Ни Минь Кань, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, Эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям с внутренними переходными слоями, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 120–126

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm2680

Математические заметки

ТОМ 79 ВЫПУСК 1 ЯНВАРЬ 2006

УДК 517.97

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПЕРЕХОДА, ОТВЕЧАЮЩИХ РЕШЕНИЯМ С ВНУТРЕННИМИ ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ

Ни Минь Кань, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев

Устанавливается эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям сингулярно возмущенных краевых задач с внутренними пограничными слоями. Первое множество порождается формализмом построения асимптотики решения краевой задачи и второе – формализмом прямой схемы построения асимптотики решения некоторой вариационной задачи.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = 0, \qquad x(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденное уравнение

$$F(x,t) = 0. \tag{3}$$

Сформулируем следующие условия [1].

Условие $\mathbf{A}_1$. *Пусть функция $F(x,t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области D на плоскости (x,t).*

Условие $\mathbf{A}_2$. *Пусть уравнение (3) имеет три корня $x_1 = \alpha(t)$, $x_2 = \beta(t)$ и $x_3 = \gamma(t)$ такие, что*

1) $\alpha(t) < \beta(t) < \gamma(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$;
2) *область* $\{(x,t) : \alpha(t) \leqslant x \leqslant \gamma(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *содержится в области* D;
3) $F_x(\alpha(t),t) > 0$, $F_x(\beta(t),t) < 0$ *и* $F_x(\gamma(t),t) > 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Из условия $\mathbf{A}_2$ следует, что явление перехода решения задачи (1), (2) с корня $\alpha(t)$ на корень $\gamma(t)$ или, наоборот, с $\gamma(t)$ на $\alpha(t)$ может существовать при некотором значении t_*, где

$$t_* = t_0 + \varepsilon t_1 + \cdots . \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке фонда Шанхайского института вычислительных наук Китая.

Характерной особенностью такого решения является то, что зона быстрого изменения решения имеется не только вблизи начала или конца отрезка $[0,1]$, но и в окрестности некоторой внутренней точки t_* этого отрезка. Такое решение называется *решением с внутренним переходным слоем.* Главной частью точки перехода является t_0; она находится из уравнения

$$\int_{\alpha(t_0)}^{\gamma(t_0)} F(x,t)\,dx = 0$$

и при этом в [1] предполагается, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\gamma(t)} F(x,t)\,dx\bigg|_{t=t_0} \neq 0.$$

Пусть это условие не выполнено, т.е. имеет место

Условие $\mathbf{A}_3$. *Для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\int_{\alpha(t_0)}^{\gamma(t_0)} F(x,t)\,dx = 0.$$

Тогда такой случай называется *критическим*, и главное значение t_0, вообще говоря, неединственной точки перехода t_*, определяется следующим уравнением [2]:

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\int_{\alpha_0}^z F_t(x,t_0)\,dx}{\left(\int_{\alpha_0}^z F(x,t_0)\,dx\right)^{1/2}}\,dz - \int_0^{\gamma_0} \frac{\int_{\gamma_0}^z F_t(x,t_0)\,dx}{\left(\int_{\gamma_0}^z F(x,t_0)\,dx\right)^{1/2}}\,dz = 0, \tag{5}$$

где $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, $\beta_0 = 0$ и $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.

Обозначим это множество всех значений t_0 через A.

В работе [3] была изучена простейшая регуляризованная вариационная задача

$$J(u) = \int_0^1 \left(-P(x,t) + \frac{\varepsilon^2}{2}u^2\right) dt \to \min_u, \tag{6}$$

$$\dot{x} = u, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

$$x(0,\varepsilon) = 0, \qquad x(1,0) = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{8}$$

при выполнении следующих условий.

Условие $\mathbf{B}_1$. *Пусть функция* $P(x,t)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области* D *на плоскости* (x,t).

Условие $\mathbf{B}_2$. *Существуют функции* $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ *такие, что* $P(\alpha(t),t) = P(\gamma(t),t) = \max_x P(x,t)$, *причем*

$$P_{xx}(\alpha(t),t) < 0, \qquad P_{xx}(\gamma(t),t) < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Термин “регуляризация” здесь связан с некорректностью по Тихонову предельной вариационной задачи при $\varepsilon = 0$ из-за ее неразрешимости на классе гладких функций и регуляризатор Тихонова [4] здесь имеет вид слагаемого с ε^2 в функционале. Если сделать замену $\varepsilon u = v$, то дифференциальная связь (7) приобретает вид сингулярно возмущенной $\varepsilon\dot{x} = v$.

Наличие малого параметра при старших производных в дифференциальных связях вариационной задачи приводит к появлению зон быстрого изменения решения задачи – зон пограничного слоя; подобные рассуждения рассматривались в литературе [3], [5]. При этом задача (6)–(8) может иметь решение и с внутренними переходными слоями. Асимптотика решения задачи (6)–(8) строится с помощью формализма прямой схемы [3], который заключается в прямой подстановке асимптотического разложения в условия вариационной задачи и последовательном решении получающейся цепочки вариационных задач. При этом все элементы точного решения разыскиваются в виде соответствующих асимптотических разложений. В частности, точка перехода в контрастной структуре типа ступеньки ищется в виде ряда по целым степеням параметра ε и все члены этого разложения также участвуют в процессе последовательной минимизации членов асимптотического разложения критерия (6). Главный член этого разложения t_0 определяется в результате решения задач минимизации, которые определяют равномерное нулевое приближение к решению (6)–(8). Множество значений t_0 (главных членов различных точек перехода) обозначим через B.

Итак задача (6)–(8), с одной стороны, имеет типичные черты вариационной задачи и может исследоваться с помощью "вариационной" техники, а с другой – необходимые условия оптимальности приводят нас к специальному классу сингулярно возмущенных краевых задач – уравнениям Эйлера

$$\varepsilon^2\,\frac{d^2x}{dt^2} = -P_x(x,t),$$
$$x(0,\varepsilon) = 0, \qquad x(1,\varepsilon) = 0,$$

которые являются задачами того же типа, что и (1), (2). Это означает, что t_0 определяется таким же уравнением, что и уравнение (5) при $F(x,t) = -P_x(x,t)$:

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{P_t(\alpha_0,t_0) - P_t(z,t_0)}{(P(\alpha_0,t_0) - P(z,t_0))^{1/2}}\,dz - \int_0^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0,t_0) - P_t(z,t_0)}{(P(\gamma_0,t_0) - P(z,t_0))^{1/2}}\,dz = 0. \tag{9}$$

В настоящей работе будет доказано, что $A = B$.

Сначала покажем, как получается множество B.

Асимптотическое разложение оптимального решения задачи (6)–(8) $z(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon))^T$ будем искать в виде

$$z(t,\varepsilon) = \begin{cases} \bar{z}(t,\varepsilon) + Lz(\tau,\varepsilon), & 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ \bar{z}(t,\varepsilon) + Qz(\tau,\varepsilon), & t_* \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

где $\bar{z}(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t)$ – регулярный ряд;

$$Lz(\tau,\varepsilon) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i x(\tau), \varepsilon^{-1} L_0 u(\tau) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_{i+1} u(\tau)\right)^T$$

– левый погранслойный ряд решения в окрестности $t = t_*$, а

$$Qz(\tau,\varepsilon) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i x(\tau), \varepsilon^{-1} Q_0 u(\tau) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{i+1} u(\tau)\right)^T$$

– правый погранслойный ряд решения в окрестности $t = t_*$, где $\tau = (t - t_*)/\varepsilon$, а t_* имеет представление (4) и при этом разложение функционала принимает вид

$$\inf_u J(u) = \inf_{u_0} J_0(u_0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \inf_{u_i} \tilde{J}_i(u_i) + \cdots,$$

где

$$\tilde{J}_i(u_i) = J_i(u_i, \tilde{u}_{i-1}, \ldots, \tilde{u}_0), \qquad \tilde{u}_k = \arg\inf_u \tilde{J}_k(u), \quad k = 0, \ldots, i-1.$$

Здесь отметим, что неизвестным в $\tilde{J}_i(u_i)$ является u_i, а $\tilde{u}_{i-1}, \ldots, \tilde{u}_0$ при этом уже известны. Далее (10) подставляется в (7), (8) и приравниваются слева и справа члены одинакового порядка по ε, причем отдельно зависящие от t и от τ. Таким образом получаются вариационные задачи для определения каждого члена асимптотики [4]. При этом коэффициенты разложения точки перехода (4) находятся в результате некоторых задач параметрической оптимизации. Для главных членов разложений имеем

$$J_0(u_0) = J_0^{(-)}(L_0 u, t_0) + J_0^{(+)}(R_0 u, t_0),$$

где каждое слагаемое есть результат решения соответствующей вспомогательной вариационной задачи

$$\begin{gathered} J_0^{(-)}(u, t_0) = \int_{-\infty}^{0} \left(P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0) + \frac{1}{2}u^2 \right) d\tau \to \min_u, \\ \dot{x}(\tau) = u(\tau), \qquad x(0) = -\alpha_0, \quad x(-\infty) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

(здесь $x(\tau) = L_0 x(\tau),\ u(\tau) = L_0 u(\tau)$),

$$\begin{gathered} J_0^{(+)}(u, t_0) = \int_{0}^{+\infty} \left(P(\gamma_0, t_0) - P(\gamma_0 + x, t_0) + \frac{1}{2}u^2 \right) d\tau \to \min_u, \\ \dot{x}(\tau) = u(\tau), \qquad x(0) = -\gamma_0, \quad x(+\infty) = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

(здесь $x(\tau) = R_0 x(\tau),\ u(\tau) = R_0 u(\tau)$).

В функционале (11) выполняем замену $d\tau = dx/u$ и исключаем τ, т.е. имеем

$$J_0^{(-)}(u, t_0) = \int_{0}^{-\alpha_0} \left(P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0) + \frac{1}{2}u^2 \right) \frac{dx}{u} \to \min_u$$

или, с учетом $\Delta_\alpha P = P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0)$, имеем

$$J_0^{(-)}(u, t_0) = \int_{0}^{-\alpha_0} \left(\Delta_\alpha P + \frac{1}{2}u^2 \right) \frac{dx}{u} \to \min_u.$$

Из необходимого условия оптимальности находим, что $u^* = (2\Delta_\gamma P)^{1/2}$ и минимальное значение функционала равняется

$$J_0^{(-)*}(t_0) = \sqrt{2} \int_{0}^{-\alpha_0} (\Delta_\alpha P)^{1/2}\, dx.$$

Для функционала $J_0^{(+)}(t_0)$ его минимальное значение получается аналогично, т.е.

$$J_0^{(+)*}(t_0) = \sqrt{2}\int_{-\gamma_0}^{0} (\Delta_\gamma P)^{1/2}\, dx,$$

где соответствующее $u^* = (2\Delta_\gamma P)^{1/2}$ и при этом $\Delta_\gamma P = P(\gamma_0, t_0) - P(\gamma_0 + x, t_0)$.

Так как в прямой схеме все свободные элементы выбираются путем минимизации соответствующих функционалов, естественно выбирать t_0 из условия минимизации $J_0(u_0)$, т.е.

$$J_0(u_0) = J_0^{(-)*}(t_0) + J_0^{(+)*}(t_0) = \sqrt{2}\left(\int_0^{-\alpha_0} (\Delta_\alpha P)^{1/2}\, dx + \int_{-\gamma_0}^{0} (\Delta_\gamma P)^{1/2}\, dx\right) \to \min_{t_0}.$$

Итак, для t_0 имеем уравнение

$$\frac{dJ_0(u_0)}{dt} = 0, \tag{13}$$

корни которого образуют множество $B = \{t_0 : dJ_0(u_0)/dt = 0\}$.

Докажем, что уравнение (13) эквивалентно уравнению (9). Из (13) имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{-\alpha_0} &\frac{\dot\Delta_\alpha P}{2(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dx + (\Delta_\alpha P)^{1/2}\Big|_{x=-\dot\alpha_0}(-\dot\alpha_0)\\ &+ \int_{-\gamma_0}^{0} \frac{\dot\Delta_\gamma P}{2(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dx + (\Delta_\gamma P)^{1/2}\Big|_{x=-\dot\gamma_0}(-\dot\gamma_0) = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\left(\int_0^{-\alpha_0} \frac{\dot\Delta_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dx + \int_{-\gamma_0}^{0} \frac{\dot\Delta_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dx\right)\\ &= (P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}\dot\alpha_0 - (P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}\dot\gamma_0.\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь проводим замены переменных $z = x + \alpha_0$, $z = x + \gamma_0$ в интегралах

$$\int_0^{-\alpha_0} \frac{\dot\Delta_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dx, \qquad \int_{-\gamma_0}^{0} \frac{\dot\Delta_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dx$$

соответственно. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha_0} &\frac{\dot\Delta_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz + 2\dot\alpha_0 (P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}\\ &- \left(\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot\Delta_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz + 2\dot\gamma_0 (P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}\right) = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}\dot\Delta_\alpha P &= P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0) - P_x(z, t_0)\dot\alpha_0,\\ \dot\Delta_\gamma P &= P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0) - P_x(z, t_0)\dot\gamma_0.\end{aligned} \tag{16}$$

Итак, уравнение (13) представляет собой уравнение (15), которое далее будем сводить к уравнению (9).

Сначала интеграл

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz$$

представляем в виде суммы двух интегралов из (16):

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz = \int_0^{\alpha_0} \frac{P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz + \dot{\alpha}_0 \int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz. \tag{17}$$

Аналогично,

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz = \int_0^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz + \dot{\gamma}_0 \int_0^{\gamma_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz. \tag{18}$$

После дифференцирования по τ функции $u(\tau) = (2\Delta_\alpha P)^{1/2}$ получаем

$$du = \frac{-P_x(z, t_0)}{(2\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz.$$

С учетом $u(-\infty) = 0$

$$u(0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(2\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz. \tag{19}$$

С другой стороны, из явного выражения для $u(\tau)$ имеем

$$u(0) = \sqrt{2}(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует равенство

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz = 2(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \tag{21}$$

Аналогично получается, что

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz = 2(P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \tag{22}$$

После подстановки (21), (22) в (17), (18) соответственно имеем

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz = \int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}}\, dz - 2\dot{\alpha}_0(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}, \tag{23}$$

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz = \int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}}\, dz - 2\dot{\gamma}_0(P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \tag{24}$$

После подстановок (23), (24) в (15) и упрощений, приходим к уравнению (9). Таким образом получили, что $A = B$.

ТЕОРЕМА. *Множество B, определяемое в вариационной задаче* (6)–(8) *при выполнении условий* $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, *совпадает с множеством A, определяемом в сингулярно возмущенной задаче* (1)–(3) *при выполнении условий* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$.

В заключение отметим, что в формуле (9) два интеграла можно объединить в одном:

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma_0} \frac{P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\alpha_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}}\, dz = 0$$

или

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\gamma_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}}\, dz = 0,$$

так как из условия $\mathbf{B}_2$ следует, что $P_x(\alpha(t), t) = 0$, $P_x(\gamma(t), t) = 0$, а также $P_t(\alpha(t), t) = P_t(\gamma(t), t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

[2] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. №7. С. 4–32.

[3] Ни Минь Кань, Дмитриев М. Г. Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика // Автоматика и телемеханика. 1998. №5. С. 41–52.

[4] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

[5] Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. 1985. №3. С. 147–152.

(Ни Минь Кань) Восточно-китайский
педагогический университет, г. Шанхай
(А. Б. Васильева) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(М. Г. Дмитриев) Московский государственный
социальный университет

Поступило
16.05.2003
Исправленный вариант
15.11.2004