М. Г. Дмитриев, Ни Минь Кань, Асимптотика контрастных экстремалей в простейшей векторной вариационной задаче, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1165–1178

Асимптотика контрастных экстремалей в простейшей векторной вариационной задаче*

М. Г. ДМИТРИЕВ, НИ МИНЬ КАНЬ
Институт программных систем РАН
e-mail: dmitriev@spoc.botik.ru

УДК 517.97

Ключевые слова: сингулярные возмущения, контрастные структуры.

Аннотация

В работе изучаются контрастные структуры (траектории с внутренними и пограничными слоями) в простейшей векторной вариационной задаче. Получаются новые выводы о том, что структуры типа «всплеска» связаны с точками локального максимума, а структуры типа «ступеньки» — с точками глобального максимума некоторого функционала.

Abstract

M. G. Dmitriev, Ni Ming Kang, Asimptotics of contrast extremals in simplest vector variational problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1165–1178.

We investigate contrast structures «trajectories with inner and outer boundary layers» in simplest vector variational problem. We prove that spike structures are connected with the points of local maximum and passage structures — with points of global maximum of some characteristic functional.

§ 1. Постановка задач

В последнее время внимание многих исследователей привлекают так называемые контрастные структуры. Их решения имеют зоны резкого пространственно-временного изменения (пограничные и внутренние слои). Обширная библиография по этому вопросу содержится в [3–5, 7, 11]. Рассмотрим следующую возмущенную задачу P_ε

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int\limits_0^T \left(a(x_\varepsilon, t) + b'(x_\varepsilon, t)u_\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u_\varepsilon' u_\varepsilon \right) dt \longrightarrow \inf_{u_\varepsilon},$$

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t), \tag{1}$$

$$x_\varepsilon(0, \varepsilon) = 0, \quad x_\varepsilon(T, \varepsilon) = 0, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \ll 1, \tag{2}$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96–01–00804, и проекта INTAS–93–2622.

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1165–1178.

где $x_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(x_\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n$, $a(x_\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$, T — данное положительное число, штрих означает транспонирование, $(x_\varepsilon, u_\varepsilon) \in D = X \times U$, где D — множество допустимых пар $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$, где $u_\varepsilon(t)$ — достаточно гладкая вектор-функция.

Сформулированная задача, с одной стороны, имеет типичные черты для теории оптимального управления, а с другой, необходимые условия оптимальности приводят нас к специальному классу сингулярно возмущенных краевых задач:

$$\varepsilon^2 \ddot{x}_\varepsilon = g(x_\varepsilon, t), \tag{3}$$

$$x(0, \varepsilon) = 0, \quad x(T, t) = 0, \tag{4}$$

где $g(x_\varepsilon, t) = \frac{\partial a}{\partial x}(x_\varepsilon, t) - \frac{\partial b}{\partial t}(x_\varepsilon, t)$.

В работе [3] Васильевой А. Б. и Бутузовым В. Ф. в скалярном случае ($n = 1$) показано, что сингулярно возмущенная задача (3), (4) может иметь решения с внутренним слоем типа «всплеск» и решения с внутренним переходным слоем типа «ступеньки». Теория контрастных структур интенсивно развивается в последнее время. Однако векторный случай имеет свои особенности, и в литературе по сингулярным возмущениям практически не изучался. Мы ограничимся здесь только алгоритмом построения асимптотики, которая аналогична решению типа «всплеска» и решению с переходом с корня на корень, и не затрагиваем вопросы существования решения задачи (1), (2) вблизи построенной асимптотики. Известно, что траектории, имеющие «всплеск», на фазовой плоскости образуют петлю сепаратрисы, а траектории с переходами с корня на корень — ячейку. В нашей работе вариационная природа краевой задачи (3), (4), с одной стороны, позволяет связать эти контрастные структуры с точками локального и глобального максимума некоторого характеристического функционала задачи, а с другой, высказать гипотезу, что определенный вариационный смысл имеют контрастные структуры и в других сингулярно возмущенных краевых задачах, тем более, что в частном скалярном случае для задачи типа (3), (4) Боглаевым Ю. П. в [2] был получен аналогичный результат для структуры с переходом с корня на корень.

§ 2. Асимптотика типа «всплеска»

Наряду с задачей P_ε рассмотрим так называемую вырожденную задачу $\bar{P}$, получающуюся из (1), (2) при $\varepsilon = 0$:

$$\bar{J}(\bar{u}) = \int_0^T \left(a(\bar{x}, t) + b'(\bar{x}, t)\bar{u}\right) \, dt \longrightarrow \inf_{\bar{u}},$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{u}(t), \tag{5}$$

$$\bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(T) = 0. \tag{6}$$

I. Пусть $\bar{J}^* = \inf_{\bar{u}} \bar{J} > -\infty$.

II. Пусть функции $a(x,t), b(x,t)$ достаточно гладкие по своим аргументам, причем $\frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$, $i,j = \overline{1,n}$.

С помощью функции Кротова $\varphi(x,t)$ [10] можно переписать функционал (5) в виде

$$\bar{J}(\bar{u}) = -\varphi(0,0) + \varphi(0,T) - \int_0^T P(\bar{x},t)\,dt,$$

где $P(x,t) = -a(x,t) + \varphi_t(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\varphi_x(x,t) = b(x,t)$.

Для построения асимптотики воспользуемся методом прямой схемы [1], которая заключается в прямом подставлении постулируемого асимптотического разложения в условия исходной вариационной задачи.

Вспомогательная лемма 1 ([10]). *Если на управлениях $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, из некоторого множества U функционал $J(u)$ при всех достаточно малых ε допускает разложение*

$$J(u) = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \cdots + \varepsilon^{k-1} a_{k-1} + \varepsilon^k a_k + O(\varepsilon^{k+1}),$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ не зависят от $u(t) \in U$ и, кроме того, числа $a_1, \ldots, a_k$ не зависят от ε, то из условия

$$J(u^*) = \inf_{u\in U} J(u)$$

следует

$$a_k(u^*) = \inf_{u\in U} a_k(u).$$

Вспомогательная лемма 2. *Пусть функция f имеет следующее разложение для любого n:*

$$f(w_0,\ldots,w_n,\varepsilon) = f_0(w_0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i f_i(w_i,\ldots,w_0) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где все функции f, f_i, $i=\overline{0,n}$, имеют минимум в некоторой открытой области. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\min_{(w_0,\ldots,w_n)} f(w_0,\ldots,w_n,\varepsilon) = \min_{w_0} f_0(w_0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \min_{w_i} \tilde{f}_i(w_i) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $\tilde{f}_i(w_i) = f_i(w_i, \tilde{w}_{i-1},\ldots,\tilde{w}_0)$, $\tilde{w}_k = \arg\min_{w} \tilde{f}_k(w)$, $k=\overline{0,i-1}$.

Доказательство. Очевидно, что утверждение верно для $n=0$. Для $n=1$ мы имеем

$$f(w_0,w_1,\varepsilon) = f_0(w_0) + \varepsilon f_1(w_0,w_1) + \varepsilon \inf_{w_1} f_1(w_0^*,w_1) + O(\varepsilon^2),$$

а из принципа сечения вытекает

$$\inf_{(w_0,w_1)} f(w_0,w_1,\varepsilon) = \inf_{w_1}\inf_{w_0} f(w_0,w_1,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\inf_{(w_0,w_1)} f(w_0,w_1,\varepsilon) = \inf_{w_1} f(w_0^*,w_1,\varepsilon) =$$
$$= \inf_{w_0} f_0(w_0) + \varepsilon \inf_{w_1} f_1(w_0^*,w_1) + O(\varepsilon^2) = \inf_{w_0} f_0(w_0) + \varepsilon \inf_{w_1} \tilde{f}_1(w_1) + O(\varepsilon^2),$$

где $\tilde{f}(w_1) = f_1(w_0^*) = f_1(w_0^*,w_1)$, $w_0^* = \arg\inf\limits_{w_0} f_0(w_0)$, т. е. утверждение верно для $n=1$.

Пусть утверждение верно для $n=k$, т. е.

$$\inf_{(w_0,\dots,w_k)} f(w_0,w_1,\dots,w_k,\varepsilon) = \inf_{w_0} f_0(w_0) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \inf_{w_i} \tilde{f}_i(w_i) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Покажем, что аналогичное свойство имеет место и для $n=k+1$. Обозначим

$$\inf_{(w_0,\dots,w_{k+1})} f(w_0,\dots,w_{k+1},\varepsilon) = f(w_0^*,w_1^*,\dots,w_{k+1}^*,\varepsilon).$$

Имеем

$$f(w_0^*,\dots,w_{k+1}^*,\varepsilon) = f_0(w_0^*) + \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon^i f_i(w_0^*,\dots,w_i^*) + O(\varepsilon^{k+2}).$$

Очевидно, что для любого элемента $(w_0,\dots,w_{k+1})$ имеем

$$0 \leqslant f(w_0,\dots,w_{k+1},\varepsilon) - f(w_0^*,\dots,w_{k+1}^*,\varepsilon) = f_0(w_0) - f_0(w_0^*) +$$
$$+ \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon^i \bigl(f_i(w_0,\dots,w_i) - f_i(w_0^*,\dots,w_i^*)\bigr)\right] + O(\varepsilon^{k+2}), \quad (7)$$

Предположим, что найдется хотя бы одна точка $\tilde{w}_0$, что $f_0(\tilde{w}_0) - f_0(w_0^*) < 0$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$f_0(\tilde{w}_0) - f_0(w_0^*) + \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon^i \bigl(f_i(\tilde{w}_0,\dots,w_i) - f_i(w_0^*,\dots,w_i^*)\bigr)\right] < 0,$$

т. е. $f(\tilde{w}_0,w_1,\dots,w_{k+1},\varepsilon) - f(w_0^*,w_1^*,\dots,w_{k+1}^*,\varepsilon) < 0$, а это противоречит неравенству (7). Поэтому $f_0(w_0^*) = \inf\limits_{w_0} f_0(w_0)$, и согласно вспомогательной лемме 1 имеем

$$\inf_{(w_0,\dots,w_{k+1})} f(w_0,\dots,w_{k+1}) = \inf_{(w_1,\dots,w_{k+1})} \inf_{w_0} f(w_0,\dots,w_{k+1}) =$$
$$= \inf_{(w_1,\dots,w_{k+1})} f(w_0^*,w_1,\dots,w_{k+1}) =$$

$$= \inf_{(w_1,\dots,w_{k+1})}\left(\inf_{w_0} f_0(w_0) + \sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon^i f_i(w_0^*, w_1, \dots, w_{k+1}) + O(\varepsilon^{k+2})\right) =$$
$$= \inf_{(w_1,\dots,w_{k+1})}\left(\inf_{w_0} f_0(w_0) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon^{i-1} f_i(w_0^*, w_1, \dots, w_{k+1}) + O(\varepsilon^{k+2})\right)\right).$$

Далее для второго слагаемого применяем основное предположение индукции при $n = k$ и в итоге имеем

$$\inf_{(w_0,\dots,w_{k+1})} f(w_0,\dots,w_{k+1},\varepsilon) = \inf_{w_0} f_0(w_0) + \sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon^i \inf_{w_i}\tilde f_i(w_i) + O(\varepsilon^{k+2}),$$

где $\tilde f_i(w_i) = f_i(w_i, w_{i-1}^*, \dots, w_0^*)$, $w_j^* = \arg\inf\limits_w \tilde f_j(w)$, $j = 0,\dots,i-1$, что и требовалось доказать.

Здесь ограничимся рассмотрением случая, когда на отрезке $[0,T]$ имеется только одна точка $t = t_*$, в окрестности которой происходит «всплеск» решения. Случай нескольких таких точек можно исследовать тем же методом.

Точку скачка t_*, в которой $\dot x(t_*,\varepsilon) = 0$, будем искать в виде $t_* = t_0 + \varepsilon t_1 + \ldots + \varepsilon^n t_n + \ldots$.

Стандартным способом строим асимптотику в виде [6]

$$x(t,\varepsilon) = \bar x(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau_0,\varepsilon) + Qx(\tau,\varepsilon) + Rx(\tau_1,\varepsilon), \qquad (8)$$
$$u(t,\varepsilon) = \dot x(t,\varepsilon),$$

где $\bar x(t,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\bar x_j(t)\varepsilon^j$ — регулярный ряд; $\Pi x(\tau_0,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\Pi x(\tau_0)$ — пограничный ряд в окрестности точки $t = 0$ ($\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$); $Qx(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^i Q_j x(\tau)$ — ряд, описывающий «всплеск» решения в окрестности точки $t = t_*$ ($\tau = \frac{t-t_*}{\varepsilon}$); $Rx(\tau_1,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j R_j x(\tau_1)$ — пограничный ряд в окрестности точки $t = T$ ($\tau_1 = \frac{t-T}{\varepsilon}$).

$\mathbf{A_1}$. Пусть функция $P(x,t)$ имеет локальный максимум в точке $x = \alpha(t)$ (т. е. $P_x(\alpha(t),t) = 0$, $P_{xx}(\alpha(t),t) < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$), причем существует функция $x = \gamma(t)$, такая что $P(\gamma(t),t) = P(\alpha(t),t)$ и $P_x(\gamma(t),t) \neq 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (для определенности $\alpha_i(t) < \gamma_i(t)$, $i = \overline{1,n}$).

Из условия $\mathbf{A_1}$ следует, что $x = \alpha(t)$ является точкой покоя типа седла для присоединенного уравнения (1.3) (t фиксировано).

$\mathbf{A_2}$. Пусть в фазовом пространстве сепаратриса, которая выходит из точки покоя типа седла, образует «петлю», т. е. сепаратриса состоит из гомоклинических точек [12].

Стандартным способом для регулярных членов в i-ом приближении имеем

$$\dot{\bar x}_i(t) = \bar u_i(t), \quad \bar x_i(0) + \Pi_i x(0) = 0, \quad \bar x_i(T) + R_i x(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots.$$

Для пограничных функций $Q_i x(\tau)$ получаем следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_i x(\tau)}{d\tau} = Q_i u(\tau), \\ \dot{Q}_i x(0) = 0, \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_i x(\tau) = 0. \end{cases}$$

Из разложения критерия $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j J_j$ получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если выполнены условия* **I**, **II**, $\mathbf{A_1}$, *тогда справедливо тождество* $J_0^* = \bar{J}^*$ *(здесь звездочка — символ оптимальности).*

Доказательство. J_0 имеет такой вид:

$$J_0 = \int\limits_0^T (a(\bar{x}_0(t), t) + b'(\bar{x}_0(t), t)\bar{u}_0(t))\, dt + \int\limits_0^{+\infty} b'(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau_0), 0)\Pi_0 u(\tau_0)\, d\tau_0 +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b'(\bar{x}_0(t_0) + Q_0 x(\tau), t_0) Q_0 u(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} b'(\bar{x}_0(T) + R_0 x(\tau_1), T) R_0 u(\tau_1)\, d\tau_1.$$

С учетом того, что $\frac{d\varphi}{dt}(\bar{x}_0, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{x}_0, t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\bar{x}_0, t)\bar{u}_0$, $\frac{d\Pi_0 x(\tau_0)}{d\tau_0} = \Pi_0 u(\tau_0)$, $\frac{dQ_0 x(\tau)}{d\tau} = Q_0 u(\tau)$, $\frac{dRx_0(\tau_1)}{d\tau_1} = R_0 u(\tau_1)$, имеем

$$J_0 = \int\limits_0^T (a(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_t(x, t) + (b(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_x(x, t))'\bar{u}_0 + \frac{d\varphi}{dt}(x, t)(\bar{x}_0(t), t))\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{d\tau_0}(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau_0), 0)\, d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\varphi}{d\tau_1}(\bar{x}_0(T) + R_0 x(\tau_1), T)\, d\tau_1 =$$
$$= \varphi(\bar{x}_0(T) + R_0 x(0), T) - \varphi(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0), 0) + \int\limits_0^T (a(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_t(x, t))\, dt =$$
$$= -\varphi(0, 0) + \varphi(0, T) - \int\limits_0^T P(\bar{x}_0(t), t)\, dt.$$

Из последнего выражения получим равенство ${J_0}^* = \bar{J}^*$. Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что J_0 не зависит от пограничных функций $\Pi_0 x, Q_0 x, R_0 x$. Нетрудно показать, что после простых, но достаточно громоздких преобразований получаем следующее выражение для $Q_1 J$:

$$Q_1J = 2\int\limits_0^{+\infty}\Big(P(\alpha(t_0),t_0) - P(\alpha(t_0)+Q_0x(\tau),t_0) + \frac{1}{2}(Q_0u(\tau))'Q_0u(\tau)\Big)\,d\tau.$$

В силу условия $\mathbf{A_1}$ получаем начальное условие $Q_0x(0) = \gamma(t_0) - \alpha(t_0)$. Следовательно, мы можем переписать задачу Q_0P в виде

$$Q_0P\colon\quad \begin{cases} Q_1J = 2\int\limits_0^{+\infty}\Big(P(\alpha(t_0),t_0) - P(\alpha(t_0)+Q_0x(\tau),t_0) + \\ \qquad + \frac{1}{2}(Q_0u(\tau))'Q_0u(\tau)\Big)d\tau \longrightarrow \min\limits_{Q_0u}, \\ \dfrac{dQ_0x(\tau)}{d\tau} = Q_0u(\tau), \\ Q_0x(0) = \gamma(t_0)-\alpha(t_0), \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_0x(\tau) = 0. \end{cases}$$

Лемма 2 ([13]). *Если выполнены условия* $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{A_1}$, *то для любых* $Q_0x(0) \in S$ *оптимальное решение* $Q_0^*x(\tau), Q_0^*u(\tau)$ *задачи* Q_0P *существует, единственно и удовлетворяет оценкам*

$$\|Q_0^*x(\tau)\| \leqslant Ce^{-\beta\tau}, \quad \|Q_0^*u(\tau)\| \leqslant Ce^{-\beta\tau}, \quad \tau \geqslant 0,$$

где β *и* C *— некоторые положительные числа,* S *— область влияния задачи* Q_0P.

Мы можем искать t_0 как параметр, минимизирующий Q_1^*J, т. е. $t_0 = \arg\min\limits_{0<t_0<T} Q_1J^*(\gamma(t_0)-\alpha(t_0))$. Отсюда следует

$$\frac{d}{dt}Q_1J^*(\gamma(t)-\alpha(t))\Big|_{t=t_0} = 0. \tag{9}$$

$\mathbf{A_3}$. Пусть уравнение (9) имеет единственное решение $t_0 \in (0,T)$, причем $\frac{d^2}{dt^2}Q_1J^*(\gamma(t)-\alpha(t))\Big|_{t=t_0} > 0$.

Аналогично определяются пограничные функции $\Pi_0^*x(\tau_0)$ и $R_0^*x(\tau_1)$ при следующем условии.

$\mathbf{A_4}$. Пусть начальные значения $\Pi_0x(0) = -\alpha(0)$, $R_0x(0) = -\gamma(T)$ принадлежат областям влияния задач Π_0P, R_0P соответственно.

Далее описанная процедура повторяется, и мы можем получить задачи приближенной декомпозиции для членов разложения более высокого порядка:

$$\bar{P}_{n+1}\colon\quad \begin{cases} \bar{J}_{2(n+1)} = -\int\limits_0^T\Big(\frac{1}{2}(\bar{x}^0_{n+1}(t))'P_{xx}(\alpha(t),t)\bar{x}_{n+1}(t) + \bar{H}^1_{n+1}(t)\bar{x}_{n+1}(t) + \\ \qquad + \bar{H}^2_{n+1}(t)\bar{u}_{n+1}(t)\Big)dt \longrightarrow \inf\limits_{\bar{u}_{n+1}}, \\ \dot{\bar{x}}_{n+1}(t) = \bar{u}_{n+1}(t), \end{cases}$$

где $\bar{H}^1_{n+1}(t), \bar{H}^2_{n+1}(t)$ зависят от известных членов $\bar{w}_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$
Q_{n+1}P\colon \quad \begin{cases} Q_{2(n+1)+1}J = -2\displaystyle\int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{2}(Q_{n+1}x)' P_{x^2}(\alpha(t_0) + Q_0 x(\tau), t_0) Q_{n+1}x(\tau) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(Q_{n+1}u(\tau))' Q_{n+1}u(\tau) + H^1_{n+1}(\tau) Q_{n+1}x(\tau) + \\ \qquad\qquad + H^2_{n+1}(\tau) Q_{n+1}u(\tau)\Big) d\tau \longrightarrow \min\limits_{Q_{n+1}u}, \\ \dfrac{dQ_{n+1}x(\tau)}{d\tau} = Q_{n+1}u(\tau), \\ Q_{n+1}\dot{x}(0) = 0, \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_{n+1}x(\tau) = 0, \end{cases}
$$

а $\bar{H}^1_{n+1}(\tau), \bar{H}^2_{n+1}(\tau)$ зависят от известных членов $\bar{Q}_j w(\tau) = (Q_j x(\tau), Q_j u(\tau))'$, $\bar{w}_l(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n+1$.

Из линейно-квадратичных задач $\bar{P}_{n+1}$, $Q_{n+1}P$ и Π_{n+1}, $R_{n+1}P$ для произвольного n мы можем определить $\bar{x^*_n}(t)$, $Q^*_n x(\tau)$, $\Pi^*_n x(\tau_0)$, $R^*_n x(\tau_1)$ [9].

Минимизируя коэффициенты J_j в разложении функционала J_ε, найдем t_n, $n \geqslant 1$. Обозначим частичные суммы асимптотики (8) и функционала через $\tilde{x}_n(t,\varepsilon)$ и $\tilde{J}_n$ соответственно, где

$$
\tilde{x}_n(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j (\bar{x}_j(t) + \Pi_j x(\tau_0) + Q_j x(\tau) + R_j x(\tau_1)),
$$

$$
\tilde{u}_n(t,\varepsilon) = \dot{\tilde{x}}_n(t,\varepsilon), \quad \tilde{J}_n = \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^j J_j.
$$

Отметим, что $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$ не является допустимой парой, т. к. краевые условия (2) не выполнены, т. е. $\tilde{x}_n(0,\varepsilon) = P_1(\varepsilon, n)$, $\tilde{x}_n(T,\varepsilon) = P_2(\varepsilon, n)$, где $P_i(\varepsilon, n) = O(\varepsilon^{n+1})$ $(i = 1, 2)$.

Для получения допустимой пары (x, u) введем следующие функции:

$$
\theta_n(t,\varepsilon) = Ae^{-\frac{t}{\varepsilon}} + Be^{-\frac{T-t}{\varepsilon}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
$$

где коэффициенты A, B выбираем так, чтобы $\theta_n(0,\varepsilon) = -P_1(\varepsilon, n)$, $\theta_n(T,\varepsilon) = -P_2(\varepsilon, n)$. Для этого нужно взять $A = (-P_1(\varepsilon,n) + e^{-\frac{T}{\varepsilon}} P_2(\varepsilon,n))/(1 - e^{-\frac{2T}{\varepsilon}})$, $B = (-P_2(\varepsilon,n) + e^{-\frac{T}{\varepsilon}} P_1(\varepsilon,n))/(1 - e^{-\frac{2T}{\varepsilon}})$. Очевидно, A, B — величины порядка ε^{n+1}, поэтому $\theta_n(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Положим $X_n(t,\varepsilon) = \tilde{x}_n(t,\varepsilon) + \theta_n(t,\varepsilon)$, $U_n(t,\varepsilon) = \dot{X}_n(t,\varepsilon)$, тогда пара $(X_n(t,\varepsilon), U_n(t,\varepsilon))$ является допустимой. Обозначая $J_n(U_n) = \tilde{J}_n(U_n)$, имеем $\tilde{J}_n(\tilde{u}_n) = J_n(U_n) + O(\varepsilon^{n+2})$.

Теорема 1. *Если существует точное решение $(x^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon)$ задачи (1), (2) и выполнены условия* **I**, **II**, $\mathbf{A_1}$–$\mathbf{A_5}$, *тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы* *следующие оценки:*

$$\|x_\varepsilon^* - X_n\| \leqslant C\varepsilon^{n+1}, \quad \|u_\varepsilon^* - U_n\| \leqslant C\varepsilon^{n+1},$$
$$\|J_\varepsilon^* - J_n(U_n)\| \leqslant C\varepsilon^{2n+2}.$$

§ 3. Асимптотика типа «ступеньки»

$\mathbf{B_1}$. Пусть существуют вектор-функции $\alpha(t) \in X$, $\gamma(t) \in X$, такие что $P(\alpha(t),t) = P(\gamma(t),t) = \max\limits_x P(x(t),t)$, причем $P_{xx}(\alpha(t),t) < 0$, $P_{xx}(\gamma(t),t) < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (для простоты максимумы $\alpha(t), \gamma(t)$ соседние).

$\mathbf{B_2}$. Пусть в фазовом пространстве сепаратрисы, которые соединяют седла $(\alpha,0)$, $(\gamma,0)$, образуют ячейку.

Значение точки перехода t_* будем искать в виде

$$t_* = t_0 + \varepsilon t_1 + \ldots + \varepsilon^k t_k + \ldots .$$

Значение функции $x(t_*,\varepsilon)$ в точке t_* равняется k, k можно представить в виде $k = k_0 + \varepsilon k_1 + \ldots + \varepsilon^n k_n + \ldots$.

Асимптотику решения задачи построим в виде

$$x(t,\varepsilon) = \begin{cases} \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau_0,\varepsilon) + Q^{(1)}x(\tau,\varepsilon), & 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ \bar{x}^{(2)}(t,\varepsilon) + Rx(\tau_1,\varepsilon) + Q^{(2)}x(\tau,\varepsilon), & t_* \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1 = \frac{t-T}{\varepsilon}$, $\tau = \frac{t-t_*}{\varepsilon}$.

Лемма 3. *Если выполнены условия* **I**, **II**, $\mathbf{B_1}$, *то* $\bar{J}^* = J_0^*$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Для задач $Q_0^{(1)}P$, $Q_0^{(2)}P$ имеем

$$Q_0^{(1)}P\colon \quad \begin{cases} Q_1^{(1)}J = -\displaystyle\int\limits_0^{-\infty} \Big(P(\alpha(t_0),t_0) - P(\alpha(t_0) + Q_0^{(1)}x(\tau),t_0) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(Q_0^{(1)}u(\tau))'(Q_0^{(1)}u(\tau)) \Big) d\tau \longrightarrow \inf\limits_{Q_0^{(1)}u}, \\ \dfrac{dQ_0^{(1)}x(\tau)}{d\tau_0} = Q_0^{(1)}u(\tau), \\ Q_0^{(1)}x(0) = k_0 - \alpha(t_0), \quad \lim\limits_{\tau\to-\infty} Q_0^{(1)}x(\tau) = 0. \end{cases}$$

$$Q_0^{(2)}P\colon\quad \begin{cases} Q_1^{(2)}J = -\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\Big(P(\gamma(t_0),t_0) - P(\gamma(t_0)+Q_0^{(2)}x(\tau),t_0) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(Q_0^{(2)}u(\tau))'(Q_0^{(2)}u(\tau))\Big)d\tau \longrightarrow \inf\limits_{Q_0^{(2)}u}, \\ \dfrac{dQ_0^{(2)}x(\tau)}{d\tau} = Q_0^{(2)}u(\tau), \\ Q_0^{(2)}x(0) = k_0 - \gamma(t_0), \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_0^{(2)}x(\tau) = 0. \end{cases}$$

Лемма 4. *Если выполнены условия* **I**, **II**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, *то для любых* $Q_0^{(j)}x(0) \in S^j$ $(j=1,2)$ *оптимальное решение* $Q_0^{*(j)}x(\tau)$, $Q_0^{*(j)}u(\tau)$ *задач* $Q_0^{(j)}P$ $(j=1,2)$ *существует, единственно и удовлетворяет оценкам*

$$\|Q_0^{*(1)}x(\tau)\| \leqslant Ce^{\beta\tau}, \quad \|Q_0^{*(1)}u(\tau)\| \leqslant Ce^{\beta\tau}, \qquad \tau \leqslant 0,$$
$$\|Q_0^{*(2)}x(\tau)\| \leqslant Ce^{-\beta\tau}, \quad \|Q_0^{*(2)}u(\tau)\| \leqslant Ce^{-\beta\tau}, \qquad \tau \geqslant 0,$$

где C *и* β *— некоторые положительные числа,* S^j *— области влияния задач* $Q_0^{(j)}P$ $(j=1,2)$.

Мы можем искать (k_0, t_0) как вектор параметров, минимизирующий

$$M_0(t_0,k_0) = Q_1^{(1)}J^*(t_0, Q_0^{(1)}x(0)) + Q_1^{(2)}J^*(t_0, Q_0^{(2)}x(0)),$$

где $Q_1^{(j)}J^*$ — оптимальное значение $Q_1^{(j)}J$ для конкретного $Q_0^{(j)}x(0)$ $(j=1,2)$, т. е. $(t_0,k_0) = \arg\min\limits_{(t,k)} M_0(t,k)$ или пара (t_0,k_0) удовлетворяет уравнениям $\frac{\partial M_0}{\partial t}(t_0,k_0) = 0$, $\frac{\partial M_0}{\partial k}(t_0,k_0) = 0$.

$\mathbf{B_3}$. Пусть последняя система уравнений имеет решение (t_0,k_0), причем $\frac{\partial^2 M}{\partial(t_0,k_0)^2}(t_0,k_0)$ — положительно определенная матрица.

$\mathbf{B_4}$. Пусть начальные значения $\Pi_0 x(0) = -\alpha(0)$, $R_0x(0) = -\gamma(T)$ принадлежат областям влияния задач $\Pi_0 P$, R_0P соответственно.

Для следующих членов асимптотики получаем как обычно линейно-квадратичные задачи.

После образования допустимых, на основе пар (X_n, U_n) — частичных сумм асимптотики порядка n, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Если существует точное решение* $(x_\varepsilon^*, u_\varepsilon^*)$ *задачи* (1), (2) *и выполнены условия* **I**, **II**, $\mathbf{B_1}$–$\mathbf{B_4}$, *то для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *справедливы следующие оценки:*

$$\|x_\varepsilon^* - X_n\| \leqslant C\varepsilon^{n+1}, \quad \|u_\varepsilon^* - U_n\| \leqslant C\varepsilon^{n+1},$$
$$\|J_\varepsilon^* - J_n(U_n)\| \leqslant C\varepsilon^{2n+2}.$$

§ 4. Пример

Пусть

$$J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^1 \Big(-\frac{1}{12}(x+y)^3 + \frac{1}{4}(x-y)^2 + (s(t)+t)u_1 +$$

$$+ (s(t)-t)u_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_1^2+u_2^2) \Big) dt \longrightarrow \min_{(u_1,u_2)}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = u_1, \quad x(0,\varepsilon) = 0, \quad x(1,\varepsilon) = 0, \\ \dot{y} = u_2, \quad y(0,\varepsilon) = 0, \quad y(1,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $s(t) = -\int\limits_0^t q^2(t)\,dt$, $q(t) > 0$, $\ddot{q}(t) > 0$ и $|q(t)|$ является достаточно малой величиной. Обозначим $a(x,y,t) = -\frac{1}{12}(x+y)^3 + \frac{1}{4}(x-y)^2$, $b(x,y,t) = (s(t)+t, s(t)-t)'$.

Запишем уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\ddot{x} = q^2(t) - \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y) - 1, \\ \varepsilon^2\ddot{y} = q^2(t) - \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y) + 1, \end{aligned} \tag{12}$$

$$x(0,\varepsilon) = 0, \quad x(1,\varepsilon) = 0, \quad y(0,\varepsilon) = 0, \quad y(1,\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

Сделав замену $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$, получаем распадающуюся систему

$$\varepsilon^2\ddot{\varphi} = q^2(t) - \varphi^2, \quad \varphi(0,\varepsilon) = 0, \quad \varphi(1,\varepsilon) = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2\ddot{\psi} = \psi - 1, \qquad \psi(0,\varepsilon) = 0, \quad \psi(1,\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

Как показано в [3], в задаче (21) может существовать решение типа «всплеска» и ФАР (формальное асимптотическое решение), а в задаче (22) существование решения и ФАР очевидно. В совокупности в задачах (21), (22) существует решение типа «всплеска» и ФАР и в фазовом пространстве существует траектория, которая выходит из $(-q(t), 1, 0, 0)$, когда τ стремится к $-\infty$, и входит в $(-q(t), 1, 0, 0)$, когда τ стремится к $+\infty$.

Вернемся к задаче (19), (20). Можно убедиться в том, что для соответствующей вспомогательной системы в фазовом пространстве существует траектория, которая выходит из $(-q(t)+1,\ -q(t)-1,\ 0, 0)$, когда τ стремится к $-\infty$, и входит в $(-q(t)+1,\ -q(t)-1, 0, 0)$, когда τ стремится к $+\infty$, причем существует решение типа «всплеска» и ФАР.

Точка, в которой происходит «всплеск», вычисляется по формуле [3] $\dot{q}(t_0) = 0$. Из (17), (18) получаем вырожденную задачу $\bar{P}$ при $\varepsilon = 0$

$$
\bar{P}\colon\quad \begin{cases} \bar{J}(\bar{u}) = \int\limits_0^1 \Big(-\dfrac{1}{12}(\bar{x}+\bar{y})^3 + \dfrac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2 + (s(t)+t)\bar{u}_1 + \\ \qquad\qquad + (s(t)-t)\bar{u}_2\Big)dt \longrightarrow \min\limits_{(\bar{u}_1,\bar{u}_2)}, \\ \dot{\bar{x}} = \bar{u}_1, \quad \bar{x}(0)=0, \quad \bar{x}(1)=0, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{u}_2, \quad \bar{y}(0)=0, \quad \bar{y}(1)=0. \end{cases}
$$

С учетом $\frac{\partial b_1}{\partial x} = \frac{\partial b_2}{\partial y} = \frac{\partial b_1}{\partial y} = \frac{\partial b_2}{\partial x} = 0$ вводим функцию Кротова $\varphi(x,y,t) = = s(t)(x+y) + t(x-y)$, и $P(x,y,t) = \frac{1}{12}(x+y)^3 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - q^2(t)(x+y) + (x-y)$.

Легко проверить, что функция $P(x,y,t)$ имеет один локальный максимум в точке

$$
\begin{cases} \alpha_1(t) = -q(t)+1, \\ \alpha_2(t) = -q(t)-1, \end{cases}
$$

т. к. $P_{xx}(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t) = -\left(q(t)+\frac{1}{2}\right) < 0$,

$$
P_{xx}(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t)P_{yy}(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t) - P_{xy}^2(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t) = 2q(t) > 0.
$$

Очевидно, что существует точка $\gamma_1(t) = 2q(t)+1$, $\gamma_2(t) = 2q(t)-1$, где $P(\gamma_1(t),\gamma_2(t),t) = P(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t) = \frac{4}{3}q^3(t)+1$, $P_x(\gamma_1(t),\gamma_2(t),t) = 3q^2(t) \neq 0$, $P_y(\gamma_1(t),\gamma_2(t),t) = 3q^2(t) \neq 0$.

Построим асимптотику в виде

$$
x(t,\varepsilon) = \alpha_1(t) + \Pi_0 x(\tau_0) + Q_0 x(\tau) + R_0 x(\tau_1) + O(\varepsilon),
$$
$$
y(t,\varepsilon) = \alpha_2(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + Q_0 y(\tau) + R_0 y(\tau_1) + O(\varepsilon),
$$

$$
u_1(t,\varepsilon) = \dot{\alpha}_1(t) + \frac{1}{\varepsilon}(\Pi_0 u_1(\tau_0) + Q_0 u_1(\tau) + R_0 u_1(\tau_1)) + \Pi_1 u_1(\tau_0) + \\ + Q_1 u_1(\tau) + R_1 u_1(\tau_1) + O(\varepsilon),
$$

$$
u_2(t,\varepsilon) = \dot{\alpha}_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}(\Pi_0 u_2(\tau_0) + Q_0 u_2(\tau) + R_0 u_2(\tau_1)) + \Pi_1 u_2(\tau_0) + \\ + Q_1 u_2(\tau) + R_1 u_2(\tau_1) + O(\varepsilon).
$$

Для функционала в нулевом приближении получаем

$$
J_0^* = -\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}q^3(t)+1\right)dt.
$$

Для членов погранслойных рядов имеем

$$\begin{cases} Q_1J = 2\int\limits_0^{+\infty}\Big(P(\alpha_1(t_0),\alpha_2(t_0),t_0) - P(\alpha_1(t_0)+Q_0x(\tau),\alpha_2(t_0)+ \\ \qquad + Q_0y(\tau),t_0) + \dfrac{1}{2}(Q_0u_1^2(\tau)+Q_0u_2^2(\tau)\Big)d\tau \longrightarrow \min\limits_{(Q_0u_1,Q_0u_2)}, \\ Q_0\dot{x}(\tau) = Q_0u_1(\tau), \\ Q_0\dot{y}(\tau) = Q_0u_2(\tau), \\ Q_0x(0) = 3q(t_0), \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_0x(\tau) = 0, \\ Q_0y(0) = 3q(t_0), \quad \lim\limits_{\tau\to+\infty} Q_0y(\tau) = 0. \end{cases}$$

Для последней задачи оптимальной стабилизации получаем уравнение Риккати

$$M'M = \begin{pmatrix} 2q(t_0)+1, & 2q(t_0)-1 \\ 2q(t_0)-1, & 2q(t_0)+1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{q(t_0)} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \sqrt{q(t_0)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{q(t_0)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \sqrt{q(t_0)} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

и минимальное значение функционала принимает вид

$$Q_1J^*(h,t_0) = \frac{1}{2}(3q(t_0),3q(t_0))'M(3q(t_0),3q(t_0)) + \rho(h),$$

$\rho(h)$ есть функция, содержащая степени h^3 и выше, где $h = (3q(t_0),3q(t_0))'$ и t_0 удовлетворяет уравнению $\frac{\partial Q_1J^*}{\partial t_0}(h,t_0) = 0$, т. е.

$$\left(45q^{\frac{3}{2}}(t_0) + 3\frac{\partial\rho}{\partial h}(h)\Big|_{h=3q(t_0)}\right)\dot{q}(t_0) = 0, \quad \text{или} \quad \dot{q}(t_0) = 0.$$

Эта формула для точки всплеска, полученная нами из вариационных задач, совпадает с формулой из [3]. Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}Q_1J^*(u^*,t_0) = \left(45q^{\frac{2}{3}}(t_0) + 3\frac{\partial\rho}{\partial h}(h)\Big|_{h=3q(t_0)}\right)\ddot{q}(t_0) > 0$$

при условии $\ddot{q}(t_0) > 0$.

Литература

[1] Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 7. — С. 71–82.

[2] Боглаев Ю. П. О двухточечной задаче для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 1970. — Т. 10, №4. — С. 958–968.

[3] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Об асимптотике решения типа контрастной структуры // Матем. заметки. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 831–841.

[4] Васильева А. Б. К вопросу о близких к разрывным решениям в системе с малым параметром при производных условно устойчивого типа // Дифферен. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 9. — С. 1560–1568.

[5] Васильева А. Б. К вопросу об устойчивости решений типа контрастных структур // Матем. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 119–125.

[6] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.

[7] Васильева А. Б. Об устойчивости контрастных структур // Матем. моделирование. — 1991. — Т. 2, № 3. — С. 120–129.

[8] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.

[9] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977.

[10] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.

[11] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.

[12] Пилюгин С. Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.

[13] Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.

[14] Lukes D. L. Optimal regulation of nonlinear dynamical system // SIAM J. Control. — 1969. — V. 7, No. 1. — P. 75–100.

Статья поступила в редакцию в июне 1997 г.