

Субримановы кратчайшие, множества разреза и сферы

Ю.Л. Сачков

(совместно с А.А.Ардентовым, Ya. A. Butt)

Семинар

«Проблемы математической теории управления»

МИАН, Отдел дифференциальных уравнений
22 мая 2015 г.

Основные определения

- гладкое многообразие M ,
- распределение $\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}$, $\dim \Delta_q \equiv \text{const}$,
- скалярное произведение в Δ :

$$g = \{g_q \text{ — скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}$$

- CP многообразие (M, Δ, g) , CP структура (Δ, g) на M
- горизонтальная (допустимая) кривая $q \in \text{Lip}([0, t_1], M)$:

$$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)} \text{ для п.в. } t \in [0, t_1],$$

- длина $l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} (g(\dot{q}(t), \dot{q}(t)))^{1/2} dt$,
- CP расстояние $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ гориз. кривая, } q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$,

- СР кратчайшая $q(t)$, $t \in [0, t_1]$: горизонтальная кривая т.ч. $l(q(\cdot)) = d(q(0), q(t_1))$,
- сфера $S_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) = R\}$,
шар $B_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) \leq R\}$,
- геодезическая: горизонтальная кривая, малые дуги которой — кратчайшие,
- время разреза вдоль геодезической $q(t)$:

$$t_{\text{cut}}(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ кратчайшая } \},$$

- точка разреза $q(t_1)$, $t_1 = t_{\text{cut}}(q(\cdot))$,
- множество разреза $\text{Cut}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid q_1 \text{ т. разреза для нек-рой геодез. } q(\cdot), q(0) = q_0\}$

- первое сопряженное время вдоль геодезической $q(t)$:

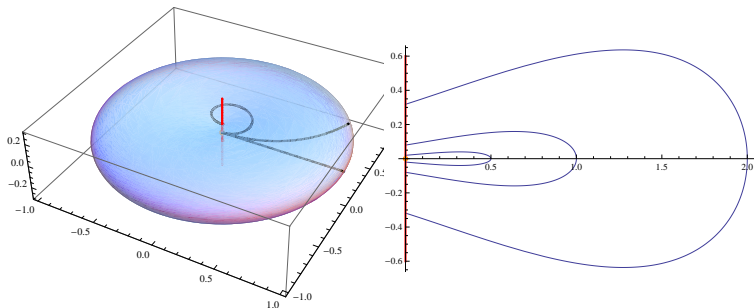
$$t_{\text{conj}}(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ локально оптимальна } \},$$

- $q(\cdot)$ локально оптимальна, если \exists окрестность $O \supset \{q(t)\}$ т.ч. $q(\cdot)$ — кратчайшая на $(O, \Delta|_O, g|_O)$,
- первая сопряженная точка вдоль геодезической $q(t)$:
 $q(t_1)$, $t_1 = t_{\text{conj}}(q(\cdot))$,
- первая каустика:

$$\text{Conj}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid q_1 \text{ первая сопряженная т. для нек-рой геодез. } q(\cdot), q(0) = q_0\}.$$

Пример: Группа Гейзенберга

- $M = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z},$
- $\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$



Задача оптимального управления

- CP многообразии (M, Δ, g)
- Ортонормированный репер:

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

- Кратчайшие $q(t)$ — решения задачи

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i(q), \quad q \in M, \quad u_i \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \right)^{1/2} dt \rightarrow \min$$

$$\iff J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Существование решений

Теорема (Рашевский-Чоу)

Пусть M связно и для всех $q \in M$

$$\text{span}(X_i(q), [X_i, X_j](q), [[X_i, X_j], X_l](q), \dots) = T_q M. \quad (1)$$

Тогда для $\forall q_0, q_1 \in M \exists$ горизонтальная кривая $q(t)$,
 $t \in [0, t_1]$, т.ч. $q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$.

Далее условие полного ранга (1) предполагается выполненным.

Теорема (Филиппов)

Соединяющая точки $q_0, q_1 \in M$ кратчайшая существует, если выполнено одно из условий:

- q_1 достаточно близко к q_0 ,
- шары $B_R(q_0)$ компактны,
- (Δ, g) левоинвариантна на группе Ли M .

Принцип максимума Понтрягина

- $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle, \lambda \in T^*M.$

Теорема (Понтрягин)

Если $q(t), t \in [0, t_1]$, — кратчайшая, соответствующая управлению $u(t)$, то $\exists \lambda \in \text{Lip}([0, t_1], T^*M), \lambda(t) \in T_{q(t)}^*M$, т.ч.:

(1) либо $\dot{\lambda}(t) = \vec{H}(\lambda(t)), H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^2(\lambda),$
 $u_i(t) = h_i(\lambda(t)),$

(2) либо $h_1(\lambda(t)) = \dots = h_k(\lambda(t)) \equiv 0,$
 $\dot{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) \vec{h}_i(\lambda(t)).$

(1) $\Rightarrow \lambda(t)$ нормальная экстремаль, $q(t)$ нормальная экстремальная траектория,

(2) $\Rightarrow \lambda(t)$ аномальная экстремаль, $q(t)$ аномальная экстремальная траектория.

Оптимальность нормальных геодезических

- $q(t)$ — нормальная экстремальная траектория \Rightarrow
 $q(t)$ — геодезическая (усиленное условие Лежандра)
- $\lambda(t)$ — нормальная экстремаль \Rightarrow
 $\lambda(t) = e^{t\vec{H}}(\lambda_0), \quad H(\lambda(t)) \equiv \text{const}$
- $\lambda_0 \in C = \{H(\lambda) \equiv 1/2\} \cap T_{q_0}^* M$
- Экспоненциальное отображение $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$,
 $\text{Exp}(\lambda, t) = q(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda)$.
- q_1 — точка Максвелла на геодезической $q(t)$:
 $\exists \tilde{q}(t) \neq q(t), \tilde{q}(0) = q(0), \tilde{q}(t_1) = q(t_1) = q_1$.

Теорема

*Пусть $q(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$ — строго нормальная геодезическая.
Если t_1 — время разреза, то $q(t_1)$ — первая точка Максвелла
или первая сопряженная точка.*

Гладкость сфер

Теорема

Если $\Delta_{q_0} \neq T_{q_0}M$, то любая сфера $S_R(q_0)$ не является гладким многообразием (если $S_R(q_0) \neq \emptyset$).

Теорема

Пусть $q_1 \in S_R(q_0)$. Предположим, что:

- (1) q_1 соединяется с q_0 единственной норм. кратчайшей $q(t)$,
- (2) q_1 не является сопряженной точкой вдоль $q(t)$.

Тогда $S_R(q_0)$ — гладкое многообразие в окрестности точки q_1 .

Следствие

Причины точек разреза и особенностей сфер:

- (1) аномальные кратчайшие,
- (2) точки Максвелла,
- (3) сопряженные точки.

Группа евклидовых движений плоскости

$$SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \right\}$$

$$X_1(q) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$M = SE(2), \quad \Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

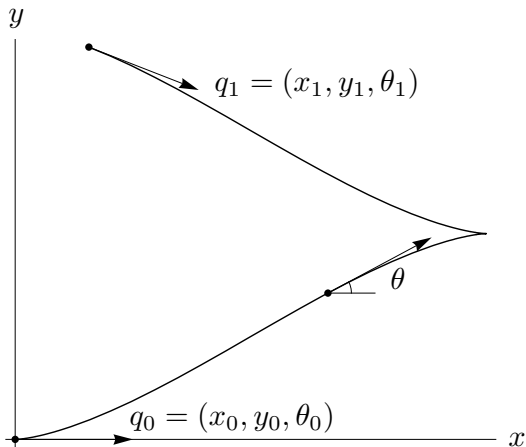
$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in SE(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Контактная субриманова структура на $SE(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$
- $\text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$ полная управляемость
- Вектор роста $(2, 3) \Rightarrow$ контактное распределение
- Инварианты А.А.Аграчева: $\kappa = \chi$
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на $SE(2)$, с точностью до растяжений и локальных изометрий

Задача об оптимальном движении мобильного робота на плоскости



$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Принцип максимума Понтрягина

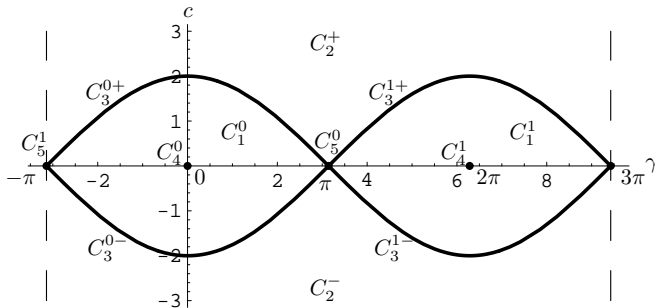
- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, & \dot{\theta} &= -\cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- Интеграл энергии $E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma \in [-1, +\infty)$
- $\gamma(t), c(t), q(t)$: параметризация функциями Якоби sn, cn, dn, E.

Разбиение фазового цилиндра маятника $C = \cup_{i=1}^5 C_i$

- $C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\} \Rightarrow$ колебания маятника,
- $C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\} \Rightarrow$ вращения маятника,
- $C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\} \Rightarrow$ критическое движение,
- $C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\} \Rightarrow$ устойчивое равновесие,
- $C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\} \Rightarrow$ неуст. равновесие

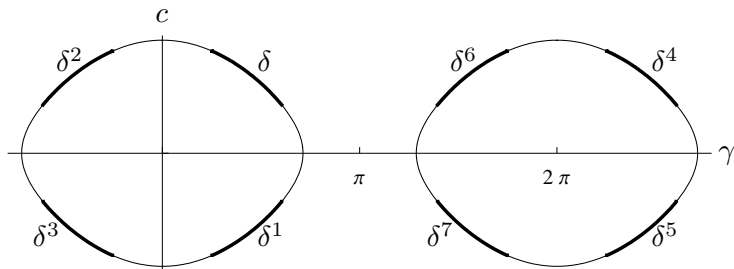


Отражения ε^i в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- $\varepsilon^i : C \rightarrow C$, $\varepsilon_*^i \vec{H}_v = \pm \vec{H}_v$, $\vec{H}_v = c \frac{\partial}{\partial \gamma} - \sin \gamma \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec } C$,
- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений $\varepsilon^i : \delta \mapsto \delta^i$ на траектории маятника:



$$\varepsilon^i(\lambda, t) = \begin{cases} (\varepsilon^i(\lambda), t), & \varepsilon_*^i \vec{H}_v = \vec{H}_v, \\ (e^{-t\vec{H}_v} \circ \varepsilon^i(\lambda), t), & \varepsilon_*^i \vec{H}_v = -\vec{H}_v. \end{cases}$$

Первое время Максвелла, соответствующее симметриям

Симметрии экспоненциального отображения:

$$\text{Exp} \circ \varepsilon^j(\lambda, t) = \varepsilon^j \circ \text{Exp}(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon^j \in G.$$

$$t_{\text{Max}}(\lambda) = \min\{t > 0 \mid \exists \varepsilon^j \in G : \varepsilon^j(\lambda, t) \neq (\lambda, t), \\ \text{Exp} \circ \varepsilon^j(\lambda, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}$$

Теорема

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \pi,$
- $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2K(k), k = \sqrt{(E+1)/2},$
- $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kp_1(k), k = \sqrt{2/(E+1)},$

$$p_1(k) = \min\{p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k)\text{sn}(p, k) = 0\}.$$

Оценки первого сопряженного времени

Теорема

- $E \in [-1, 1] \Rightarrow t_{\text{conj}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{conj}}(\lambda) \in [t_{\text{Max}}(\lambda), 4kK],$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad t_{\text{conj}}(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda).$

Метод доказательства:

Гомотопическая инвариантность индекса Маслова (количества сопряженных точек)

Глобальная структура экспоненциального отображения

- $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ = N \rightarrow M$: неоптим. геодез. при $t > t_{\text{Max}}(\lambda)$,
- $\hat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq \mathbf{t}(\lambda)\}$, $\hat{M} = M \setminus \{q_0\}$,
 $\text{Exp} : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$ сюръективно, не инъективно (т. Максвелла),
- $\tilde{M} = \{q \in M \mid \varepsilon^i(q) \neq q\} =$
 $= \{q \in M \mid \sin \theta \neq 0, R_i(q) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 M_i$,
 $\tilde{N} = \text{Exp}^{-1}(\tilde{M}) =$
 $= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}/2) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 D_i$,
 $\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$: нет т. Максвелла и сопряженных точек.

Теорема

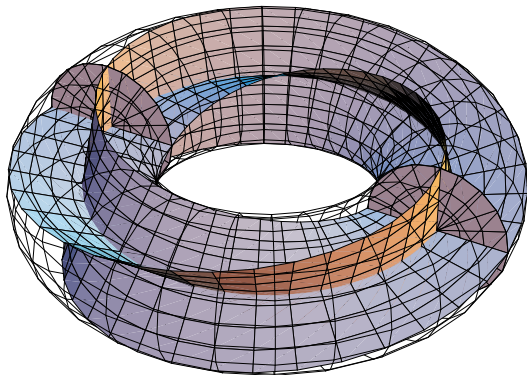
$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 8$.

$\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ — диффеоморфизм.

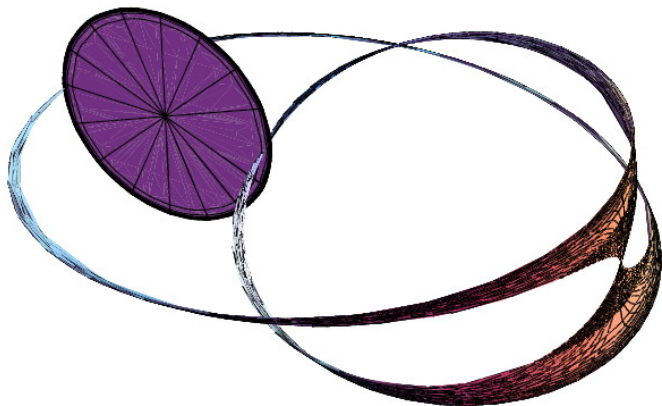
Диффеоморфные стратификации и множество разреза

- $\text{Cut}, \text{Max} \subset M' = \widehat{M} \setminus \widetilde{M} = \{q \in M \mid \sin \theta R_1(q) R_2(q) = 0\}$,
- $N' = \widehat{N} \setminus \widetilde{N}$,
- $\text{Exp} : N' \rightarrow M'$,
- Стратификации: $N' = \sqcup_{i=1}^{58} N'_i$, $M' = \cup_{i=1}^{58} M'_i$,
- $\text{Exp} : N'_i \rightarrow M'_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 58$
- $\text{Max} = \cup \{M'_i \mid \exists M'_j = M'_i, j \neq i\}$,
- $\text{Cut} = \text{Max} \cup (\text{Cut} \cap \text{Conj})$,
- $\text{Cut} = \text{Cut}_{\text{loc}} \cup \text{Cut}_{\text{glob}}$,
- $\text{Cut}_{\text{glob}} = \{q \in M \mid \theta = \pi\}$, $d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = \pi$,
- $\text{Cut}_{\text{loc}} \subset \{R_2 = 0\}$, $\text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}) \ni q_0$,
- $\text{Cut}_{\text{loc}} = \{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), R_2 = 0, |R_1| > R_1^1(|\theta|)\}$,
 $R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}$, $R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}$,
 $R_1^1(\theta) = 2(p_1(k) - E(p_1(k), k))$,
 $k = k_1(\theta)$ — обратная функция к $\theta = k \text{sn}(p_1(k), k)$.

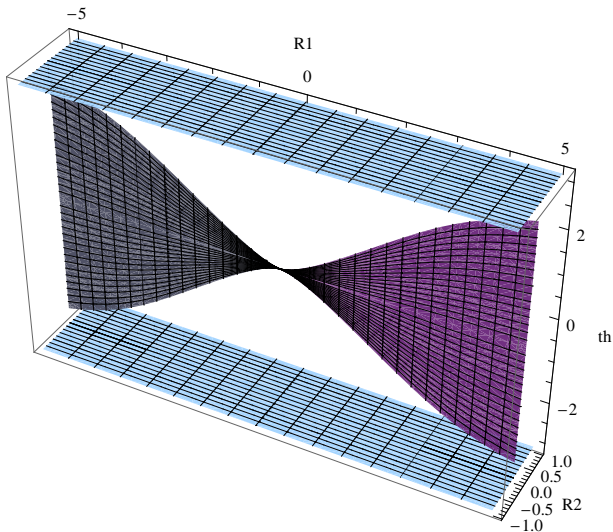
Множество $M' \supset \text{Cut} \supset \text{Max}$



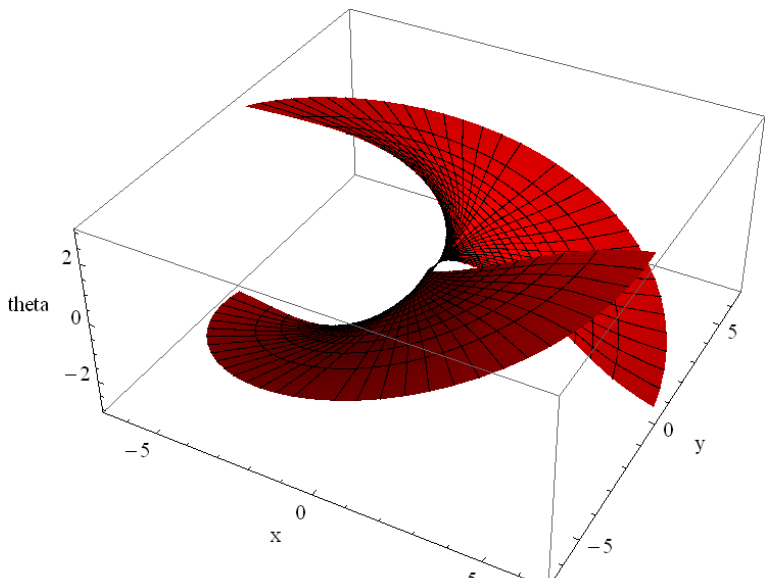
Множество разреза:
глобальное расположение



Множество разреза в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



Локальная компонента множества разреза
в исходных координатах (x, y, θ)



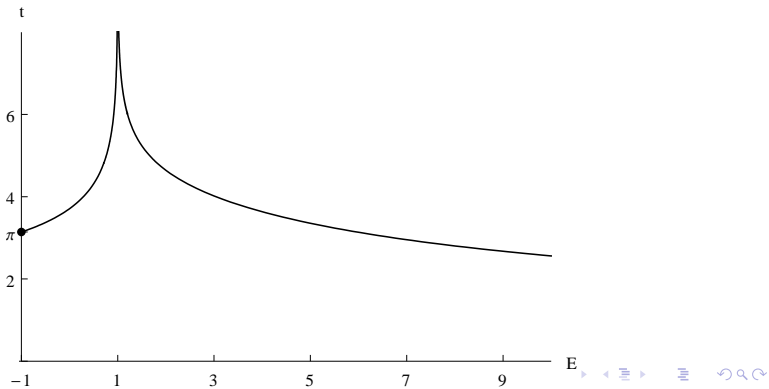
Оптимальный синтез в задаче $q(0) = q_1, q(t_1) = q_0 = (0, 0, 0)$

- $q_1 \in \hat{M} = M \setminus \{q_0\}$
- $\text{Exp} : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$ сюръективно
- $\text{Exp}^{-1}(q) = \begin{cases} \{(\lambda, t)\}, & \text{если } q \in \hat{M} \setminus \text{Max}, \\ \{(\lambda', t) \neq (\lambda'', t)\}, & \text{если } q \in \text{Max} \end{cases}$
- $\text{Exp}^{-1}(q_1) = (\lambda, t), \quad \lambda = (\gamma, c) \in (2S^1) \times \mathbb{R}, t > 0$
- $\ddot{\gamma}_s = -\sin \gamma_s, (\gamma_0, \dot{\gamma}_0) = (\gamma, c), s \in [0, t]$
- $u_1(q_1) = -\sin(\gamma t/2), u_2(q_1) = \cos(\gamma t/2)$
- оптимальный синтез $q_1 \mapsto (u_1, u_2)$ двузначен на Max , однозначен на $\hat{M} \setminus \text{Max}$.

Время разреза

Теорема

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \quad \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \quad \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{E \neq +1}$ гладкая.



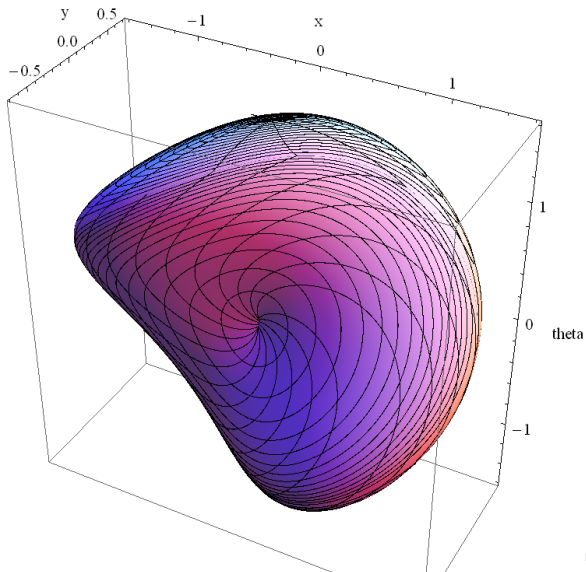
Субримановы сферы

- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$,
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$,
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong T^2$.

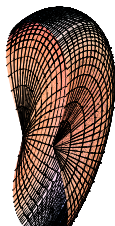
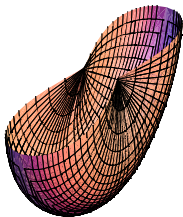
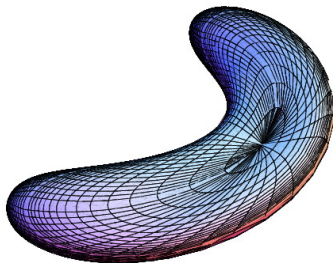
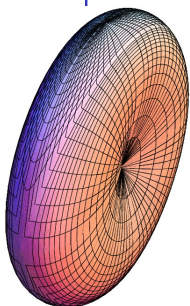
Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

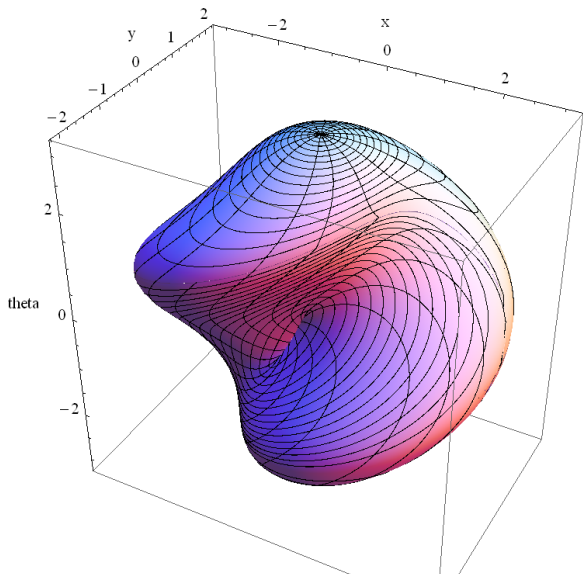
Субриманова сфера радиуса $< \pi$
в исходных координатах (x, y, θ)



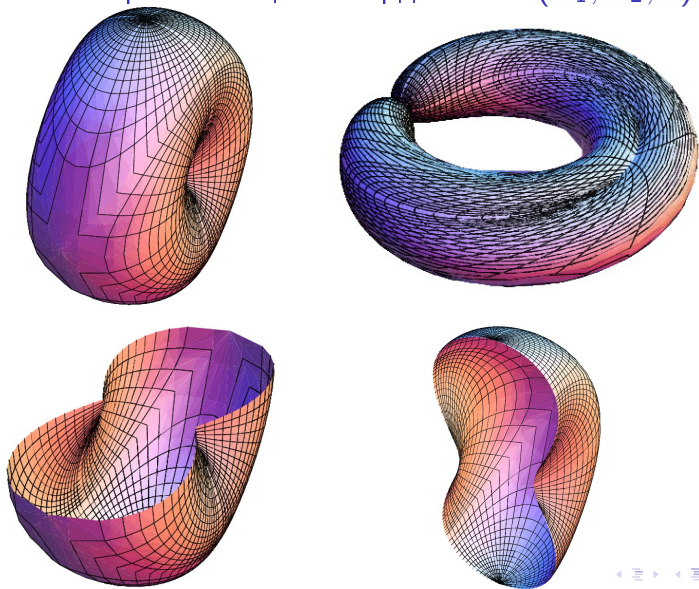
Субриманова сфера радиуса $< \pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



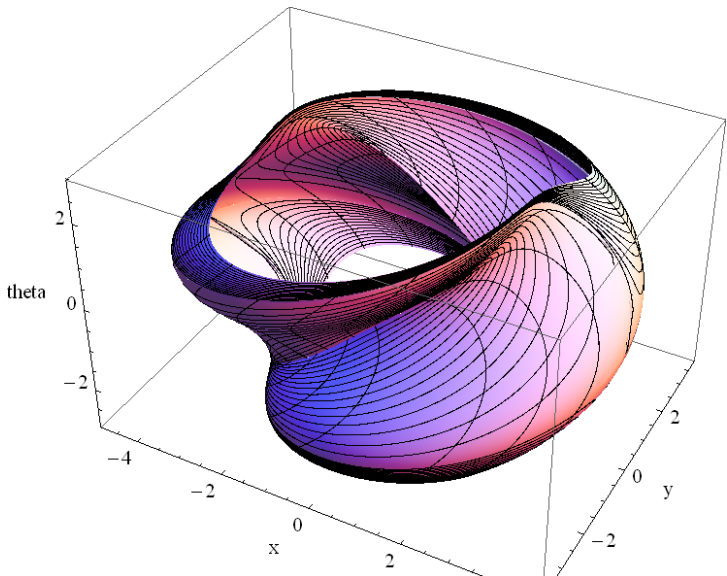
Субриманова сфера радиуса π
в исходных координатах (x, y, θ)



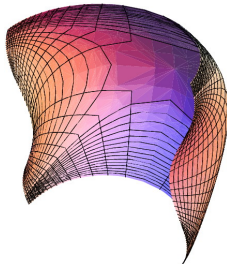
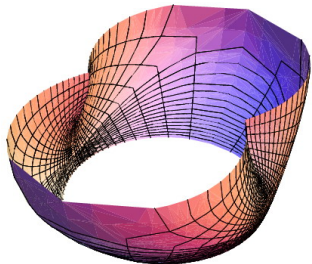
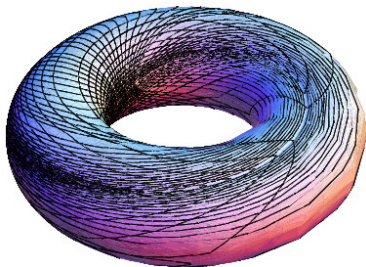
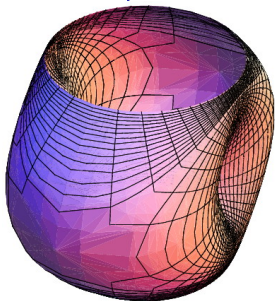
Субриманова сфера радиуса π
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



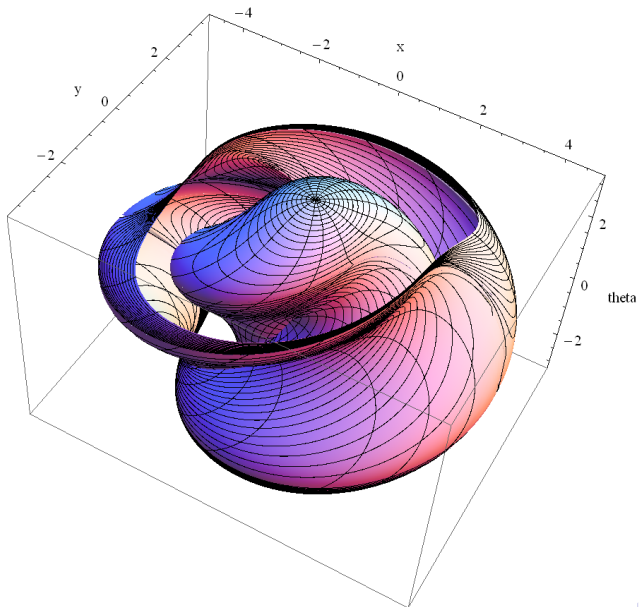
Субриманова сфера радиуса $> \pi$
в исходных координатах (x, y, θ)



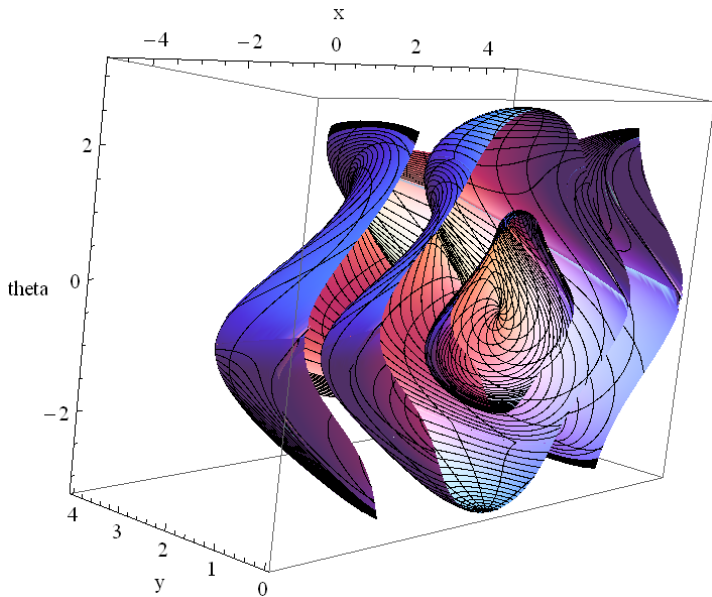
Субриманова сфера радиуса $> \pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



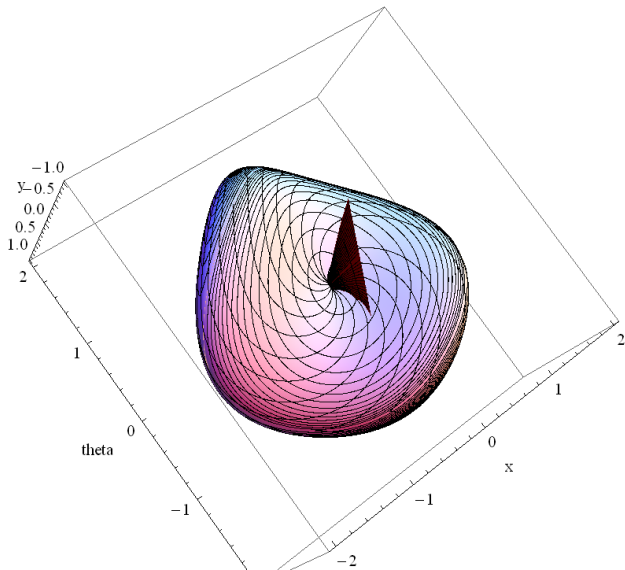
Матрешка сфер радиуса π и $> \pi$



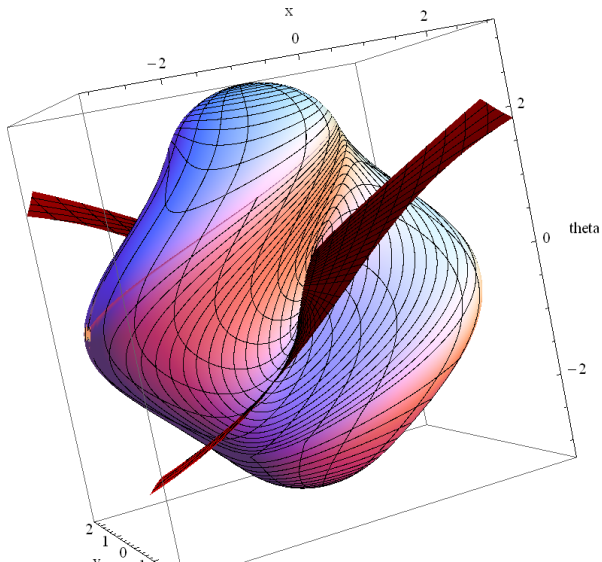
Матрешка полусфер радиуса $< \pi$, π и $> \pi$



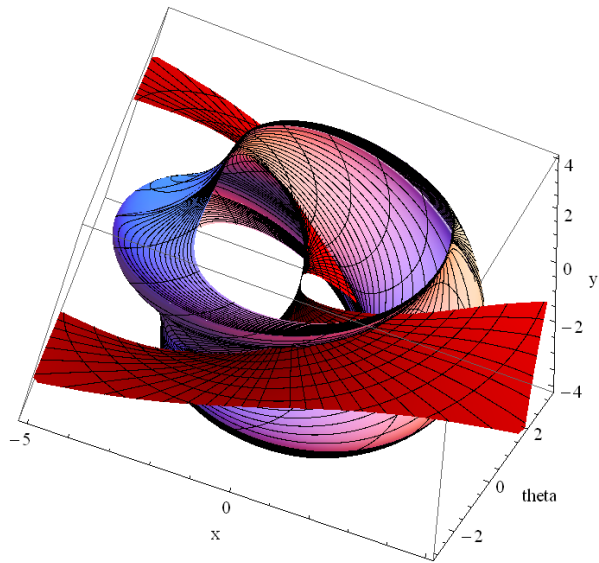
Субриманова сфера радиуса $< \pi$
и множество разреза



Субриманова сфера радиуса π и множество разреза



Субриманова сфера радиуса $> \pi$
и множество разреза



Группа гиперболических движений плоскости

$$\text{SH}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \text{ch } z & \text{sh } z & x \\ \text{sh } z & \text{ch } z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$X_1(q) = \text{ch } z \frac{\partial}{\partial x} + \text{sh } z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$M = \text{SH}(2), \quad \Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in \text{SH}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min .$$

Контактная субриманова структура на $\text{SH}(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = -\text{sh } z \frac{\partial}{\partial x} - \text{ch } z \frac{\partial}{\partial y}$
- $\text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$ полная управляемость
- Вектор роста $(2, 3) \Rightarrow$ контактное распределение
- Инварианты А.А.Аграчева: $\kappa = -\chi$
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на $\text{SH}(2)$, с точностью до растяжений и локальных изометрий

Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{ch} z, & \dot{y} &= \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{sh} z, & \dot{z} &= \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- $\gamma(t), c(t), q(t)$: параметризация функциями Якоби sn, cn, dn, E
- Группа симметрий Exp:

$$G = \{\operatorname{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}.$$

Первое время Максвелла и сопряженные времена

Теорема

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2\pi,$
- $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4K(k), k = \sqrt{(E+1)/2},$
- $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4kK(k), k = \sqrt{2/(E+1)}.$

Теорема

- $t_{\text{Max}}^n(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^n(\lambda) \leq t_{\text{Max}}^{n+1}(\lambda)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$
- *Справедливо обобщение теоремы Ролля: между последовательными точками Максвелла заключена одна сопряженная точка.*

Глобальная структура экспоненциального отображения

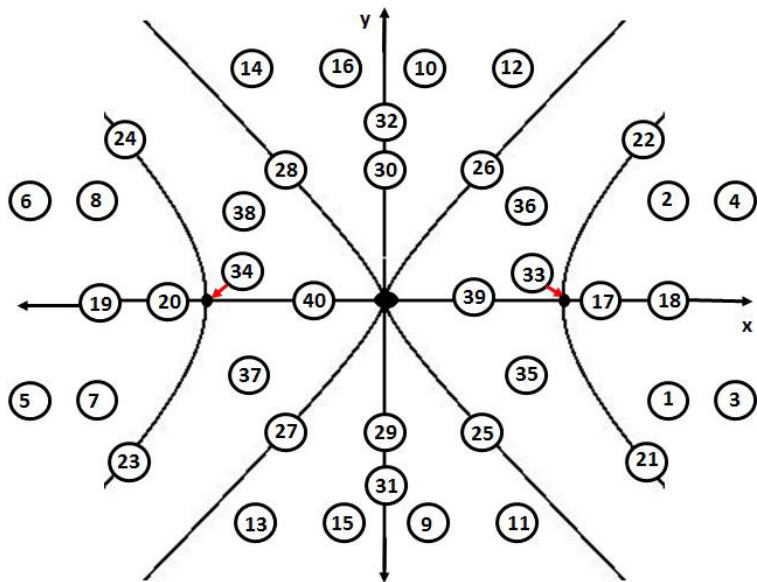
Диффеоморфные стратификации в прообразе и образе Exp :

- $\hat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq t_{\text{Max}}(\lambda)\} =$
 $= \cup_{i=1}^2 D_i \cup (\cup_{i=1}^{40} N'_i),$
- $\hat{M} = M \setminus \{q_0\} =$
 $= \cup_{i=1}^2 M_i \cup (\cup_{i=1}^{40} M'_i).$

Теорема

- $\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, 2.$
- $\text{Exp} : N'_i \rightarrow M'_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 40.$

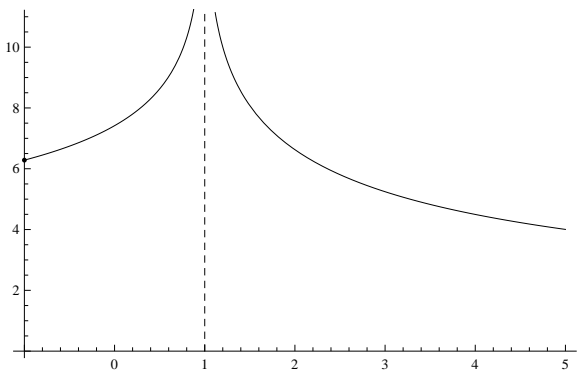
Стратификация плоскости $M' = \{z = 0\}$



Время разреза

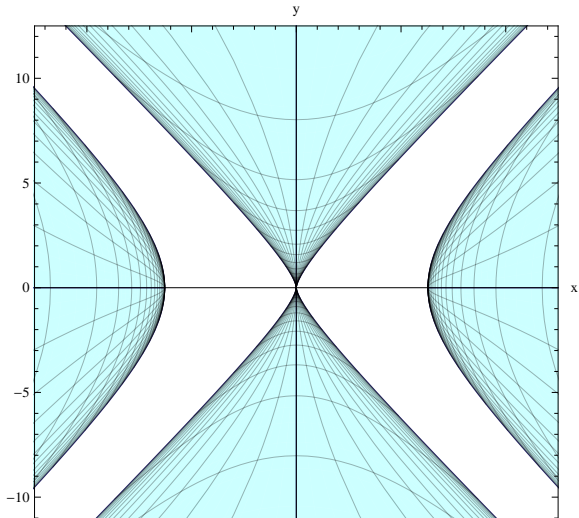
Теорема

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm 1}$ гладкая.



Множество разреза

- $\text{Cut} = \text{Max} \cup (\text{Cut} \cap \text{Conj}) = \text{Cut}_{\text{loc}} \cup \text{Cut}_{\text{glob}}$,
- $\text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}) \ni q_0, d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = 2\pi$,
- $\text{Cut} \subset \{z = 0\}$.

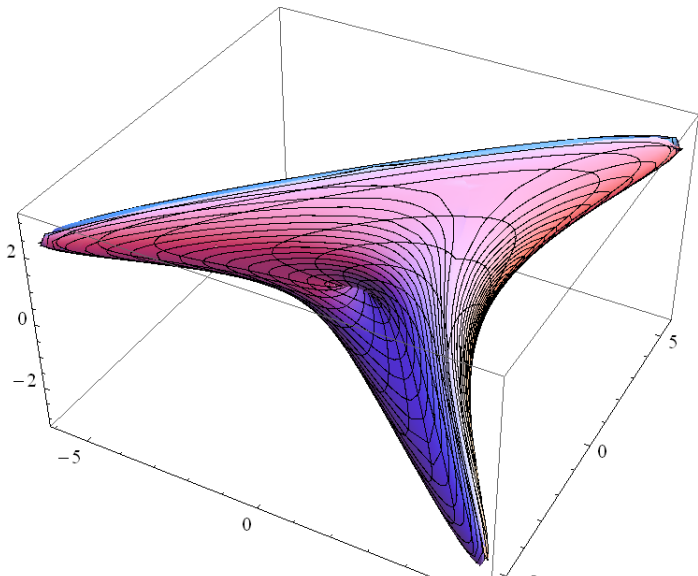


Субримановы сферы

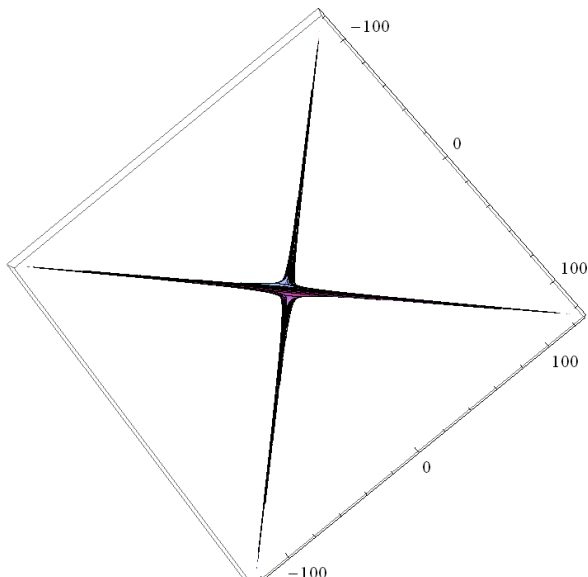
- $R > 0 \Rightarrow S_R \cong S^2$,
- Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

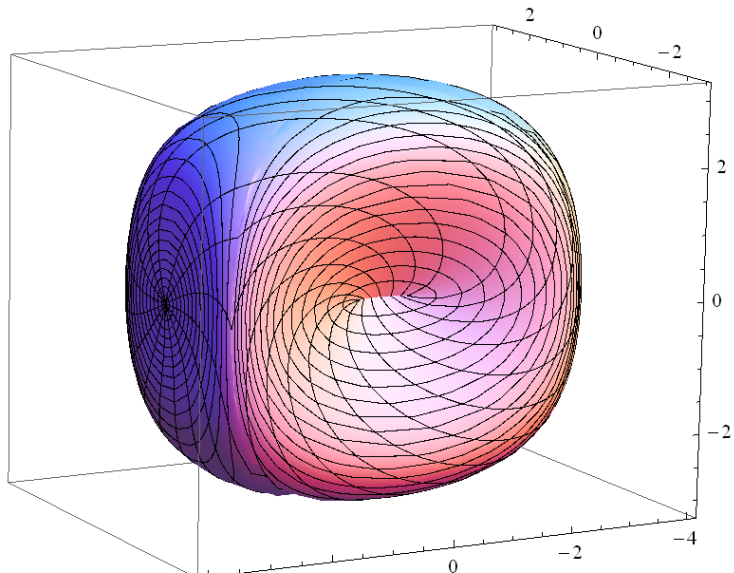
Субриманова сфера радиуса $< 2\pi$
в исходных координатах (x, y, z)



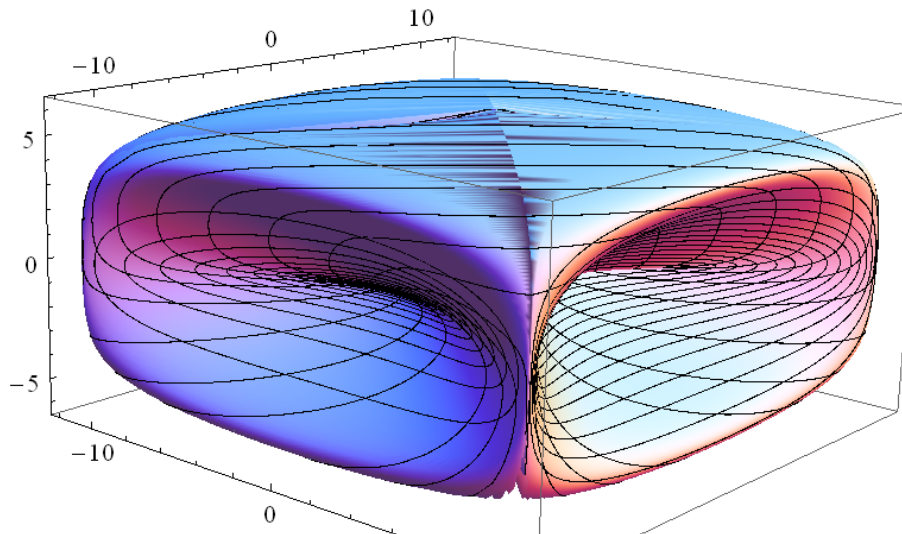
Субриманова сфера радиуса 2π
в исходных координатах (x, y, z)



Субриманова сфера радиуса $< 2\pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



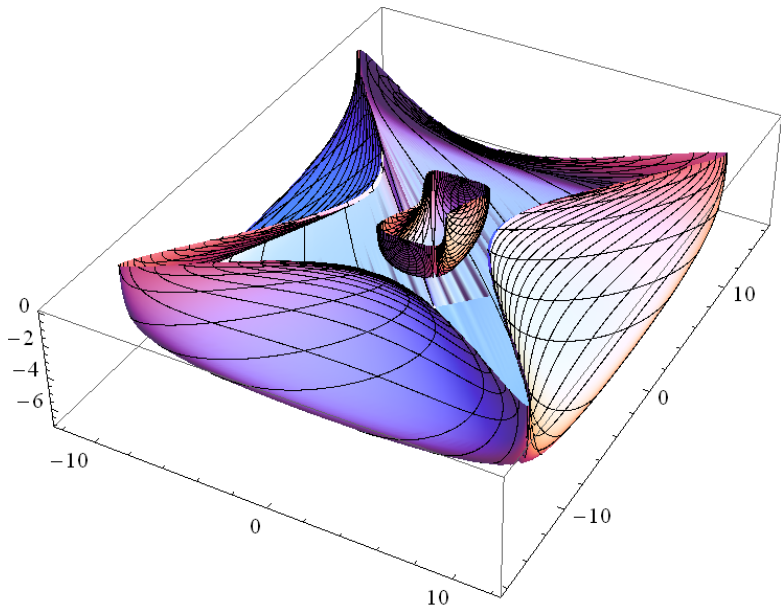
Субриманова сфера радиуса 2π
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



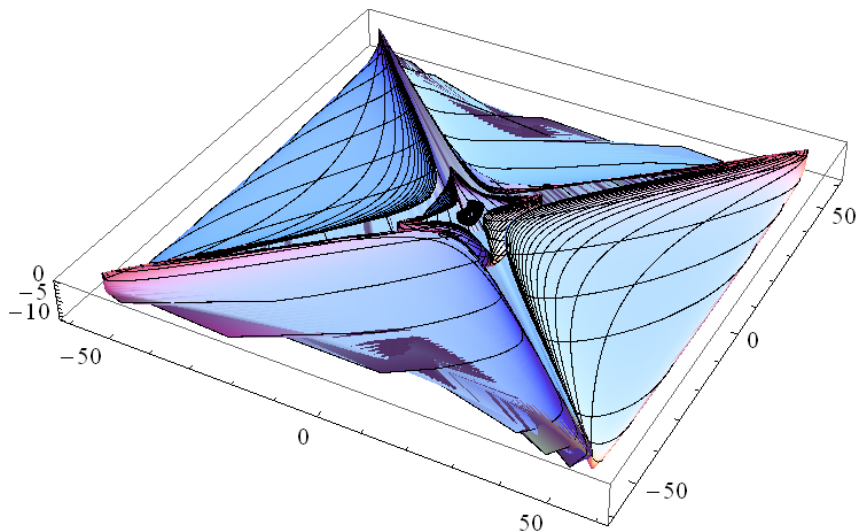
Субриманова сфера радиуса $> 2\pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



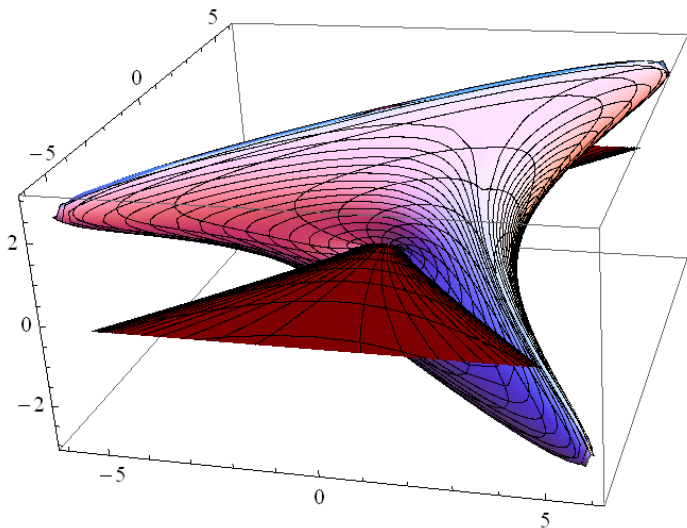
Матрешка полусфер радиуса π и 2π



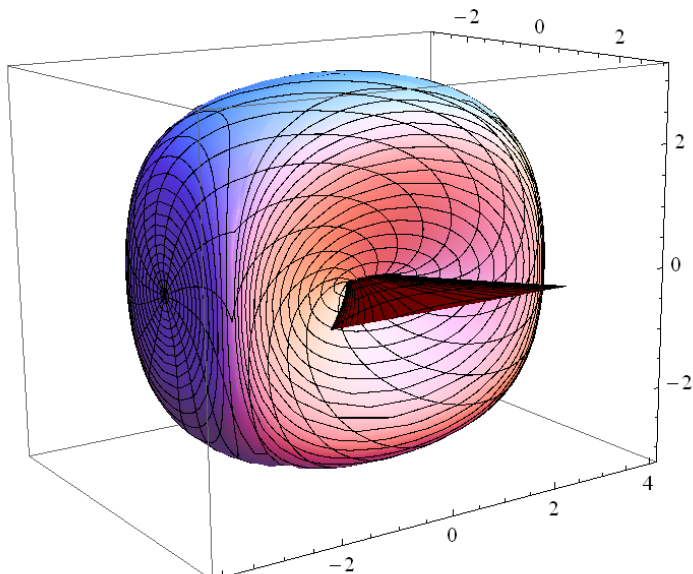
Матрешка полусфер радиуса π , 2π и 3π



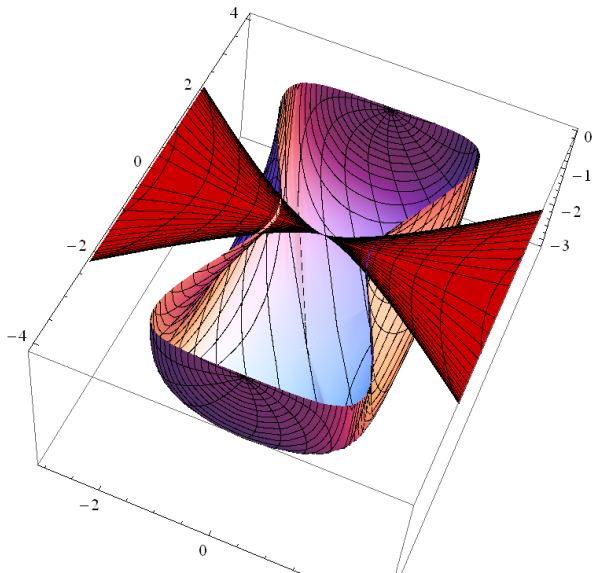
Сфера радиуса π и множество разреза
в исходных координатах (x, y, z)



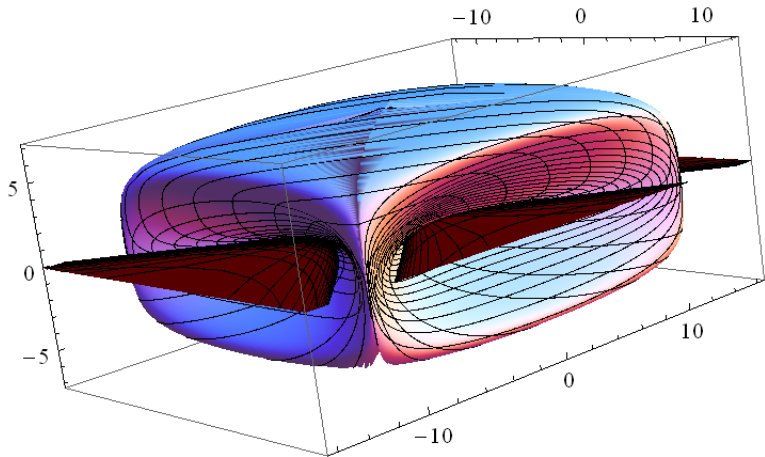
Сфера радиуса π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



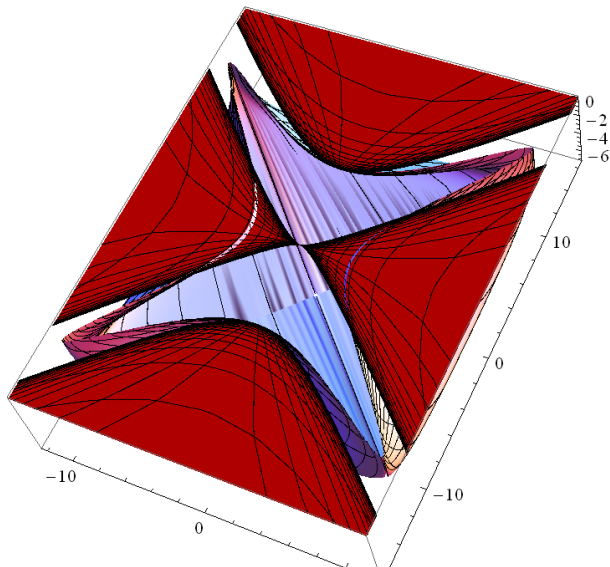
Полуфера радиуса π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



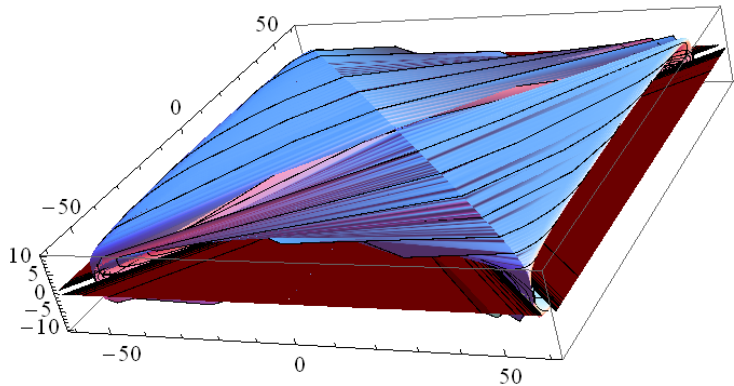
Сфера радиуса 2π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



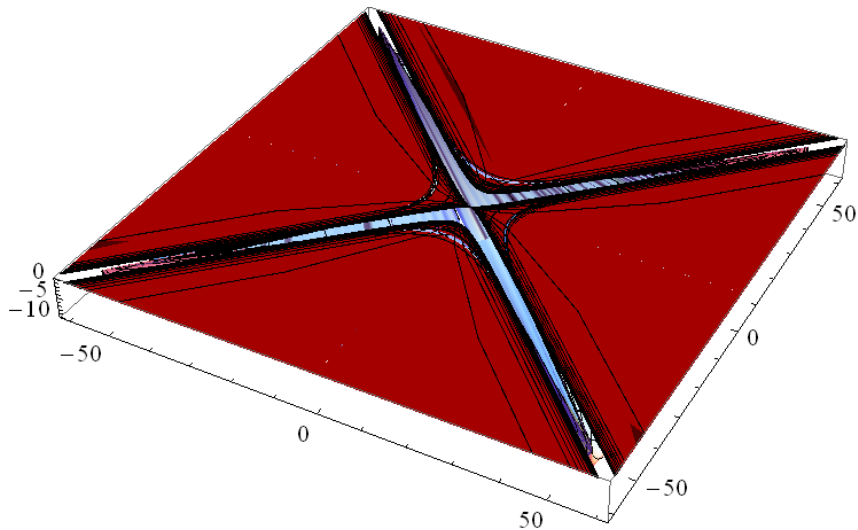
Полуфера радиуса 2π и множество разрезов
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



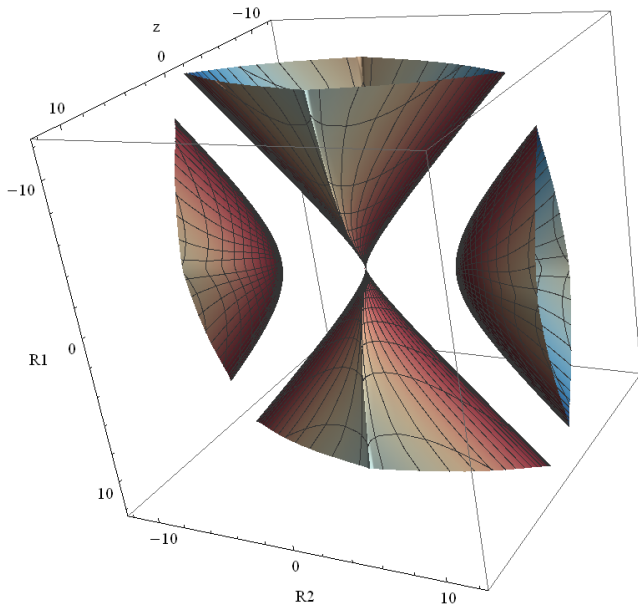
Сфера радиуса 3π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



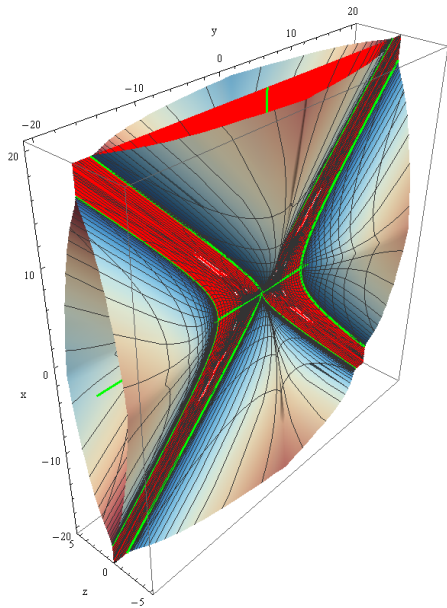
Полуфера радиуса 3π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



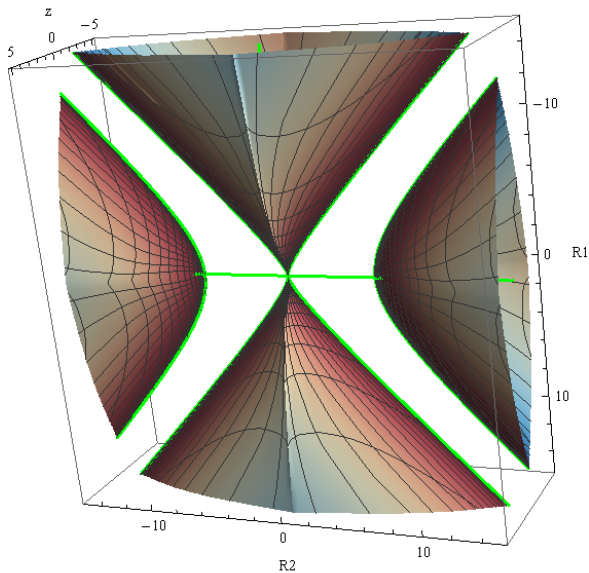
Первая каустика



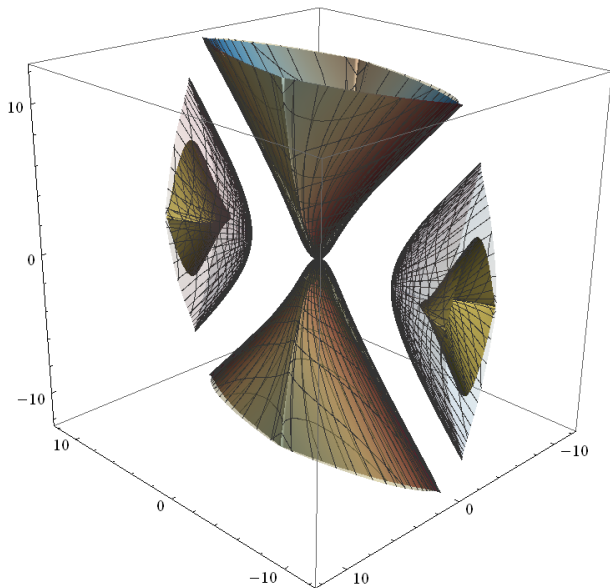
Первая каустика и множество разреза



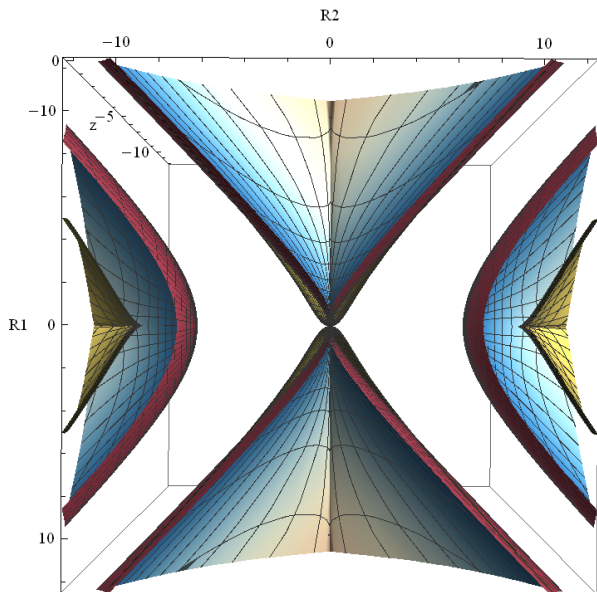
Ребра возврата первой каустики



Первая и вторая каустики



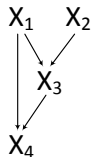
Первая и вторая каустики в разрезе



Группа Энгеля

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & y & z & v \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$X_1(q) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$



$$X_3 = [X_1, X_2],$$

$$X_4 = [X_1, X_3],$$

$$[X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Нильпотентная CP структура с вектором роста $(2, 3, 4)$,
единственна с точностью до растяжений

Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные траектории: e^{tX_2} ($[X_2, \Delta^2] = 0$)
- Нормальные экстремали:

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin \theta X_1(q) + \cos \theta X_2(q),$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = S_\theta^1 \times \mathbb{R}_{c, \alpha}^2.$$

- Интеграл энергии $E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty)$.
- $\theta(t), c(t), q(t)$: параметризация функциями Якоби.
- $\theta = \pi n, c = 0 \Rightarrow \dot{q} = \pm X_2(q), \Rightarrow$ анормальные траектории нестрого анормальны.

Симметрии и первое время Максвелла

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong (\mathbb{Z}_2)^3.$$

Теорема

- $E = -\pm \alpha \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $|E| < |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{2p_1(k)}{\sqrt{|\alpha|}},$
 $k = \sqrt{(E + |\alpha|)/(2|\alpha|)},$
- $E > |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kK(k),$
 $k = \sqrt{2|\alpha|/(E + |\alpha|)},$
- $\alpha = 0, E > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\pi}{E},$

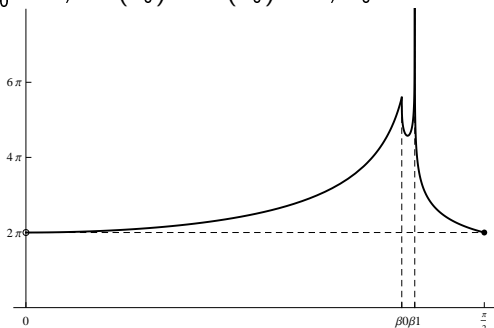
$$p_1(k) = \min\{p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k) \text{sn}(p, k) = 0$$

или $p = 2K(k)\}$.

Сопряженное время и время разреза

Теорема

- $t_{\text{conj}}(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm\alpha}$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm\alpha}, E_0$ гладкая,
 $E_0 = 2k_0^2 - 1, 2E(k_0) - K(k_0) = 0, k_0 = 0.9089 \dots$



Глобальная структура экспоненциального отображения и множество разреза

- $\tilde{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}) \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 D_i,$
- $\tilde{M} = \text{Exp}^{-1}(\tilde{N}) = \{xz \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 M_i.$

Теорема

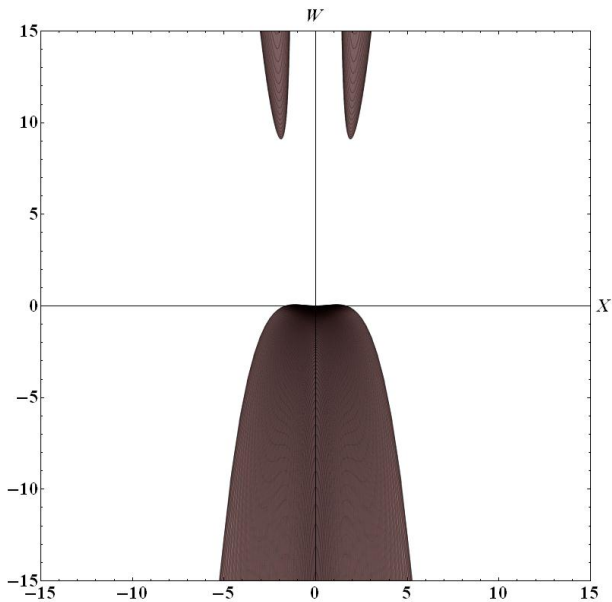
$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 4.$

$$\text{Cut} \subset M' = M \setminus \tilde{M} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \text{mod } xz = 0\}.$$

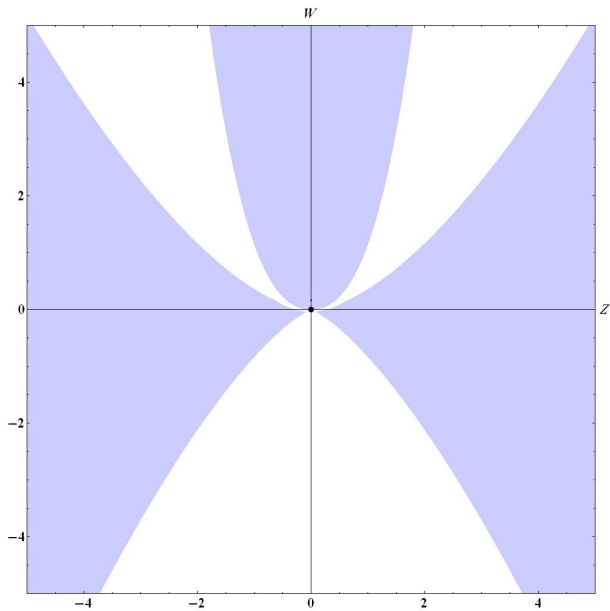
Вопросы:

- Диффеоморфные стратификации $M', N' = \hat{N} \setminus \tilde{N},$
- Структура $\text{Exp} : N' \rightarrow M' ?$
- $\text{Cut} = ?$

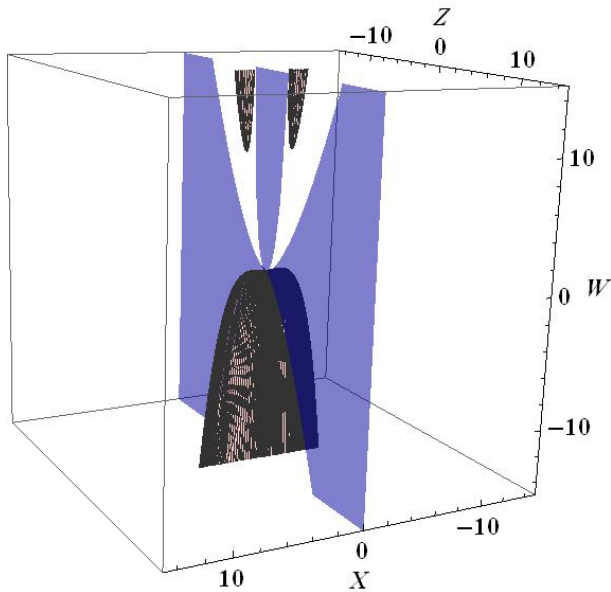
Пересечение $\text{Cut} \cap \{z = 0\}$



Пересечение $\text{Cut} \cap \{x = 0\}$



Глобальная структура множества разреза



Сфера $S = S_1(q_0)$

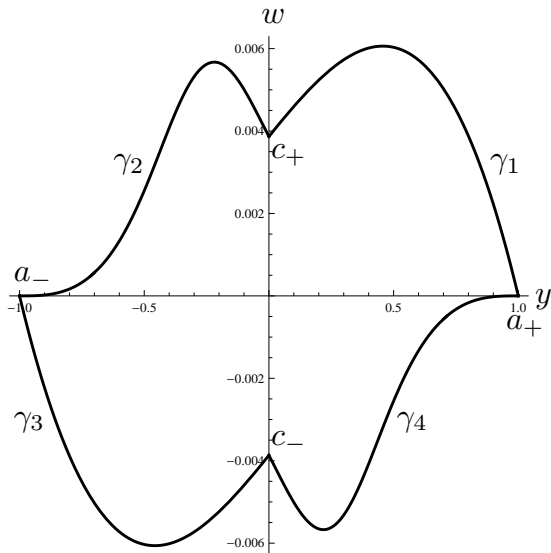
Теорема

- $\widehat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$ есть замкнутая непрерывная кривая, охватывающая начало координат,
- $\widehat{S} \cap \{yw \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 \gamma_i$ гладкие кривые ($w = v - y^3/6$),
- $\widehat{S} \cap \text{Abnorm} = \{a_-, a_+\}$, $\widehat{S} \cap \text{Conj} = \{c_-, c_+\}$,
- \widehat{S} негладкая, липшицева в окрестности точек a_{\pm} и c_{\pm} ,
- в окрестности точки a_+ пересечение $\widehat{S} \cap \{w < 0\}$ есть график плоской функции

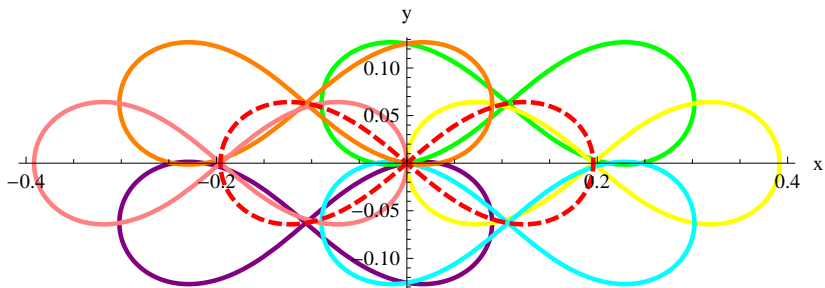
$$w = w_2(y) = -\frac{Y^3}{6} + CY^3 e^{-\frac{2}{Y}}(1 + o(1)), \quad Y = \frac{1-y}{2},$$

- \widehat{S} несубаналитична в окрестности точек a_{\pm} , поэтому и сфера S несубаналитична.

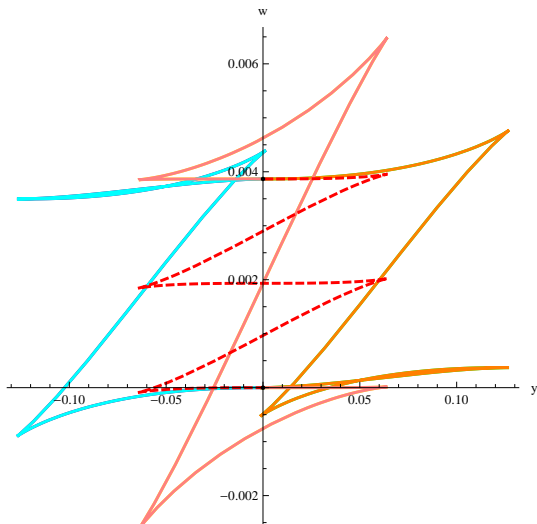
Пересечение $\hat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$



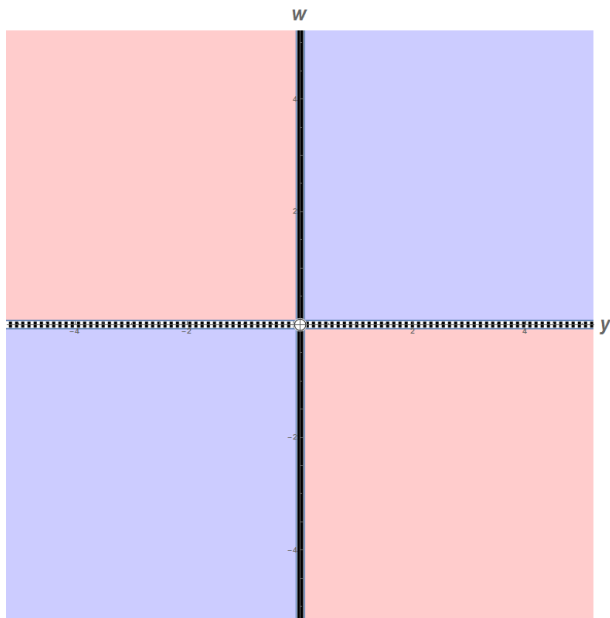
Однопараметрическое семейство кратчайших,
приходящих в сопряженную точку c_{\pm} на сфере,
проекция на (x, y)



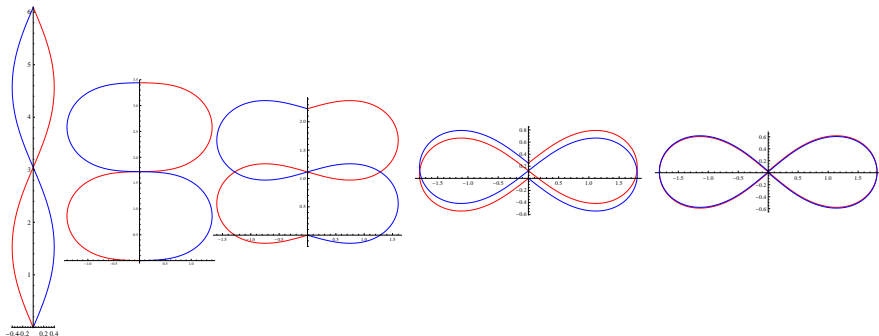
Однопараметрическое семейство кратчайших,
приходящих в сопряженную точку c_{\pm} на сфере,
проекция на (y, w)



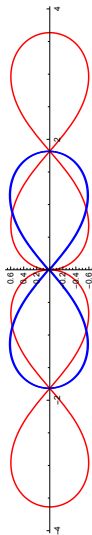
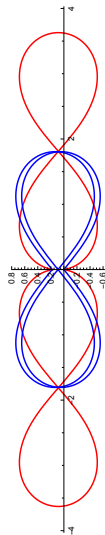
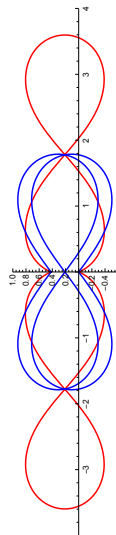
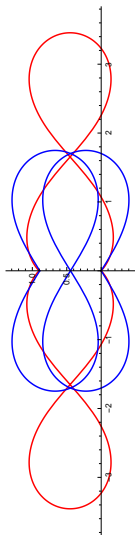
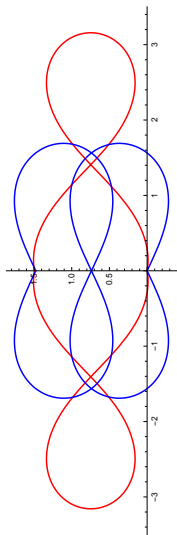
$$\text{Cut} \cap \{x = z = 0\}$$



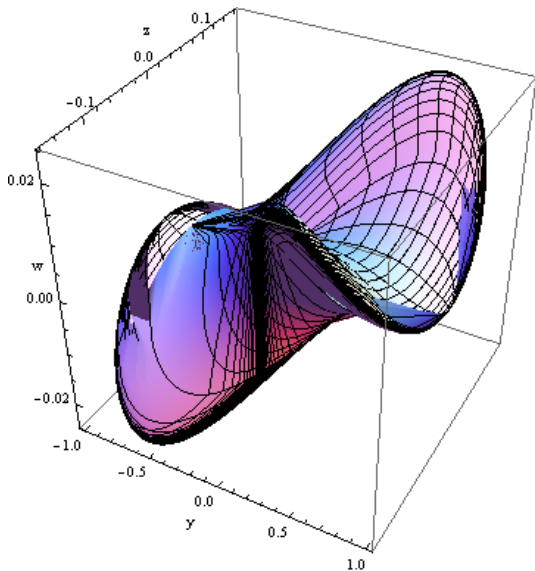
Эластики, порождающие $\text{Max}_1 \cap \{x = z = 0\}$



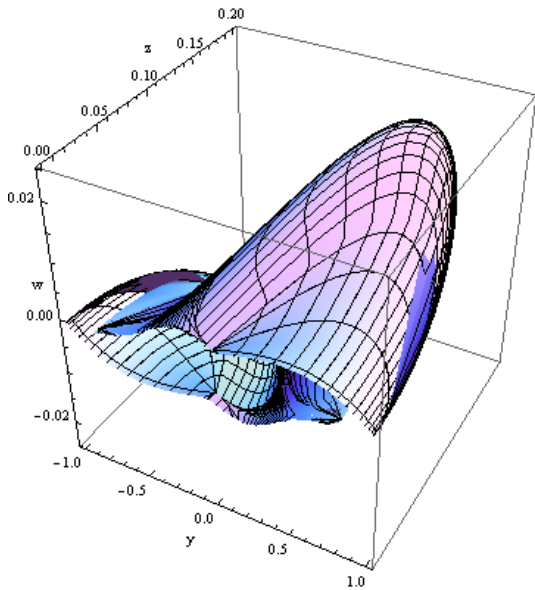
Эластики, порождающие $\text{Max}_2 \cap \{x = z = 0\}$



Сфера $S \cap \{x = 0\}$



Полусфера $S \cap \{x = 0, z > 0\}$



Публикации

1. Yu. Sachkov, I. Moiseev, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399.
2. Yu. Sachkov, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039.
3. Yu. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.
4. Y.A.Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Parametrization of Extremal Trajectories in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 3 (July), 341–364.

Публикации

5. Y.A.Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Maxwell Strata and Conjugate Points in the Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $SH(2)$, *submitted*,
6. Y.A.Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Cut locus in the Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $SH(2)$, *in preparation*,
7. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, Мат. сборник (2011), Т. 202, No. 11, С. 31-54.
8. A.Ardentov, Yu. Sachkov, Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 195, No. 3, December, 2013, 369–390.
9. A.Ardentov, Yu. Sachkov, Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, accepted.

Вопросы и планы

- Нильпотентная задача на группе Энгеля:
 - Cut,
 - особенности сферы,
- Субримановы задачи с вектором роста $(2, 3, 4)$:
 - асимптотика экспоненциального отображения,
 - Conj,
 - Cut,
 - особенности малых сфер,
- Левоинвариантные субримановы и римановы задачи на трехмерных группах Ли:
 - $SO(3)$,
 - $SL(2)$.
- Левоинвариантные субримановы и римановы задачи на группах Ли:
 - конструкция симметрий E_{cr} по симметриям \vec{H}_V ,
 - $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0$,
 - диффеоморфные стратификации.