Ни Минь Кань, М. Г. Дмитриев, О контрастной структуре типа ступеньки в элементарной задаче оптимального управления, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010, том 50, номер 8, 1381–1392

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2010, том 50, № 8, с. 1381–1392

УДК 519.626

О КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЕ ТИПА СТУПЕНЬКИ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1)]

© 2010 г. Ни Минь Кань*, М. Г. Дмитриев**

(* 200062 Шанхай, Восточно-китайский пед. ун-т, КНР;

** 129226 Москва, ул. В. Пика, 4, Рос. гос. соц. ун-т)

e-mail: mdmitriev@mail.ru; mingkang@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2009 г.

На примере элементарной нелинейной задачи оптимального управления со скалярной дифференциальной связью, с малым параметром при производной и без ограничений на управление, на основе результатов по контрастным структурам в теории сингулярно возмущенных краевых задач показывается возможность появления быстрых внутренних фазовых переходов в оптимальной траектории. Библ. 11.

Ключевые слова: оптимальное управление, нелинейный функционал, сингулярные возмущения, фазовый переход, асимптотические приближения.

ВВЕДЕНИЕ

Контрастной структурой называется решение сингулярно возмущенной задачи для дифференциальных уравнений, имеющее внутренний переходный слой. Вопрос о существовании контрастной структуры для некоторых сингулярно возмущенных задач достаточно хорошо изучен (см., например, [1]–[3]). Такие структуры, очевидно, присутствуют в задачах с явно выраженным фазовым переходом, под которым мы здесь понимаем быстрое изменение переменных состояния. В частности, такого рода эффекты присущи динамическим системам, где поведение близко к разрывным траекториям, например, к системам управления с входными сигналами, близких к импульсным. Более интересные случаи возникают тогда, когда быстрый фазовый переход совершается вследствие характеристик нелинейностей в системе, соответствующих краевых и начальных условий, а также наличия в системе параметров, порождающих различный масштаб скоростей изменения фазовых переменных. Формализация моделей в виде сингулярно возмущенных систем является удобной формой для строгого изучения механизмов самоорганизации в нелинейных системах, в том числе и в вариационных задачах.

Так, в [4] были рассмотрены условия возникновения контрастных структур двух типов: типа ступеньки и типа всплеска для простейшей векторной вариационной задачи с малым параметром. Асимптотика контрастной структуры типа ступеньки для скалярной простейшей вариационной задачи изучалась в [5].

В настоящей работе на примере частного класса классических задач оптимального управления будет показана возможность появления быстрых фазовых переходов в оптимальной траектории, т.е. возможность участия механизма самоорганизации в формировании оптимального решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$J[u] = \int_0^T F(y, u, t)dt \longrightarrow \min_u,$$

$$\mu\frac{dy}{dt} = a(t) + b(t)u, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

$$y(0, \mu) = y^0, \quad y(T, \mu) = y^{т},$$

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-06-00302а).

которая является прототипом классической задачи оптимального управления с закрепленными концами и функционалом Лагранжа в случае, когда собственные движения объекта принадлежат так называемому критическому случаю, т.е. когда собственные значения матрицы собственных движений находятся на мнимой оси. В этом случае большую роль должен играть коэффициент при управлении. Его отличие от нуля порождает свойство управляемости в этой частной линейной системе.

Рассуждения будем проводить с учетом выполнения следующих требований.

I. Пусть функция $F(y, u, t)$ – дважды непрерывно дифференцируема в области $D = \{(y, u, t) \| |y| \le l, u \in R, 0 \le t \le T\}$ и $b(t) > 0$ (здесь l – некоторое положительное число).

II. Пусть $F_{u^2}(y, u, t) > 0$ при $(y, u, t) \in D$.

Введем функцию Гамильтона $H(t, y, u, \lambda) = -F(y, u, t) + \mu^{-1}\lambda(t)[a(t) + b(t)u]$, где $\lambda(t)$ – соответствующая сопряженная переменная, из необходимых условий оптимальности получаем

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

$$\mu\frac{dy}{dt} = a(t) + b(t)u,$$

$$y(0, \mu) = y^0, \quad y(T, \mu) = y^{\text{т}}$$

или

$$\begin{gathered} \mu y' = a(t) + b(t)u, \\ \lambda' = -F_y(y, u, t), \\ \mu F_u(y, u, t) + \lambda b(t) = 0, \\ y(0, \mu) = y^0, \quad y(T, \mu) = y^{\text{т}}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Условия **I** и **II** позволяют получить из (1.2) следующую сингулярно возмущенную краевую задачу для экстремали:

$$\begin{gathered} \mu y' = a(t) + b(t)u, \\ \mu u' = F_{u^2}^{-1}[F_y b(t) - F_{yu}(a(t) + b(t)u) - \mu(F_{ut} + F_u b(t) b'^{-1}(t))], \\ y(0, \mu) = y^0, \quad y(T, \mu) = y^{\text{т}}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Такое представление (1.2) подчеркивает, что и траектория и управление являются быстрыми переменными, т.е. могут содержать зоны быстрого изменения.

Нелинейная задача типа (1.3) рассматривалась в [6], где показана возможность существования решения с контрастной структурой типа ступеньки. На основе анализа экстремали, действуя здесь по схеме из [6], покажем существование оптимальной траектории с контрастной структурой типа ступеньки.

Если в исходной вариационной задаче положить формально $\mu = 0$, то получим вырожденную задачу

$$\begin{gathered} \bar{J} = \int_0^T F(\bar{y}, \bar{u}, t)dt \longrightarrow \min_{\bar{y}, \bar{u}}, \\ 0 = a(t) + b(t)\bar{u}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

(Обращаем внимание, что траектория здесь переходит в разряд управляющих переменных.)

Необходимо выполнять следующее требование.

III. Пусть существуют две непересекающиеся функции $\bar{y} = \phi_1(t)$ и $\bar{y} = \phi_2(t)$ такие, что, во-первых,

$$\min_{\bar{y}} F(\bar{y}, \bar{u}, t) = \begin{cases} F(\phi_1(t), \bar{u}, t), & 0 \le t \le t_0, \\ F(\phi_2(t), \bar{u}, t), & t_0 \le t \le T, \end{cases}$$

и, во-вторых, точка перехода t_0 определяется уравнением

$$F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) = F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0), \quad \bar{u} = -a(t_0)b^{-1}(t_0),$$

и при этом выполняется условие

$$\frac{d}{dt}F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) \ne \frac{d}{dt}F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0).$$

Из **III** следует, что

$$F_y(\phi_1(t), \bar{u}, t) = 0, \quad F_{yy}(\phi_1(t), \bar{u}, t) \ge 0, \quad 0 \le t \le t_0,$$

$$F_y(\phi_2(t), \bar{u}, t) = 0, \quad F_{yy}(\phi_2(t), \bar{u}, t) \ge 0, \quad t_0 \le t \le T.$$

Замечание 1. Ранее при изучении классических сингулярно возмущенных задач оптимального управления (см. обзоры [7], [8]) рассматривались случаи, когда в вырожденной задаче в рассуждениях использовался единственный корень. С этим связан также локальный характер соответствующих результатов по асимптотике экстремалей при условии сильной выпуклости функционала.

В данной работе будет установлено существование экстремали с внутренним переходным слоем на основе следующего утверждения.

Теорема 1.1 (см. [6]). *Пусть в краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка* (μ — *малый положительный параметр*)

$$\mu\frac{dy}{dt} = G_1(y, u, t, \mu),$$
$$\mu\frac{du}{dt} = G_2(y, u, t, \mu), \tag{1.5}$$
$$y(0, \mu) = y^0, \quad y(1, \mu) = y^1$$

выполнены перечисленные ниже требования.

IV. *Вырожденная система* $G_1(\bar{y}, \bar{u}, t) = 0$, $G_2(\bar{y}, \bar{u}, t) = 0$ *имеет два изолированных корня* $\{\bar{y}_1 = \phi_1(t), \bar{u}_1 = \psi_1(t)\}$ *и* $\{\bar{y}_2 = \phi_2(t), \bar{u}_2 = \psi_2(t)\}$.

V. *На фазовой плоскости* $(\tilde{y}, \tilde{u})$ *точки* $M_i(\phi_i(\bar{t}), \psi_i(\bar{t}))$, $i = 1, 2$, *являются точками покоя седла для вспомогательной системы* ($\bar{t}$ *— параметр*) $\tilde{y}' = G_1(\tilde{y}, \tilde{u}, \bar{t})$, $\tilde{u}' = G_2(\tilde{y}, \tilde{u}, \bar{t})$ *и эта система имеет первый интеграл* $\Omega_i(\tilde{y}, \tilde{u}, \bar{t}) = \Omega_i(\phi_i(\bar{t}), \psi_i(\bar{t}), \bar{t})$, *который проходит через* M_i.

VI. *Уравнения* $\Omega_i(\tilde{y}, \tilde{u}, \bar{t}) = \Omega_i(\phi_i(\bar{t}), \psi_i(\bar{t}), \bar{t})$ *разрешимы относительно* u:

$$S_{M_1}: \tilde{u}^{(-)} = V(\tilde{y}, \phi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}), \bar{t}), \quad S_{M_2}: \tilde{u}^{(+)} = V(\tilde{y}, \phi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}), \bar{t}).$$

VII. *Уравнение* $H(\bar{t}) = \tilde{u}^{(-)} - \tilde{u}^{(+)} = 0$ *имеет решение* $\bar{t} = t_0$ *и при этом* $\frac{d}{d\bar{t}}H(t_0) \ne 0$.

Тогда эта краевая задача имеет решение типа ступеньки и справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \begin{cases} \phi_1(t), & t < t_0, \\ \phi_2(t), & t > t_0, \end{cases} \quad \lim_{\mu \to 0} u(t, \mu) = \begin{cases} \psi_1(t), & t < t_0, \\ \psi_2(t), & t > t_0. \end{cases}$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА СТУПЕНЬКИ

Как было сказано выше, исследуемая задача (1.3) является частным случаем более общей задачи (1.5), поэтому для задачи (1.3) может быть справедлив аналог теоремы 1, т.е. экстремаль (решение системы уравнений Эйлера (1.2) или (1.3)) при соответствующих условиях будет содержать контрастную структуру типа ступеньки.

Итак, сначала покажем, что система уравнений Эйлера имеет решение типа ступеньки. Для этого нужно условия теоремы 1 о предельном переходе сопоставить с условиями оптимальности.

Нетрудно видеть, что присоединенную к (1.3) систему можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{du}{d\tau} = b(\bar{t})F_yF_{u^2}^{-1} - F_{yu}F_{u^2}^{-1}[a(\bar{t}) + b(\bar{t})u], \\ \frac{dy}{d\tau} = a(\bar{t}) + b(\bar{t})u, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\bar{t} \in [0, T]$ – параметр.

Лемма 1. *Пусть выполнены требования* **I–III**. *Тогда присоединенная система* (2.1) *имеет две особые точки типа седла* $M_i(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}))$, $i = 1, 2$, *и* $\bar{u} = -a(\bar{t})b^{-1}(\bar{t})$.

Доказательство. Очевидно, что $(\bar{y}_1, \bar{u}_1) = (\phi_1(\bar{t}), \bar{u})$ и $(\bar{y}_2, \bar{u}_2) = (\phi_2(\bar{t}), \bar{u})$ являются двумя изолированными решениями вырожденной системы

$$\begin{gathered} b(\bar{t})F_yF_{u^2}^{-1} - F_{yu}F_{u^2}^{-1}[a(\bar{t}) + b(\bar{t})u] = 0, \\ a(\bar{t}) + b(\bar{t})u = 0 \end{gathered}$$

и при этом точки $M_i(\phi_i(\bar{t}), \bar{u})$, $i = 1, 2$, при фиксированном $\bar{t} \in [0, T]$ на фазовой плоскости $(\tilde{y}, \tilde{u})$ – особые точки типа седла, так как из структуры основной функциональной матрицы для системы (2.1)

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_{1u} & \bar{G}_{1y} \\ \bar{G}_{2u} & \bar{G}_{2y} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и характеристического уравнения $\lambda^2 - (\bar{G}_{1u} + \bar{G}_{2y})\lambda + \bar{G}_{1u}\bar{G}_{2y} - \bar{G}_{1y}\bar{G}_{2u} = 0$ (здесь $\bar{G}_{2y} = 0$ и все функции вычисляются в $(\phi_i(\bar{t}), \bar{u})$, $i = 1, 2$) следует, что собственные значения матрицы (2.2) для любой особой точки имеют разные знаки, так как их произведение имеет вид $\lambda_1\lambda_2 = -b^2(\bar{t})F_{y^2}F_{u^2}^{-1} < 0$, и особые точки – типа седла.

Лемма 2. *Присоединенная система* (2.1), *при фиксированном* $\bar{t} \in [0, T]$ *имеет первый интеграл*

$$[a(\bar{t}) + b(\bar{t})u]F_u(y, u, \bar{t}) - b(\bar{t})F(y, u, \bar{t}) = C, \tag{2.3}$$

где C – некоторая постоянная.

Доказательство. Перепишем первое уравнение в (2.1) в виде

$$F_{u^2}(y, u, \bar{t})u' = b(\bar{t})F_y(y, u, \bar{t}) - F_{yu}(y, u, \bar{t})[a(\bar{t}) + b(\bar{t})u]. \tag{2.4}$$

Используя второе уравнение из (2.1) вместо (2.4), получаем

$$F_{u^2}(y, u, \bar{t})u' - b(\bar{t})F_y(y, u, \bar{t}) + F_{yu}(y, u, \bar{t})y' = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\tau}(F_u(y, u, \bar{t})) - b(\bar{t})F_y(y, u, \bar{t}) = 0.$$

С учетом $y'' = b(\bar{t})u'$ получим

$$y'\frac{d}{d\tau}(F_u(y, u, \bar{t})) + F_uy'' - b(\bar{t})[y'F_y(y, u, \bar{t}) + u'F_u(y, u, \bar{t})] = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\tau}[y'F_u(y, u, \bar{t}) - b(\bar{t})F(y, u, \bar{t})] = 0.$$

Отсюда вытекает первый интеграл для (2.1) $[a(\bar{t}) + b(\bar{t})u]F_u(y, u, \bar{t}) - b(\bar{t})F(y, u, \bar{t}) = C$, где C – некоторая постоянная.

Лемма 3. *Пусть выполнены требования* **I**, **II** *и* $u \neq -a(\bar{t})b^{-1}(\bar{t})$. *Тогда первый интеграл* (2.3) *можно разрешить явно относительно* u *при фиксированном* $\bar{t} \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть $\bar{a} = a(\bar{t})$, $\bar{b} = b(\bar{t})$ и $g(y, u, \bar{t}) = (\bar{a} + \bar{b}u)F_u(y, u, \bar{t}) - \bar{b}F(y, u, \bar{t}) - C$. По теореме существования неявной функции уравнение $g(y, u, \bar{t}) = 0$ разрешимо относительно u:

$$u = h(y, \bar{t}, C), \quad (y, \bar{t}) \in D_1, \tag{2.5}$$

где $D_1 = \{(y, t) \| y| \le l_1, 0 \le \bar{t} \le T\}$, так как $g_u = \bar{b}F_u + (\bar{a} + \bar{b}u)F_{u^2} - \bar{b}F_u = (\bar{a} + \bar{b}u)F_{u^2} \neq 0$ вследствие **II** и $u \neq -a(\bar{t})b^{-1}(\bar{t})$.

Продолжим далее проверку требований теоремы 1. Очевидно, что существуют две сепаратрисы S_{M_1}, S_{M_2}, проходящие через седла M_1, M_2 и удовлетворяющие уравнениям

$$S_{M_1}: (\bar{a} + \bar{b}u)F_u(y, u, \bar{t}) - \bar{b}F(y, u, \bar{t}) = -\bar{b}F(\phi_1(\bar{t}), \bar{u}, \bar{t}), \tag{2.6}$$

$$S_{M_2}: (\bar{a} + \bar{b}u)F_u(y, u, \bar{t}) - \bar{b}F(y, u, \bar{t}) = -\bar{b}F(\phi_2(\bar{t}), \bar{u}, \bar{t}). \tag{2.7}$$

Из (2.5) получим

$$u^{(-)}(\tau, \bar{t}) = h^{(-)}(y^{(-)}, \bar{t}, \phi_1(\bar{t})), \quad u^{(+)}(\tau, \bar{t}) = h^{(+)}(y^{(+)}, \bar{t}, \phi_2(\bar{t})). \tag{2.8}$$

Пусть $H(\bar{t}) = u^{(-)}(0, \bar{t}) - u^{(+)}(0, \bar{t}) = h^{(-)}(\beta(\bar{t}), \bar{t}, \phi_1(\bar{t})) - h^{(+)}(\beta(\bar{t}), \bar{t}, \phi_2(\bar{t}))$, где

$$y^{(-)}(0) = y^{(+)}(0) = \beta(\bar{t}) = \frac{1}{2}[\phi_1(\bar{t}) + \phi_2(\bar{t})].$$

Лемма 4. *Если выполнены требования* **I–III**, *то справедливы соотношения*

$$h_y(\phi_i(\bar{t}), \bar{t}) = \pm\sqrt{\bar{b}F_{y^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}_0(\bar{t}), \bar{t})F^{-1}_{u^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}_0(\bar{t}), \bar{t})}, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Из дифференцирования неявной функции имеем

$$h_y(y, \bar{t}) = \frac{du}{dy} = \frac{\bar{b}F_y - (\bar{a} + \bar{b}u)F_{yu}}{(\bar{a} + \bar{b}u)F_{u^2}}.$$

Применяя здесь правило Лопиталя, в окрестности особых точек получаем

$$h_y(\phi_i(\bar{t}), \bar{t}) = \pm\sqrt{\frac{\bar{b}F_{y^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}_0(\bar{t}), \bar{t})}{F_{u^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}_0(\bar{t}), \bar{t})}}.$$

Здесь учтено, что $\bar{b} > 0$, $F_{y^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}(\bar{t}), \bar{t}) > 0$ и $F_{u^2}(\phi_i(\bar{t}), \bar{u}(\bar{t}), \bar{t}) > 0$, $i = 1, 2$.

Лемма 5. *Пусть выполнены требования* **I–III**. *Тогда для выполнения равенства* $F(t_0) = 0$ *необходимо и достаточно выполнения равенства* $F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) = F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0)$.

Доказательство. Из (2.6), (2.7) при $\tau = 0$ и $\bar{t} = t_0$ получим

$$h^{(-)}(t_0)F_u(\beta(t_0), h^{(-)}(t_0), t_0) - F(\beta(t_0), h^{(-)}(t_0), t_0) = -F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0), \tag{2.9}$$

$$h^{(+)}(t_0)F_u(\beta(t_0), h^{(+)}(t_0), t_0) - F(\beta(t_0), h^{(+)}(t_0), t_0) = -F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0), \tag{2.10}$$

где $h^{(-)}(t_0) = h^{(-)}(\beta(t_0), t_0, \phi_1(t_0))$, $h^{(+)}(t_0) = h^{(+)}(\beta(t_0), t_0, \phi_2(t_0))$.

Необходимость получается прямо из равенств (2.9), (2.10). Достаточность следует из представления (2.5).

Лемма 6. *Пусть выполнены требования* **I–III**. *Тогда соотношение* $\frac{d}{d\bar{t}}H(t_0) \neq 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $F_t(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) \neq F_t(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0)$.

Доказательство. При $\tau = 0$ в (2.6), (2.7) получим

$$h^{(-)}(\bar{t})F_u(\beta(\bar{t}), h^{(-)}(\bar{t}), \bar{t}) - F(\beta(\bar{t}), h^{(-)}(\bar{t}), \bar{t}) = -F(\phi_1(\bar{t}), \bar{u}, \bar{t}), \tag{2.11}$$

$$h^{(+)}(\bar{t})F_u(\beta(\bar{t}), h^{(+)}(\bar{t}), \bar{t}) - F(\beta(\bar{t}), h^{(+)}(\bar{t}), \bar{t}) = -F(\phi_2(\bar{t}), \bar{u}, \bar{t}). \tag{2.12}$$

Дифференцируя (2.11), (2.12) по $\bar{t}$, получаем

$$h^{(-)}F_{uy}^{(-)}\beta_t + h^{(-)}F_{uu}^{(-)}\frac{d}{d\bar{t}}h^{(-)} + h^{(-)}F_{ut}^{(-)} - F_y^{(-)}\frac{d\beta}{d\bar{t}} - F_t^{(-)} = -\frac{d}{d\bar{t}}F(\phi_1, \bar{u}, \bar{t}),$$

$$h^{(+)}F_{uy}^{(+)}\beta_t + h^{(+)}F_{uu}^{(+)}\frac{d}{d\bar{t}}h^{(+)} + h^{(+)}F_{ut}^{(+)} - F_y^{(+)}\frac{d\beta}{d\bar{t}} - F_t^{(+)} = -\frac{d}{d\bar{t}}F(\phi_2, \bar{u}, \bar{t}),$$

где $F^{(-)} = F(\beta(\bar{t}),\ h^{(-)}(\bar{t}),\ \bar{t})$, $F^{(+)} = F(\beta(\bar{t}),\ h^{(+)}(\bar{t}),\ \bar{t})$. Отсюда при $\bar{t} = t_0$ имеем $h^{(-)}(t_0)F_{u^2}^{(-)}(t_0)\dfrac{d}{d\bar{t}}H(t_0) = -\left[\dfrac{d}{d\bar{t}}F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) - \dfrac{d}{d\bar{t}}F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0)\right]$ и утверждение леммы имеет место, так как, с одной стороны, $F_{uu}^{(-)}(t_0) > 0$ (в силу **II**), а с другой $h^{(-)}(t_0) \neq 0$, как следствие того, что сепаратриса в точке $y = \beta(t_0)$ не пересекает прямую $\bar{u} = -a(\bar{t})b^{-1}(\bar{t})$.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* **I–III**. *Тогда существует момент времени* $\bar{t} = t_0$, *для которого в присоединенной системе* (2.1) *имеется сепаратриса, соединяющая седла* $M_1(\phi_1(t_0), \bar{u})$, $M_2(\phi_2(t_0), \bar{u})$, $\bar{u} = -a(t_0)b^{-1}(t_0)$.

Это утверждение следует непосредственно из лемм 2.2 и 2.5.

Таким образом, для краевой задачи (1.3) выполнены все требования теоремы 1 о предельном переходе. Поэтому задача (1.1) имеет экстремаль $y(t, \mu)$ с контрастной структурой типа ступеньки.

Теорема 2. *Пусть выполнены требования* **I–III**. *Тогда при достаточно малых* $\mu > 0$ *существует экстремаль* $y(t, \mu)$ *для задачи оптимального управления* (1.1) *с контрастной структурой типа ступеньки, т.е.*

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \begin{cases} \phi_1(t), & t < t_0, \\ \phi_2(t), & t > t_0. \end{cases}$$

3. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В вариационных задачах с сингулярно возмущенными дифференциальными связями обычно асимптотика решения строится на основе метода пограничных функций [7], [8] двумя способами: первый – с помощью построения асимптотики экстремали, а второй связан с так называемой прямой схемой, в которой асимптотическое приближение к решению строится на основе последовательного решения вариационных задач, получающихся в результате прямого разложения условий вариационной задачи в асимптотические ряды на основе постулируемых асимптотических разложений. В ряде работ (см., например, [9]) показано, что эти два подхода приводят к одинаковым асимптотическим приближениям и их элементам. Построим формальную асимптотику решения задачи (1.1), следуя прямой схеме.

Асимптотика решения ищется в виде

$$z(t, \mu) = \begin{cases} y(t, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k(\bar{y}_k(t) + \Pi_k y(\tau_0) + Q_k^{(-)}y(\tau)), \\ u(t, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k(\bar{u}_k(t) + \Pi_k u(\tau_0) + Q_k^{(-)}u(\tau)), \end{cases} \quad 0 \le t < t^*, \tag{3.1}$$

$$z(t, \mu) = \begin{cases} y(t, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k(\bar{y}_k(t) + Q_k^{(+)}y(\tau) + R_k y(\tau_1)), \\ u(t, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k(\bar{u}_k(t) + Q_k^{(+)}u(\tau) + R_k u(\tau_1)), \end{cases} \quad t^* < t \le 1, \tag{3.2}$$

где $z = (y, u)$, $\tau_0 = t\mu^{-1}$, $\tau = (t - t^*)\mu^{-1}$, $\tau_1 = (t - 1)\mu^{-1}$, $\Pi_k y(\tau_0)$ – левая пограничная функция в окрестности $t = 0$, $R_k y(\tau_1)$ – правая пограничная функция в окрестности $t = 1$, а $Q_k^{(\mp)}y$ – левые и правые пограничные функции, формирующие фазовый переход (переходной слой) в окрестности $t = t^*$. При этом значение $t^*(\mu)$ будем искать в виде $t^*(\mu) = t_0 + \mu t_1 + \ldots + \mu^k t_k + \ldots$. Для определения коэффициентов всех выписанных рядов надо (3.1), (3.2) подставить в (1.1) и минимизировать коэффициенты разложения функционала в ряд по целым степеням μ по элементам асимптотики

$$\inf_y J[y] = \inf_{y_0} J(y_0) + \sum_{i=1}^{n} \mu^i \inf_{y_i} \tilde{J}_i(y_i) + \ldots,$$

где $\tilde{J}_i(y_i) = J_i(y_i, \tilde{y}_{i-1}, \ldots, \tilde{y}_0)$, $\tilde{y}_k = \arg\inf\limits_y \tilde{J}_k(y)$, $k = \overline{0, i-1}$. При этом разложение (3.1), (3.2) подставляется во все условия (1.1) и затем приравняются слева и справа члены одинакового порядка по μ, причем отдельно зависящие от t, τ_0, τ и τ_1. Это и дает вариационные задачи для определения каждого члена асимптотики.

Для определения главного члена $\{\bar{y}_0(t), \bar{u}_0(t)\}$ регулярного ряда асимптотики получаем вырожденную задачу (1.4)

$$J_0(\bar{u}_0) = \int_0^T F(\bar{y}_0, \bar{u}_0, t)dt \longrightarrow \min_{\bar{u}_0},$$

$$a(t) + b(t)\bar{u}_0 = 0.$$

Из условия **III** получаем

$$\bar{y}_0^* = \begin{cases} \phi_1(t), & t < t_0, \\ \phi_2(t), & t > t_0, \end{cases} \quad \bar{u}_0^* = -a(t)b^{-1}(t).$$

Для определения $\{Q_0^{(\mp)}y, Q_0^{(\mp)}u\}$ – главных членов пограничных рядов в окрестности точки фазового перехода имеем следующие вариационные задачи:

$$Q_0^{(\mp)}J = \int_{-\infty(0)}^{0(+\infty)} \Delta_0^{(\mp)}F(\phi_{1,2}(t_0) + Q_0^{(\mp)}y, \bar{u}_0^*(t_0) + Q_0^{(\mp)}u, t_0)d\tau \longrightarrow \min_{Q_0^{(\mp)}u},$$

$$\frac{d}{d\tau}Q_0^{(\mp)}y = a(t_0) + b(t_0)(\bar{u}_0^*(t_0) + Q_0^{(\mp)}u),$$

$$Q_0^{(\mp)}y(0) = (\beta(t_0) - \phi_{1,2}(t_0)), \quad Q_0^{(\mp)}y(\pm\infty) = 0,$$

$$\Delta_0^{(\mp)}F = F(\phi_{1,2}(t_0) + Q_0^{(\mp)}y, \bar{u}_0^*(t) + Q_0^{(\mp)}u, t_0) - F(\phi_{1,2}(t_0), \bar{u}_0(t_0), t_0).$$

Производя здесь замены переменных

$$\tilde{y}^{(\mp)}(\tau) = \phi_{1,2}(t_0) + Q_0^{(\mp)}y(\tau), \quad \tilde{u}^{(\mp)}(\tau) = u_0^*(t_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau), \tag{3.3}$$

получаем

$$Q_0^{(\mp)}J = \pm\int\limits_{-\infty(0)}^{0(+\infty)} \Delta_0^{(\mp)}F(\tilde{y}^{(\mp)}, \tilde{u}^{(\mp)}, t_0)d\tau \longrightarrow \min_{\tilde{u}^{(\mp)}},$$

$$\frac{d\tilde{y}^{(\mp)}}{d\tau} = a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)},$$

$$\tilde{y}^{(\mp)}(0) = \beta(t_0), \quad \tilde{y}^{(\mp)}(\mp\infty) = \phi_{1,2}(t_0).$$

После замены

$$d\tau = \frac{d\tilde{y}}{a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}},$$

получаем следующий функционал, не зависящий явно от τ:

$$Q_0^{(\mp)}J = \pm\int\limits_{\phi_{1,2}(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\Delta_0^{(\mp)}F(\tilde{y}^{(\mp)}, \tilde{u}^{(\mp)}, t_0)}{a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}}d\tilde{y} \longrightarrow \min_{\tilde{u}^{(\mp)}(\tilde{y}^{(\mp)})}. \tag{3.4}$$

Необходимое условие минимума подынтегральной функции имеет вид $[a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}]F_{\tilde{u}} - b(t_0)F(\tilde{y}^{(\mp)}, \tilde{u}^{(\mp)}, t_0) = -F(\phi_{1,2}(t_0), \bar{u}_0^*(t_0), t_0)$. Учитывая (2.5), получаем, что $\tilde{u}^{(\mp)} = h(\tilde{y}^{(\mp)}, t_0, \phi_{1,2}(t_0))$ является точкой минимума, так как вдоль нее условие

$$\frac{\partial^2}{\partial\tilde{u}^2}(\Delta_0^{(\mp)}F)[a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}]^{-1} + 2\frac{\partial}{\partial\tilde{u}}(\Delta_0^{(\mp)}F)\frac{\partial}{\partial\tilde{u}}[a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}]^{-1} +$$

$$+ (\Delta_0^{(\mp)}\tilde{F})\frac{\partial^2}{\partial\tilde{u}^2}[a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}]^{-1} = [a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}]^{-3}[(a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)})^2F_{\tilde{u}^2}] > 0.$$

Последнее имеет место, так как на плоскости $(\tilde{y}, \tilde{u})$ при изменении $\tilde{y}$ от начальной точки $\beta(t_0)$ до $\phi_{1,2}(t_0)$ в (3.4) функция $a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)}$, отвечающая верхней части ячейки (ячейка соединяет два седла $(\phi_1(t_0), \bar{u}(t_0))$ и $(\phi_2(t_0), \bar{u}(t_0))$, является положительной.

Таким образом, для определения $Q_0^{(\mp)}y$ в окрестности точки перехода имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{dQ_0^{(\mp)}y}{d\tau} = b(t_0)h(\phi_{1,2}(t_0) + Q_0^{(\mp)}y, t_0). \tag{3.5}$$

VIII. Пусть уравнения (3.5) с начальными условиями $Q_0^{(\mp)}y(0) = \beta(t_0) - \phi_{1,2}(t_0)$ имеют непрерывно дифференцируемые решения $Q_0^{(\mp)}y(\tau)$, $0 < t_0 < T$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Теперь, подставляя $Q_0^{(\mp)}y^*$ в (3.3), находим оптимальные управления в задачах оптимального управления для левого и правого слоя в окрестности точки перехода в виде соответствующих обратных связей $Q_0^{(\mp)}u^* = b^{-1}(t_0)(Q_0^{(\mp)}y^*)'$. Итак, оптимальные элементы $Q_0^{(\mp)}y^*(\tau)$, $Q_0^{(\mp)}u^*(\tau)$ определяются. Из условия леммы 2.4 при знаке плюс перед h_y (условие асимптотической устойчивости точки покоя $\phi_{1,2}(t_0)$ при $\tau \longrightarrow -\infty$) имеем оценку $\left|Q_0^{(-)}y^*(\tau)\right| \le C_1e^{k_1\tau}$, $\left|Q_0^{(-)}u^*(\tau)\right| \le C_1e^{k_1\tau}$, $k_1 > 0$, $\tau \le 0$. Аналогичное рассуждение (при знаке минус перед h_y) можно привести для $Q_0^{(+)}y(\tau)$ и получить оценку $\left|Q_0^{(+)}y^*(\tau)\right| \le C_1e^{-k_2\tau}$, $\left|Q_0^{(+)}u^*(\tau)\right| \le C_1e^{-k_2\tau}$, $k_2 > 0$, $\tau \ge 0$. Подобные задачи оптимального управления и соответствующие экспонециальные оценки так же получаются и для $\{\Pi_0y^*(\tau_0), \Pi_0u^*(\tau_0)\}$, $\{R_0y^*(\tau_1), R_0u^*(\tau_1)\}$.

Для определения $\{\Pi_0 y(\tau), \Pi_0 u(\tau)\}$ имеем

$$\Pi_0 J = \int_0^{\infty} \Delta_0 F(\phi_1(0) + \Pi_0 y, \bar{u}_0^*(0) + \Pi_0 u, 0) d\tau_0 \longrightarrow \min_{\Pi_0 u},$$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0 y = a(0) + b(0)[\bar{u}_0^*(0) + \Pi_0 u],$$

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \phi_1(0), \quad \Pi_0 y(\infty) = 0,$$

где $\Delta_0 F = F(\phi_1(0) + \Pi_0 y, \bar{u}_0^*(0) + \Pi_0 u, 0) - F(\phi_1(0), \bar{u}_0^*(0), 0)$, а для определения $\{R_0 y(\tau), R_0 u(\tau)\}$ имеем

$$R_0 J = \int_{-\infty}^{0} \Delta_0 F(\phi_2(T) + R_0 y, \bar{u}_0^*(T) + R_0 u, T) d\tau_1 \longrightarrow \min_{R_0 u},$$

$$\frac{d}{d\tau_1} R_0 y = a(T) + b(T)[\bar{u}_0^*(T) + R_0 u],$$

$$R_0 y(0) = y^T - \phi_2(T), \quad R_0 y(-\infty) = 0,$$

где $\Delta_0 F = F(\phi_2(T) + R_0 y, \bar{u}_0^*(T) + R_0 u, T) - F(\phi_2(T), \bar{u}_0(T), T)$.

IX. Пусть краевые условия $y^0 - \phi_1(0)$, $y^T - \phi_2(T)$, в задачах $\Pi_0 J$, $R_0 J$, находятся в определенных окрестностях начала координат, гарантирующих существование оптимальных обратных связей в этих задачах.

Замечание 2. Требования **VIII**, **IX** – аналог условий Тихонова о принадлежности граничных условий областям влияния соответствующих асимптотически устойчивых положений равновесия присоединенных систем. Их выполнение вместе с требованиями **I–III** гарантирует существование переходного слоя в оптимальной траектории и существование экспоненциально убывающих решений у соответствующих замкнутых систем для задач оптимальной стабилизации $\Pi_0 J$, $Q_0 J$. Последнее показывается, как и выше, при выводе уравнения (3.5) (см. также аналогичные построения в [10]). Надо отметить, что здесь мы не рассматриваем множитель Лагранжа как быструю переменную (вместо него мы сразу рассматриваем управление), а соответствующие условно устойчивые многообразия (см. [10]) в краевых задачах условий оптимальности для множителей Лагранжа как раз и порождаются оптимальными синтезирующими управлениями в задачах оптимальной стабилизации $\Pi_0 J$, $Q_0 J$.

Таким образом, можно найти главные члены $\{\bar{y}_0^*(t), \bar{u}_0^*(t)\}$, $\{\Pi_0 y^*(\tau_0), \Pi_0 u^*(\tau_0)\}$, $\{Q_0 y^*(\tau), Q_0 u^*(\tau)\}$, $\{R_0 y^*(\tau_1), R_0 y^*(\tau_1)\}$ всех асимптотических рядов в (3.1), (3.2). Кроме этого, можно написать минимальные значения соответствующих функционалов J_0^*, $\Pi_0 J^*$, $Q_0 J^{(\mp)*}$, $R_0 J^*$:

$$J_0^*(\bar{u}_0) = \int_0^T F(\bar{y}_0^*, \bar{u}_0^*, t) dt, \quad \Pi_0 J^* = \int_{y^0}^{\phi_1(0)} \frac{\Delta_0 F(y^*, \breve{u}^*, 0)}{a(0) + b(0)\breve{u}^*} dy,$$

$$Q_0^{(\mp)} J^* = \pm \int_{\phi_{1,2}(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\Delta_0^{(\mp)} F(\tilde{y}^{(\mp)*}, \tilde{u}^{(\mp)*}, t_0)}{a(t_0) + b(t_0)\tilde{u}^{(\mp)*}} d\tilde{y}, \quad R_0 J^* = \int_{\phi_2(T)}^{y^T} \frac{\Delta_0 F(\hat{y}^*, \hat{u}^*, T)}{a(T) + b(T)\hat{u}^*} d\hat{y},$$

здесь $y^* = \phi_1(0) + \Pi_0 y^*(\tau_0)$, $\breve{u} = \bar{u}_0^*(0) + \Pi_0 u^*(\tau_0)$, $\hat{y}^* = \phi_2(T) + R_0 y^*(\tau_1)$, $\hat{y}^* = \bar{u}_0^*(T) + R_0 y^*(\tau_1)$.

Рассуждая, как и в [10], приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* **I–III**, **VIII**, **IX**, *тогда при достаточно малых* $\mu > 0$ *существует формальное асимптотическое приближение к экстремали* $y(t, \mu)$ *типа ступеньки для задачи* (1.1), *имеющее следующее асимптотическое представление:*

$$y(t, \mu) = \begin{cases} \phi_1(t) + \Pi_0 y^*(\tau_0) + Q_0^{(-)} y^*(\tau) + O(\mu), & t < t_0, \\ \beta(t_0), & t = t_0, \\ \phi_2(t) + R_0 y^*(\tau_1) + Q_0^{(+)} y^*(\tau) + O(\mu), & t > t_0, \end{cases}$$

$$u(t, \mu) = \begin{cases} \bar{u}_0^*(t) + \Pi_0 u^*(\tau_0) + Q_0^{(-)} u^*(\tau) + O(\mu), & t < t_0, \\ \beta'(t), & t = t_0, \\ \bar{u}_0^*(t) + R_0 u^*(\tau_1) + Q_0^{(+)} u^*(\tau) + O(\mu), & t > t_0. \end{cases}$$

Кроме этого, имеет место соотношение $J^*[u] = J_0^* + \mu[\Pi_0 J^* + Q_0^{(-)} J^* + Q_0^{(+)} J^* + R_0 J^*] + O(\mu^2)$.

Замечание 3. Асимптотическое приближение к управлению здесь в общем случае само не является допустимым управлением, так как переводит траекторию из начальной точки только в $O(\mu)$ окрестность конечной точки. Но, используя специфику задачи, можно, как и в [11], на основе формального асимптотического решения построить допустимое управление, сохраняющее все асимптотические оценки.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу

$$J[u] = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3 \sin t - \frac{1}{2}y^2 + y \sin t + \frac{1}{2}t^2 + tu + \frac{1}{2}u^2\right] dt \longrightarrow \min_u,$$

$$\mu \frac{dy}{dt} = t + u, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

$$y(0, \mu) = 0, \quad y(2\pi, \mu) = 2.$$

Здесь

$$F(y, u, t) = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3 \sin t - \frac{1}{2}y^2 + y \sin t + \frac{1}{2}t^2 + tu + \frac{1}{2}u^2, \quad \bar{u} = -t,$$

и нетрудно заметить, что при каждом t будет

$$\min_{\bar{y}} F(\bar{y}, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3}\sin t, & 0 \le t \le t_0, \\ -\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\sin t, & t_0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Главный член точки перехода $t_0 = \pi$ определяется уравнением $\sin t_0 = 0$. Причем

$$\frac{d}{dt}F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) \ne \frac{d}{dt}F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0),$$

потому что

$$\frac{d}{dt}F(\phi_1(t_0), \bar{u}, t_0) = \frac{2}{3}, \quad \frac{d}{dt}F(\phi_2(t_0), \bar{u}, t_0) = -\frac{2}{3}.$$

В этом примере первый интеграл (2.3) имеет вид $(u+\bar{t}\,)^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}y^3\sin\bar{t} + y^2 - 2y\sin\bar{t} = C$, где C — некоторая постоянная. Сепаратрисы S_{M_1}, S_{M_2}, которые проходят через седла $M_1(\bar{t}\,)$, $M_2(\bar{t}\,)$, соответственно, при зафиксированном значении $\bar{t} \in [0, 2\pi]$ принимают вид

$$S_{M_1}: u^{(-)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-y^{(-)2}), \quad S_{M_2}: u^{(+)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-y^{(+)^2}).$$

С учетом $y^{(-)}(0) = y^{(+)}(0) = 0$ имеем $H(t_0) = u^{(-)}(0, t_0) - u^{(+)}(0, t_0) = 0$. Для построения левой части переходного слоя в нулевом приближении получаем следующую вариационную задачу:

$$Q_0^{(-)}J = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4}\{1-[Q_0^{(-)}y-1]\}^2 + \frac{1}{2}Q_0^{(-)}u^2 d\tau \longrightarrow \min_{Q_0^{(-)}u},$$

$$\frac{d}{d\tau}Q_0^{(-)}y = Q_0^{(-)}u,$$

$$Q_0^{(-)}y(0) = 1, \quad Q_0^{(-)}y(-\infty) = 0,$$

с решением

$$Q_0^{(-)}y^*(\tau) = \frac{2e^{\sqrt{2}\tau}}{1+e^{\sqrt{2}\tau}}, \quad Q_0^{(-)}u^*(\tau) = \frac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\tau}}{(1+e^{\sqrt{2}\tau})^2}, \quad Q_0^{(-)}J^* = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tau < 0.$$

Аналогично можно найти

$$\{Q_0^{(+)}y^*(\tau), Q_0^{(+)}u^*(\tau)\}, \quad \{\Pi_0 y^*(\tau_0), \Pi_0 u^*(\tau_0)\}, \quad \{R_0 y^*(\tau_1), R_0 y^*(\tau_1)\}.$$

$$Q_0^{(+)}y^*(\tau) = \frac{-2e^{-\sqrt{2}\tau}}{1+e^{-\sqrt{2}\tau}}, \quad Q_0^{(+)}u^*(\tau) = \frac{2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\tau}}{(1+e^{-\sqrt{2}\tau})^2}, \quad Q_0^{(+)}J^* = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tau > 0,$$

$$\Pi_0 y^*(\tau_0) = \frac{2e^{-\sqrt{2}\tau_0}}{1+e^{-\sqrt{2}\tau_0}}, \quad \Pi_0 u^*(\tau_0) = \frac{-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\tau_0}}{(1+e^{-\sqrt{2}\tau_0})^2}, \quad \Pi_0 J^* = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tau > 0, \quad R_0 y^*(\tau_1) = \frac{2e^{\sqrt{2}\tau_1}}{3-e^{\sqrt{2}\tau_1}},$$

$$R_0 u^*(\tau_1) = \frac{6\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\tau_1}}{(3-e^{\sqrt{2}\tau_1})^2}, \quad R_0 J^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tau_1 < 0.$$

В итоге формальное асимптотическое представление принимает вид

$$y(t,\mu) = \begin{cases} -1 + \dfrac{2e^{-\sqrt{2}\tau_0}}{1+e^{-\sqrt{2}\tau_0}} + \dfrac{2e^{\sqrt{2}\tau}}{1+e^{\sqrt{2}\tau}} + O(\mu), & 0 < t < \pi, \\ 0, \quad t = \pi, & \\ 1 + \dfrac{2e^{\sqrt{2}\tau_1}}{3-e^{\sqrt{2}\tau_1}} + \dfrac{-2e^{-\sqrt{2}\tau}}{1+e^{-\sqrt{2}\tau}} + O(\mu), & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

$$u(t,\mu) = \begin{cases} -t + \dfrac{-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\tau_0}}{(1+e^{-\sqrt{2}\tau_0})^2} + \dfrac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\tau}}{(1+e^{\sqrt{2}\tau})^2} + O(\mu), & 0 < t < \pi, \\ -t + \dfrac{6\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\tau_1}}{(3-e^{\sqrt{2}\tau_1})^2} + \dfrac{2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\tau}}{(1+e^{-\sqrt{2}\tau})^2} + O(\mu), & \pi < t < 2\pi, \end{cases}$$

и при этом имеет место соотношение

$$J^*[u] = -\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\sqrt{2}\mu + O(\mu^2).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере элементарной задачи управления показано, что, конструируя функционал качества (а этот процесс в руках лица, принимающего решение) для задачи управления объектом с быстрыми движениями можно добиться присутствия в оптимальной траектории наряду с граничной быстрой динамикой, пограничными слоями на границе также быстрой внутренней динамики – быстрого переходного слоя в окрестности внутренней точки интервала управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. Москва: Высш. школа, 1990.
2. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемехан. 1997. № 7. С. 4–32.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
4. *Ни Минь Кань, Дмитриев М.Г.* Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика // Автоматика и телемехан. 1998. № 5. С. 41–52.
5. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г., Ни Минь Кань.* О контрастной структуре типа ступеньки для задачи вариационного исчисления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 7. С. 1269–1280.
6. *Васильева А.Б.* О контрастных структурах типа ступеньки для системы сингулярно возмущенных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1401–1411.
7. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Матем. анализ. Том 20. Итоги науки и техн. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982. С. 3–78.
8. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982–2004 гг. // Автоматика и телемехан. 2006. № 1. С. 3–53.
9. *Ни Минь Кань, Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям с внутренними переходными слоями // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 1. С. 120–126.
10. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автомеханика и телемехан. 1989. № 7. С. 71–82.
11. *Белокопытов С.В.* Прямая схема решения задач оптимального управления с пограничными слоями: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1989.