настоящей работе приведенный выше результат А. О. Гельфонда усилен и доведен до неулучшаемого. Автор, в основном, следует методам работы [1], используя разложения функций в ряды Ньютона. Усиление получается за счет более точных оценок и видоизменения конструкции построения примера, составляющего содержание теоремы 2. Доказаны следующие две теоремы.

Пусть $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}_\mathbf{K}$ — кольцо целых чисел поля $\mathbf{K}$. Положим также при $\beta \in \mathbf{C}$, $|\beta| > 1$,

$$\varkappa = \varkappa(\beta) = \prod_{s=1}^{\infty} (1 - \beta^{-s})^{-1}, \tag{4}$$

$$a(R) = a(R, \beta) = \{\ln R/2 \ln |\beta|\}, \quad R > 1, \tag{5}$$

$$u(R) = u(R, \beta) = |\varkappa| |\beta|^{a(R) - a^2(R)}, \tag{6}$$

где, как обычно, $\{x\}$ обозначает дробную часть действительного числа x.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\beta \in \mathbf{Z}_\mathbf{K}$, $|\beta| > 1$, *а* g — *такая целая функция, что* $g(\beta^n) \in \mathbf{Z}_\mathbf{K}$ *при любом* $n \in \mathbf{N}$. *Пусть также существуют* $\delta > 0$ *и последовательность* $\{R_\nu\}$ *такие, что при* $\nu > \nu_0$ *выполнены неравенства*

$$|\beta|^{2\nu} \leqslant R_\nu < |\beta|^{2\nu+2}, \tag{7}$$

$$\max_{|z| \leqslant R_\nu} |g(z)| \leqslant (u(R_\nu) - \delta) R_\nu^{-1/2} \exp(\ln^2 R_\nu / 4 \ln |\beta|). \tag{8}$$

Тогда g — *многочлен.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 5^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{9}$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z), \text{ где } \varphi_k(z) = \beta^{-k(k+1)/2} \prod_{s=1}^{k} \left(\frac{z - \beta^s}{\beta^s - 1} \right).$$

Тогда

1) φ — *целая функция, не являющаяся многочленом, и при любом* $n \in \mathbf{N}$ $\varphi(\beta^n) \in \mathbf{Z}_\mathbf{K}$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $R > R_0(\varepsilon)$

$$\max |\varphi(z)| \leqslant (u(R) + \varepsilon) R^{-1/2} \exp(\ln^2 R/4 \ln |\beta|).$$

Для доказательства теорем нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Положим при $n \in \mathbf{N}$, $k = 0, \ldots, n$

$$B_n^k(t) = \prod_{s=n-k+1}^{n} (1 - t^s) \Big/ \prod_{s=1}^{k} (1 - t^s)$$

(пустое произведение считаем равным единице).

ЛЕММА 1. *При любом* $n \in \mathbf{N}$, $k = 0, \ldots, n$ $B_n^k(t)$ — *многочлен с целыми рациональными коэффициентами от переменной* t.

ЛЕММА 2. *Если целая функция g удовлетворяет неравенству*

$$|g(z)| < A \exp(\omega \ln^2 |z|),\ A > 0,\ \omega < {}^1/_2 \ln|\beta|,\ |\beta| > 1,$$

то она разлагается в сходящийся при всех $z \in \mathbf{C}$ ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \prod_{s=1}^{n} (z - \beta^s),$$

где $$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r>|\beta|^{n+1}} g(\zeta) \prod_{s=1}^{n+1} (\zeta - \beta^s)^{-1}\, d\zeta.$$

Леммы 1 и 2 доказаны в работе [1].

ЛЕММА 3. *Если* $\alpha \in \mathbf{Z_K}$, $\alpha \neq 0$, *то* $|\alpha| \geqslant 1$.

Лемма общеизвестна.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\beta \in \mathbf{C}$, $|\beta| > 1$, $\eta_s = O(1)$, N_1, $N_2 \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$\prod_{s=N_1}^{N_2} (1 - \beta^{-s}\eta_s) = 1 + O(|\beta|^{-N_1})$$

равномерно по всем $N_2 \geqslant N_1$.

Доказательство. 1) $\exists s_0$: $N_1 \leqslant s_0 \leqslant N_2$, такое, что $|\beta^{-s_0}\eta_{s_0}| > 1/2$. Тогда ввиду условий леммы $s_0 \leqslant c_1$, где c_1 — некоторая постоянная, следовательно, $N_1 \leqslant c_1$. Поскольку $\prod_{s=1}^{\infty} (1 - \beta^{-s}\eta_s)$ сходится, то, полагая

$$c_2 = \sup_{N_3,\, N_4} \prod_{s=N_3}^{N_4} |1 - \beta^{-s}\eta_s|,$$

получаем утверждение леммы с постоянной в символе O, равной $(1 + c_2)|\beta|^{c_1}$.

2) При всех $s \geqslant N_1$ $|\beta^{-s}\eta_s| \leqslant 1/2$. Тогда $1 - \beta^{-s}\eta_s = \exp\ln(1 - \beta^{-s}\eta_s)$, где $\ln(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n = O(|z|)$, $|z| \leqslant 1/2$. Поэтому

$$\prod_{s=N_1}^{N_2} (1 - \beta^{-s}\eta_s) = \exp \sum_{s=N_1}^{N_2} \ln(1 - \beta^{-s}\eta_s) =$$

$$= \exp \sum_{s=N_1}^{N_2} O(|\beta^{-s}\eta_s|) = \exp(O(|\beta|^{-N_1}))$$

равномерно по $N_2 \geqslant N_1$. Отсюда получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательствам теорем.

Доказательство теоремы 1. Оценим сверху величины A_ν из леммы 2. (Наша функция g, очевидно, удовлетворяет условию леммы.) Интегрирование будем вести по окружностям $|z| = R_\nu$. (В силу (7) при $\nu > \nu_0$ $R_\nu > |\beta|^{\nu+1}$.) Тогда

$$|A_\nu| \leqslant R_\nu \max_{|z|=R_\nu} \left(|g(z)| \prod_{s=1}^{\nu+1} |z - \beta^s|^{-1}\right).$$

Вследствие (5) и (7) при $|z| = R_\nu$ $z = R_\nu e^{i\theta} = |\beta|^{2\nu+2a(R_\nu)} e^{i\theta}$, $\theta \in \in [0, 2\pi)$. Отсюда и из леммы 4 находим

$$\prod_{s=1}^{\nu+1} |z - \beta^s| = R_\nu^{\nu+1} \prod_{s=1}^{\nu+1} |1 - \beta^{s-2\nu-2a(R_\nu)} e^{-i\theta}| =$$

$$= R_\nu^{\nu+1} \prod_{s=\nu-1}^{2\nu-1} |1 - \beta^{-s-2a(R_\nu)} e^{-i\theta}| = R_\nu^{\nu+1} (1 + O(|\beta|^{-\nu})).$$

Отсюда, учитывая (8), находим, что существует такое $\delta_1 > 0$, что при $\nu > \nu_1$

$$|A_\nu| < R_\nu^{-\nu-1/2} (u(R_\nu) - \delta_1) \exp(\ln^2 R_\nu / 4 \ln|\beta|). \tag{10}$$

Из соотношений (4)—(7) и неравенства (10) выводим

$$|A_\nu| < (|\varkappa| - \delta_2) |\beta|^{-\nu^2-\nu}, \qquad \delta_2 > 0, \quad \nu > \nu_2. \tag{11}$$

По теореме о вычетах

$$A_\nu = \sum_{k=1}^{\nu+1} g(\beta^k) \prod_{s=1,\ s\neq k}^{\nu+1} (\beta^k - \beta^s)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu+1} g(\beta^k)(-1)^{1-k} \beta^{-k(k-1)/2+k(\nu+1-k)} \prod_{s=1}^{k-1} (1 - \beta^s)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{s=1}^{\nu+1-k} (1 - \beta^s)^{-1} = \prod_{s=1}^{\nu} (1 - \beta^s)^{-1} \sum_{k=1}^{\nu+1} g(\beta^k)(-1)^{k-1} \cdot$$

$$\cdot \beta^{-k\nu+(k^2-k)/2} B_\nu^{k-1}(\beta).$$

Положим $\Omega_\nu = \beta^{\nu(\nu+1)/2} \prod_{s=1}^{\nu} (\beta^s - 1)$. Поскольку $\nu(\nu + 1)/2 - k\nu + k(k-1)/2 = (\nu - k)(\nu + 1 - k)/2$ есть целое неотрицательное число при $1 \leqslant k \leqslant \nu + 1$, $\nu \in \mathbf{N}$, $B_\nu^{k-1}(\beta) \in \mathbf{Z_K}$ по лемме 1, $g(\beta^k) \in \mathbf{Z_K}$ по условию теоремы, то

$$A_\nu \Omega_\nu \in \mathbf{Z_K}. \tag{12}$$

По лемме 4

$$|\Omega_\nu| = |\beta|^{\nu(\nu+1)} \prod_{s=1}^{\nu} |1 - \beta^{-s}| = |\varkappa^{-1}| |\beta|^{\nu(\nu+1)} (1 + O(|\beta|^{-\nu})).$$

Отсюда и из (11) находим, что существует такое $\delta_3 > 0$, что при $\nu > \nu_3$ $|A_\nu \Omega_\nu| < 1 - \delta_3$. Эта оценка вместе с (12) и леммой 3 дает $A_\nu \Omega_\nu = 0$, $\nu > \nu_3$, а так как $\Omega_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, то

$$A_\nu = 0, \ \nu > \nu_3. \tag{13}$$

По лемме 2 имеем $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \prod_{s=1}^{\nu} (z - \beta^s)$. Следовательно, ввиду (13) функция g есть многочлен. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Ряд Ньютона для функции φ равномерно сходится на любом ограниченном множестве и содержит бесконечно много отличных от тождественного нуля слагаемых. Поэтому функции φ целая и не является многочленом:

$$\varphi(\beta^n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \beta^{-k(k+1)/2} \frac{(\beta^n-\beta)\cdot\ldots\cdot(\beta^n-\beta^k)}{(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta^k-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{(\beta^n-1)\cdot\ldots\cdot(\beta^{n-k}-1)}{(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta^k-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_{n-1}^k(\beta) \in \mathbf{Z}_\mathbf{K}.$$

Тем самым первая часть теоремы доказана. Докажем вторую. Пусть $|z| = R > |\beta|^2$ и $m \in \mathbf{N}$, $\theta \in [0, 2)$ таковы, что

$$R = |\beta|^{2m+\theta}, \quad \theta = 2a(R). \tag{14}$$

Разобьем ряд для $\varphi(z)$ на четыре слагаемых: $\varphi(z) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, $S_j = \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \varphi_k(z)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = [m/2]$, $m_3 = [3m/2]$, $m_4 = 2m$, $m_5 = \infty$. Из (14) и леммы 4 при $|z| = R$ находим

$$\prod_{s=2m}^{k} \left| \frac{z-\beta^s}{\beta^s-1} \right| = O(1), \qquad k > 2m, \tag{15}$$

$$|\varphi_k(z)| = |\beta|^{-k(k+1)+2mk+\theta k}(|\varkappa| + O(|\beta|^{-k} + |\beta|^{k-2m})), \quad k < 2m. \tag{16}$$

При $k \in [1, m/2] \cup [3m/2, 2m]$ $2mk - k^2 \leqslant 3m^2/4$, откуда, учитывая (14)—(16), выводим

$$|S_1| + |S_3| + |S_4| = O(R^2 \exp(3 \ln^2 R / 16 \ln|\beta|)). \tag{17}$$

Оценим сверху S_2. Ввиду (9) S_2 содержит не более одного ненулевого слагаемого. Если $S_2 = 0$, то требуемая оценка сверху для $|\varphi(z)|$ доказана. Пусть $S_2 \neq 0$. Тогда найдется $\tau \in [-m/2 - 1, m/2]$ такое, что $a_{m+\tau} = 1$, и

$$S_2 = \varphi_{m+\tau}(z). \tag{18}$$

Из (14), (16) и (18) следует, что $|S_2| = |\varkappa||\beta|^{m^2+(m+\tau)(\theta-1)-\tau^2}(1 + O(|\beta|^{-m/2}))$. Отсюда, пользуясь соотношениями (5) и (14), получаем

$$|S_2| = |\varkappa||\beta|^{a(R)-a^2(R)} R^{-1/2} \exp(\ln^2 R / 4 \ln|\beta|) \cdot$$
$$\cdot |\beta|^{\tau(\theta-1)-\tau^2}(1 + O(|\beta|^{-m/2})).$$

Поскольку $-1 \leqslant \theta - 1 < 1$, а при всех $\alpha \in [-1, 1]$ и $\tau \in \mathbf{Z}$ $\alpha\tau - \tau^2 \leqslant 0$, то, используя определение $u(R)$ (см. (6)), находим

$$|S_2| = u(R) R^{-1/2} \exp(\ln^2 R / 4 \ln|\beta|)(1 + o(1)), \quad R \to \infty. \tag{19}$$

Сравнивая оценки (19) и (17), получаем утверждение 2) теоремы 2. Теорема 2 полностью доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 07.12.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гельфонд А. О. О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии // Мат. сб. 1933. Т. 40, вып. 1. С. 42—47.

[2] Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 4. С. 521—543.

[3] Андриянов В. Л. К вопросу о восстановлении целой функции по значениям в точках $\{\lambda_n\}$ и $\{\pm\lambda_n\}$ // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 3. С. 483—490.

[4] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952.

[5] Гельфонд А. О. О функциях, принимающих целые значения // Математические заметки. 1967. Т. 1, вып. 5. С. 509—513.