М. Г. Дмитриев, Ю. А. Коняев, Асимптотика типа Биркгофа некоторых сингулярно возмущенных задач оптимального управления, *Матем. моделирование*, 2002, том 14, номер 3, 27–29

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2002 год, том 14, номер 3, стр. 27-29

АСИМПТОТИКА ТИПА БИРКГОФА НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© *М.Г.Дмитриев, Ю.А.Коняев*

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования РФ грант № Е00-10-158

Работа доложена на международной конференции, посвященной памяти академика А.Н. Тихонова, 2000 г., Обнинск.

Для одного класса линейно-квадратичных задач оптимального управления (в случае неприменимости метода пограничных функций) предлагается новый вариант метода расщепления (в основе которого лежат идеи Биргкофа-Тамаркина-Ломова), представляющий возможности для построения квазирегулярной асимптотики решения, сингулярности которого выписываются в этом случае в замкнутой аналитической форме.

THE BIRGCHOF TYPE ASYMPTOTICS OF SOME SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Dmitriev M.G., Konyaev Yu.A.

For one class of linear–quadratic optimal control problems (in case when it is not possible to use boundary functions method) it the variant of Birgchof-Tamarkin-Lomov method is offered. This method lets to construct the quasi-regular asymptotics of the singular solution, which may be written in closed analytical form.

Для одного класса линейно-квадратичных задач оптимального управления (в случае неприменимости метода погранфункций (МПФ) [1,2]) предлагается новый вариант метода расщепления (в основе которого лежат идеи Биркгофа – Тамаркина - Ломова [3]), предоставляющие возможности для построения квазирегулярной асимптотики решения, снигулярности которого выписываются в этом случае в замкнутой аналитической форме [4-6].

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу теории управления:

$$\varepsilon\dot{y} = A(t)y + \sqrt{\varepsilon}B(t)u;\ y(0) = y^0;\ (y \in R^n),$$

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}y'\tilde{F}(\varepsilon)y(T) + \frac{1}{2}\int_0^T [\varepsilon y'Q(t)y + u'Ru]dt \to \min_u, \tag{1}$$

где $\tilde{F}(\varepsilon) = \varepsilon F;\ F > 0;\ Q(t) > 0;\ R > 0;\ 0 < \varepsilon << 1$

(штрих означает транспонирование), все матрицы достаточно гладкие функции $t \in [0,T]$.

Необходимое условие оптимальности $\partial H / \partial u = 0$ в задаче (1)–(2), где

$$H = \psi'(A(t)y + \sqrt{\varepsilon}B(t)u) - \frac{\varepsilon}{2}y'Q(t)y - \frac{1}{2}u'Ru;$$

$$\psi = \tilde{\psi}/\varepsilon;\ \dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial y};\ \tilde{\psi}(T) = -\varepsilon Fy(T),$$

$$\varepsilon\dot{\psi} = -A'(t) - \varepsilon Q(t)y;\ \psi(T) = -Fy(T)$$

приводит к оптимальному управлению $u=\sqrt{\varepsilon}R^{-1}B'(t)\psi$ и соответствующей краевой задаче принципа максимума:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{y} = A(t)+\varepsilon D(t)\psi;\ \ y(0,\varepsilon)=y^0;\\
&\varepsilon\dot{\psi} = \varepsilon Q(t)y - A'(t)\psi;\ \ \psi(T)=-Fy(T);\\
&\ (D(t)=B(t)R^{-1}B'(t)).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В случае, когда спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет условиям:

$$
\lambda_{0j}(t)\neq\lambda_{0k}(t);\ (j\neq k;\ j,k=\overline{1,n};\ t\in[0,T]),
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\lambda_{0j}(t)\le 0;\ \operatorname{Re}\int_0^T\lambda_{0j}(t)dt<0\ \ (j=\overline{1,n};\ t\in[0,T]),\\
&\Lambda_0(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t),\dots,\lambda_{0n}(t)\}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

сингулярно возмущенная задача (4) не может быть исследована МПФ, так как его алгоритм существенным образом опирается на условие $\operatorname{Re}\lambda_{0j}<0$, которое гарантирует стабилизируемость или асимптотическую устойчивость соответствующей присоединенной системы [2]. При выполнении условий (5) и (6) задача (4) может быть исследована с помощью метода расщепления [4–6], позволяющего изучать различные классы сингулярно возмущенных задач. Для удобства дальнейшего изложения запишем задачу (4) в виде

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{x} = P(t,\varepsilon)x;\ \ N_1x(0,\varepsilon)+N_2x(T,\varepsilon)=a;\\
&(P(t,\varepsilon)=P_0(t)+\varepsilon P_1(t);\ \ x=(y,\psi)';\ \ a=(y^0,0)'),\\
&P_0(t)=\begin{pmatrix}A(t) & 0\\ 0 & -A'(t)\end{pmatrix};\ P_1(t)=\begin{pmatrix}0 & D(t)\\ Q(t) & 0\end{pmatrix};\\
&N_1(t)=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ N_1(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ E & F\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Теорема 1. *Если спектр* $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ *матрицы* $A(t)$ *удовлетворяет неравенствам* (5), (6), *тогда существует единственное и ограниченное при* $\varepsilon\to 0$ *решение задачи* (7), *асимптотика которого может быть записана в квазирегулярной форме*:

$$
\begin{aligned}
&x(t,\varepsilon)=S_0(t)(E+\sum_1^N\overline{\overline{H}}_k\varepsilon^k)\Phi(t,\varepsilon)c+\underline{\underline{O}}(\varepsilon^{N+1}),\\
&\text{где}\ \ \Phi(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{e^{\varphi_1(t,\varepsilon)},e^{\varphi_2(t,\varepsilon)}\};\\
&\varphi_1(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^t\sum_0^N\Lambda_k(s)\varepsilon^k ds;\ \ \varphi_2(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_T^t\sum_0^N\Lambda_k(s)\varepsilon^k ds;
\end{aligned}
\tag{8}
$$

при этом «диагональные» $\Lambda_k(t)$ *и «бездиагональные»* $\overline{\overline{H}}_k(t)$ *матрицы однозначно определяются в ходе доказательства.*

Доказательство теоремы 1 опирается на результаты работ [4, 6], где фигурирует также условие $\det L\neq 0$. Здесь постоянная матрица $L=(\vec{L}_{11},\vec{L}_{22})$ определяется столбцами матриц

$$
\begin{aligned}
&L_1=N_1S_0(0)=(\vec{L}_{11},\vec{L}_{12})\ \ и\ \ L_2=N_2S_0(T)=(\vec{L}_{21},\vec{L}_{22})\\
&S_0^{-1}(t)P_0(t)S_0(t)=\operatorname{diag}\{\Lambda_0(t),-\Lambda_0(t)\};
\end{aligned}
$$

Но в задаче (4) или (7) это условие всегда имеет место, так как

$$L_1 = N_1 S_0(0) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{01}(0) & 0 \\ 0 & S_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{01}(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = N_2 S_0(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{01}(T) & 0 \\ 0 & S_{02}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ FS_{01}(T) & S_{02}(T) \end{pmatrix},$$

$$(S_0(t) = \operatorname{diag}\{S_{01}(T), S_{01}(T)\})$$

т.е. в данном случае матрица $L = \operatorname{diag}\{S_{01}(0), S_{01}(T)\}$ всегда будет невырожденной, ибо матрицы $S_{01}(t)$ и $S_{02}(t)$ определяемые соотношениями:

$$S_{01}^{-1} A(t) S_{01}(t) = \Lambda_0(t); \quad S_{02}^{-1} A'(t) S_{02}(t) = \Lambda_0(t);$$

и образующие блочно-диагональную матрицу $S_0(t)$, не вырожденны на всем отрезке $[0, T]$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение краевой задачи* (4) *или экстремаль Понтрягина для задачи* (1)–(2) *существует, единственно и имеет асимптотическое представление вида* (8).

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *для достаточно малых* $\varepsilon > 0$

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_N) - J_\varepsilon^* = O(\varepsilon^{2N+3}),$$

где $\tilde{u}_N = \sqrt{\varepsilon} R^{-1} B' \psi_N(t, \varepsilon)$, $J_\varepsilon^* = \inf J_\varepsilon(u)$.

Таким образом, асимптотика порядка N оптимального управления является допустимым управлением в задаче (1), (2) и порядок субоптимальности этого допустимого управления равен ($2N$+3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. Н.М., 1972, с.272.
2. *А.Б.Васильева, М.Г.Дмитриев.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. Итоги науки и техники. Математический анализ. Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1982, т.20, с.3-77.
3. *С.А.Ломов.* Введение в общую теории сингулярных возмущений. – М.,Н., 1982, с.400.
4. *Ю.А.Коняев.* Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач. // Известия ВУЗ. Математика. 1992, №2, с.57-61.
5. *Ю.А.Коняев.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений. // Математический сборник. 1993, №12, с.133-144.
6. *Ю.А.Коняев.* Метод расщепления в теории регулярных и сингулярных возмущений. // Известия ВУЗ. Математика. 2000, № 6, с.10-15.