А. А. Аграчев, Еще одно условие условного экстремума, *УМН*, 1989, том 44, выпуск 5(269), 153–154

1989 г. сентябрь — октябрь *т. 44, вып. 5 (269)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЕЩЕ ОДНО УСЛОВИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

А. А. Аграчев

Хорошо известны трудности характеризации точек условного экстремума в случае, когда ограничения не являются независимыми. В настоящей заметке формулируется необходимое и достаточное условие, учитывающее, с одной стороны, подход А. А. Милютина [4], а с другой — результаты работ [1, 3]. Рассматривается только конечномерная ситуация, где суть дела не затемнена функционально аналитическими подробностями. Я благодарен А. В. Арутюнову, обратившему мое внимание на то, что было бы интересно иметь подобное условие.

1. Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство. Обозначим через $\mathcal{P}(V)$ пространство всех вещественных билинейных симметричных форм на V, а через $S^2(V)$ — симметрическое произведение V на себя. Произвольное $q \in \mathcal{P}(V)$ можно рассматривать как линейную форму на $S^2(V)$, так что $S^2(V) = \mathcal{P}(V)^*$. Каждому $q \in \mathcal{P}(V)$ отвечает число $\operatorname{ind} q$ — максимальная размерность подпространства в V, на котором отрицательно определена квадратичная форма $v \mapsto q(v, v)$, а также пространство

$$\ker q = \{v \in V \mid q(v, V) = 0\}.$$

Пусть $C \subset V$ — выпуклый многогранный конус (с вершиной в нуле), через C обозначается, как обычно, его поляра, $C^\circ \subset V^*$.

Определение. Произвольное линейное отображение $\varphi\colon V \to \mathcal{P}(M)$ называется *регулярным* на C, если

$$\varphi(C)^\circ \cap S^2(\ker \varphi(v)) = 0 \quad \forall v \in C \setminus 0.$$

Используя теорему Сарда, нетрудно доказать, что среди всех линейных отображений V в $\mathcal{P}(M)$ отображения, регулярные на данном многогранном конусе, образуют открытое всюду плотное подмножество.

2. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$ и $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранный конус с вершиной в нуле. Обозначим через $f_0'\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ дифференциал f в нуле, а через $f_0''\colon \ker f_0' \times \ker f_0' \to \mathbb{R}^n$ — сужение второго дифференциала на ядро первого. Таким образом, f_0' — линейное, а f_0'' — билинейное симметричное отображения. Пространство $\mathbb{R}^n$ состоит из векторов-столбцов, а $\mathbb{R}^{n*}$ — из строк; если $\psi \in \mathbb{R}^{n*}$, то

$$\psi f_0'' \in \mathcal{P}(\ker f_0').$$

Введем обозначения:

$$\Psi = K^\circ \cap (\operatorname{im} f_0')^\perp, \quad r = \dim \Psi, \Psi_r = \{\psi \in \Psi \setminus 0 \mid \operatorname{ind} \psi f_0'' < r\}.$$

Теорема. *Предположим, что* $r > 0$, $r(r-1) \leqslant N - n$ *и отображение* $\psi \mapsto \psi f_0''$, $\psi \in \mathbb{R}^{n*}$, *регулярно на* Ψ. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*: а) $f(O_0) \cap$

$\cap K = 0$ *для некоторой окрестности* O_0 *нуля в* $\mathbb{R}^N$; б) $f(O_0 \setminus 0) \cap K = \varnothing$ *для некоторой окрестности* O_0 *нуля в* $\mathbb{R}^N$; в) $\Psi_r \neq \varnothing$ *и* $\max\limits_{\psi \in \Psi_r} \psi f_0''(u, u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \ker f_0'$.

3. Доказательство. Обозначим через Π максимальное подпространство в конусе $\operatorname{im} f_0' + K$, и пусть $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Pi$ — каноническая факторизация. Тогда $\pi(K)$ — острый многогранный конус. Пусть $S = \{u \in \ker f_0' \,\|\, u \,| = 1\}$ — единичная сфера в $\ker f_0'$. Введем отображение p: $S \to \mathbb{R}^n/\Pi$, положив $p(u) = \pi f_0''(u, u)$, $u \in S$. Из регулярности отображения $\psi \mapsto \psi f_0''$ на конусе $\Psi = \pi(K)^\circ$ можно вывести, что p трансверсально конусу $\pi(K)$ (определение трансверсальности отображения выпуклому множеству см. в добавлении к [2]). В свою очередь, если p трансверсально $\pi(K)$, то, как нетрудно показать, каждое из утверждений а), б) эквивалентно соотношению

$$p(S) \cap \pi(K) = \varnothing. \tag{1}$$

В то же время утверждение в) эквивалентно соотношению

$$p(S) \cap \operatorname{int}(\Psi_r^\circ + \pi(K)) = \varnothing. \tag{2}$$

Дальнейшие рассуждения следуют тому же плану, что и доказательство предложения 2.1 из [2]. Прежде всего, из доказательства леммы 2.3 упомянутой работы вытекает, что в условиях теоремы $\operatorname{int} \Psi_r^\circ \neq \varnothing$. Для доказательства теоремы остается показать, что из (1) следует (2).

Предположим, что равенство (1) выполняется, а (2) нет. Тогда найдется такое $u_0 \in S$, что

$$p(u_0) \in \operatorname{int}(\Psi_r^\circ + \pi(K))$$

и

$$(p(u) - \alpha p(u_0)) \notin \pi(K) \qquad \forall \alpha \in [0, 1), \quad u \in S.$$

В этом случае существует такое $\psi \in \pi(K)^\circ \setminus 0$, $\psi p(u_0) \geqslant 0$, что u_0 является критической точкой функции ψp, и гессиан функции ψp в точке u_0 имеет индекс меньше, чем $r = \dim(\mathbb{R}^n/\Pi)$. Вспоминая, что ψp есть сужение на S квадратичной функции $u \mapsto \psi f_0''(u, u)$, получаем $\operatorname{ind} \psi f_0'' < r$. Итак, $\psi \in \Psi_r \cap \pi(K)^\circ$. Следовательно, для любого ненулевого $y \in \operatorname{int}(\Psi_r^\circ + \pi(K))$ имеем $\psi y < 0$. Последнее противоречит неравенству $\psi p(u_0) \geqslant 0$. ■

Удобство приведенной теоремы состоит в том, что как формулировка, так и доказательство опираются лишь на элементарные факты выпуклого анализа. Главный недостаток очевиден: для проверки условия экстремума приходится рассматривать максимум семейства квадратичных форм, а это, в отличие от самих квадратичных форм, очень сложное образование. Однако более основательное исследование квадратичного отображения $u \mapsto f_0''(u, u)$ требует гораздо более сильных средств (см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. // ДАН СССР.— Т. 284, № 4.— С. 777—781. [2] Аграчев А. А. // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1988.— Т. 26.— С. 85—124. [3] Арутюнов А. В. // ДАН СССР.— Т. 280, № 5.— С. 1033—1037. [4] Милютин А. А. // Методы теории экстремальных задач в экономике.— М.: Наука, 1981.— С. 138—177.

Всесоюзный институт
научной и технической информации

Поступило в Правление общества
21 марта 1989 г.