

Субриманова задача на группе движений плоскости

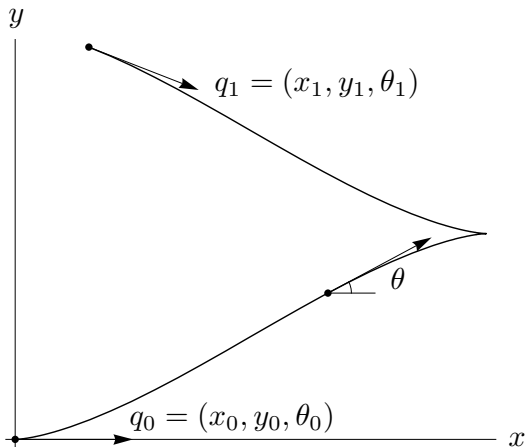
Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский
sachkov@sys.botik.ru

Международная конференция
«Современные проблемы математики,
механики и их приложений»
посвященная 70-летию В.А. Садовниченко

31 марта 2009 г.

Задача об оптимальном движении мобильного робота на плоскости



$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_{\theta}^1,$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min.$$

Группа движений плоскости

$$SE(2) = \mathbb{R}^2 \ltimes SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \right\}$$

Левинвариантный репер на группе Ли $SE(2)$:

$$X_1(q) = qE_{13}, \quad X_2(q) = q(E_{21} - E_{12}), \quad X_3(q) = [X_1, X_2](q) = -qE_{23}.$$

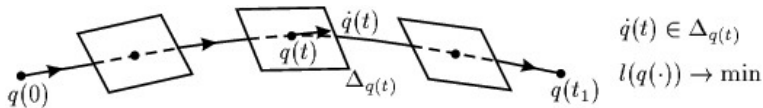
Левинвариантная субриманова задача на $SE(2)$

$$\dot{q} = uX_1(q) + vX_2(q), \quad q \in SE(2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min,$$

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$



Известные результаты для 3-мерных субримановых задач

- Левоинвариантная задача на группе Гейзенберга: глобальное решение (Р.Брокетт, 1981; А.Вершик, В.Гершкович, 1987),
- Контактные задачи в \mathbb{R}^3 : локальное исследование (А.А.Аграчев, 1996; Ж.-П.Готье, 1996),
- Случай Мартине: глобальное решение (А.А.Аграчев, Б.Боннар, М.Шибя, И.Купка, 1997),
- Левоинвариантные задачи на $SO(3)$, $SU(2)$, $SL(2)$: глобальное решение (У.Боскаин, Ф. Росси, 2008).

Левинвариантная субриманова задача на $SE(2)$: Существование решений

- $\dot{q} = uX_1(q) + vX_2(q),$

$$\text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q)) = T_qM \quad \forall q \in M$$

\Rightarrow полная управляемость

- Теорема Филиппова

\Rightarrow существование оптимальных траекторий $q(t)$.

Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

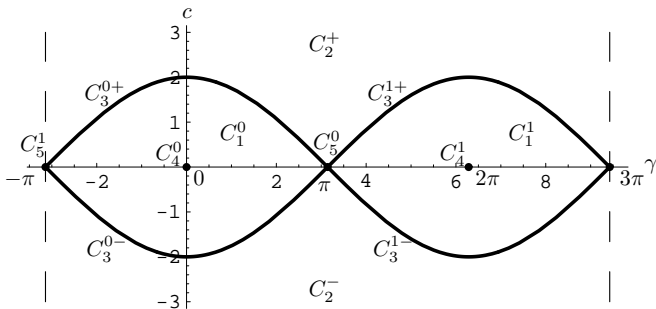
$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, & \dot{\theta} &= -\cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- Натуральная параметризация:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad l = t_1 \rightarrow \min$$

Разбиение фазового цилиндра маятника $C = \bigcup_{i=1}^5 C_i$

- Интеграл энергии $E = c^2/2 - \cos \gamma \in [-1, +\infty)$
- $C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\} \Rightarrow$ колебания,
- $C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\} \Rightarrow$ вращения,
- $C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\} \Rightarrow$ критическое движение,
- $C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\} \Rightarrow$ устойчивое равновесие,
- $C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\} \Rightarrow$ неуст. равновесие



Параметризация экстремальных траекторий

- $\lambda = (\gamma, c) \in C_1 \Rightarrow$

$$\theta_t = s_1(\operatorname{am} \varphi - \operatorname{am} \varphi_t) \pmod{2\pi},$$

$$x_t = (s_1/k)[\operatorname{cn} \varphi(\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) + \operatorname{sn} \varphi(t + E(\varphi) - E(\varphi_t))],$$

$$y_t = (1/k)[\operatorname{sn} \varphi(\operatorname{dn} \varphi - \operatorname{dn} \varphi_t) - \operatorname{cn} \varphi(t + E(\varphi) - E(\varphi_t))].$$

- $\lambda = (\gamma, c) \in C_2 \Rightarrow$

$$\cos \theta_t = k^2 \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t,$$

$$\sin \theta_t = k(\operatorname{sn} \psi \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi \operatorname{sn} \psi_t),$$

$$x_t = s_2 k[\operatorname{dn} \psi(\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) + \operatorname{sn} \psi(t/k + E(\psi) - E(\psi_t))],$$

$$y_t = s_2[k^2 \operatorname{sn} \psi(\operatorname{cn} \psi - \operatorname{cn} \psi_t) - \operatorname{dn} \psi(t/k + E(\psi) - E(\psi_t))].$$

- $\lambda = (\gamma, c) \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \Rightarrow$ гиперболические и линейные функции.

Экстремальные траектории: случаи общего положения

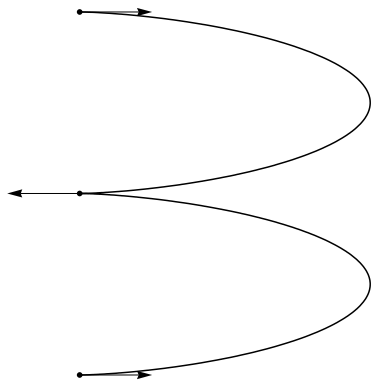


Рис.: $\lambda \in C_1$

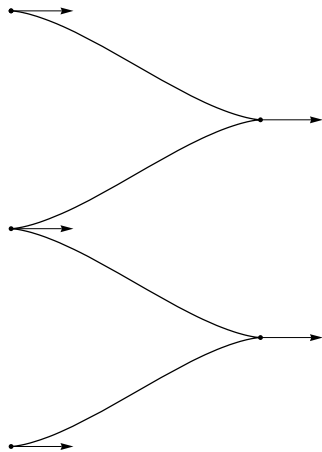


Рис.: $\lambda \in C_2$

Экстремальные траектории: специальные случаи

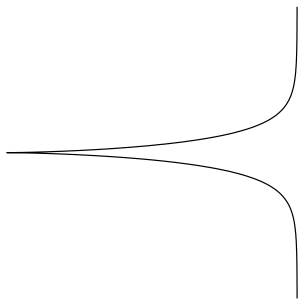


Рис.: $\lambda \in C_3$

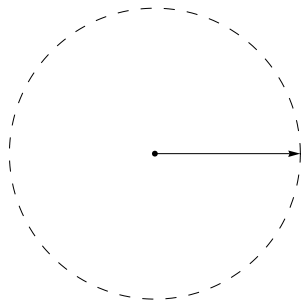


Рис.: $\lambda \in C_4$



Рис.: $\lambda \in C_5$

Потеря оптимальности

- Усиленное условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 h_u^{-1}}{\partial u^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{малые дуги } q(t) \text{ оптимальны.}$$

- **Время разреза:**

$$t_{\text{cut}}(q) = \sup\{t > 0 \mid q(s) \text{ оптимальна при } s \in [0, t]\}.$$

Причины потери оптимальности:

(1) Точка Максвелла

Точка Максвелла q_t :

\exists экстремальная траектория $\tilde{q}_s \neq \hat{q}_s$: $q_0 = \tilde{q}_0$, $q_t = \tilde{q}_t$

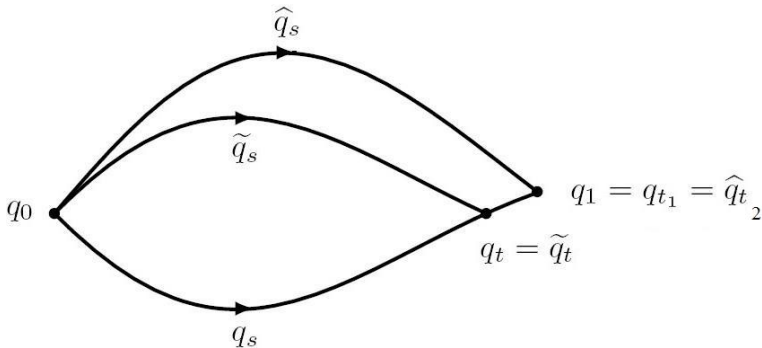
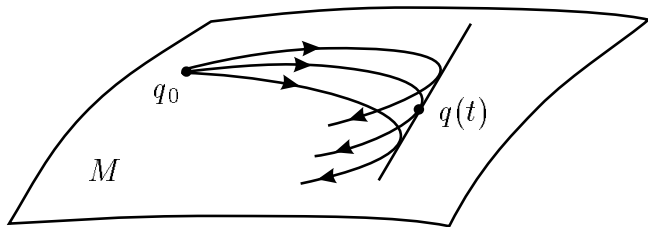


Рис.: Точка Максвелла q_t , $t_2 < t_1$

Причины потери оптимальности:
(2) Сопряженная точка

$q_t \in$ огибающей семейства экстремалей



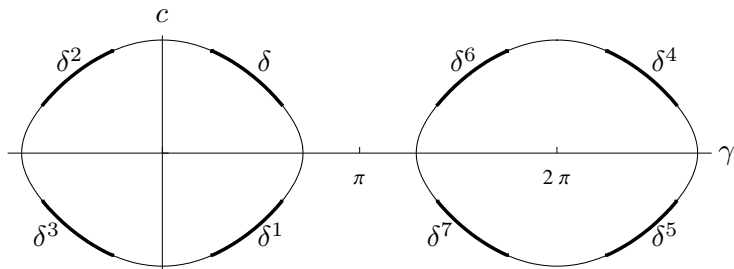
$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\text{Max}}^1, t_{\text{conj}}^1)$$

Отражения ε^i в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений $\varepsilon^i : \delta \mapsto \delta^i$ на траектории маятника:

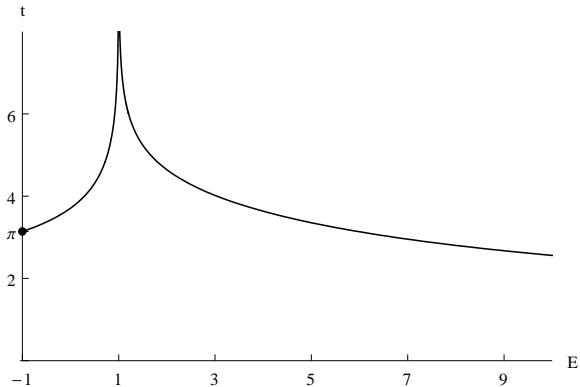


Точки Максвелла, соответствующие отражениям

- Неподвижные точки отражений ε^i :

$$t = t_{\varepsilon_i}^n, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Верхняя оценка времени разреза: $t_{\text{cut}} \leq \mathbf{t} := \min(t_{\varepsilon_i}^1)$.
- График функции $\mathbf{t} = \mathbf{t}(E)$:



Сопряженные точки

- Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : (\lambda, t) = (\gamma, c, t) \mapsto q(t),$$

$$\text{Exp} : N = C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M.$$

- $q(t)$ — сопряженная точка \iff $q(t)$ — критическое значение Exp
- $\text{Exp}(\gamma, c, t) = (x, y, \theta)$
- $\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(\gamma, c, t)} = 0$

Оценки первого сопряженного времени

- Траектории без точек перегиба:

$$\lambda \in C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty.$$

- Траектории с точками перегиба:

$$\lambda \in C_2 \quad \Rightarrow \quad t_{\varepsilon^6}^1(\lambda) \geq t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\varepsilon^2}^1(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda).$$

Глобальная структура экспоненциального отображения

- $\widehat{M} = M \setminus \{q_0\}$, $\widehat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq \mathbf{t}(\lambda)\}$
- $\text{Exp} : \widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$ сюръективно,
- $\widehat{M} = \text{Max} \cup \widetilde{M}$,
- $\widehat{N} = N_{\text{Max}} \cup \widetilde{N}$,
- $\text{Exp} : \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$ диффеоморфизм,
- $\text{Exp} : N_{\text{Max}} \rightarrow \text{Max}$ прямая сумма двух диффеоморфизмов.

Время разреза и точки разреза

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}(\lambda) = \begin{cases} t_{\varepsilon^5}^1 = 2K(k) = T/2, & \lambda \in C_1, \\ t_{\varepsilon^2}^1 = 2kp_1^1(k) \in (T, 2T), & \lambda \in C_2, \\ +\infty, & \lambda \in C_3 \cup C_5, \\ t_{\varepsilon^5}^1 = \pi = T/2, & \lambda \in C_4 \end{cases}$$

$$p = p_1^1(k) : \quad \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k) \text{sn}(p, k) = 0$$

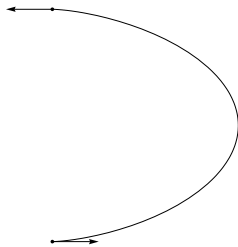


Рис.: $\lambda \in C_1$

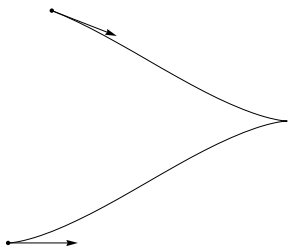


Рис.: $\lambda \in C_2$

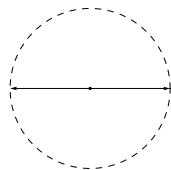


Рис.: $\lambda \in C_4$

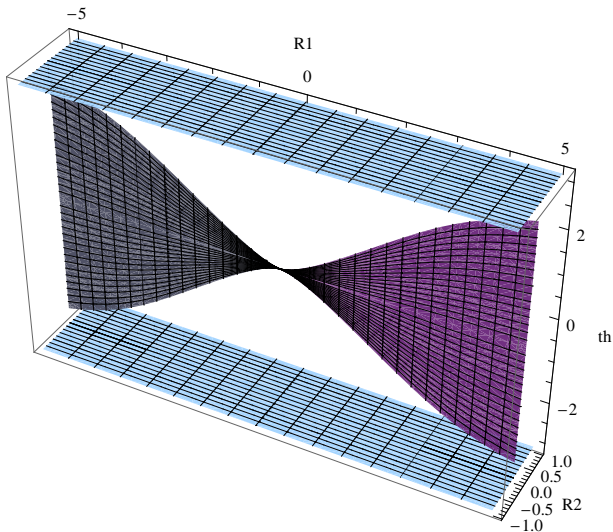
Множество Максвелла

- $\text{Max} = \text{Max}_{\text{loc}} \cup \text{Max}_{\text{glob}}$
- $\text{Max}_{\text{glob}} = \{q \in M \mid \theta = \pi\}$
- $\text{Max}_{\text{loc}} = \{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), R_2 = 0, |R_1| > R_1^1(|\theta|)\},$
 $R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}, \quad R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2},$
 $R_1^1(\theta) = 2(p_1^1(k) - E(p_1^1(k), k)),$
 $k = k_1^1(\theta) — \text{обратная функция к } \theta = k \operatorname{sn}(p_1^1(k), k).$
- $q_1 \in \text{Max} \Rightarrow 2$ оптимальные траектории,
- $q_1 \in \tilde{M} \Rightarrow 1$ оптимальная траектория.

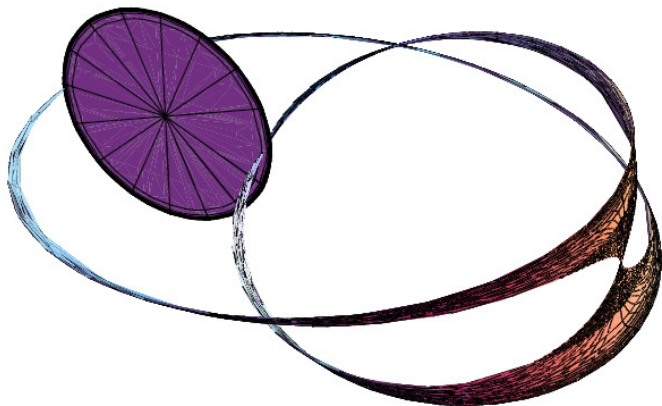
Оптимальный синтез в задаче $q(0) = q_1, q(t_1) = q_0 = (0, 0, 0)$

- $q_1 \in \hat{M} = M \setminus \{q_0\}$
- $\text{Exp} : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$ сюръективно
- $\text{Exp}^{-1}(q) = \begin{cases} \{(\lambda, t)\}, & \text{если } q \in \tilde{M} = \hat{M} \setminus \text{Max}, \\ \{(\lambda', t) \neq (\lambda'', t)\}, & \text{если } q \in \text{Max} \end{cases}$
- $\text{Exp}^{-1}(q_1) = (\lambda, t), \quad \lambda = (\gamma, c) \in (2S^1) \times \mathbb{R}, t > 0$
- $\ddot{\gamma}_s = -\sin \gamma_s, (\gamma_0, \dot{\gamma}_0) = (\gamma, c), s \in [0, t]$
- $u_1(q_1) = -\sin(\gamma_t/2), u_2(q_1) = \cos(\gamma_t/2)$
- оптимальный синтез $q_1 \mapsto (u_1, u_2)$ двузначен на Max , однозначен на \tilde{M} .

Множество Максвелла в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



Множество Максвелла: глобальное расположение

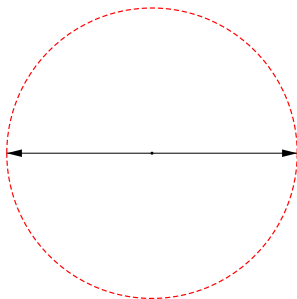


Оптимальные решения

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

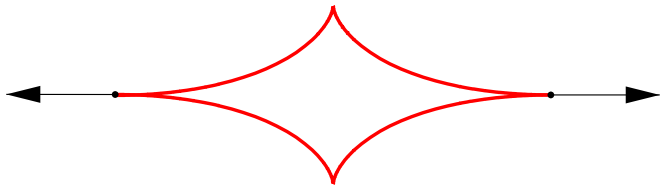


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



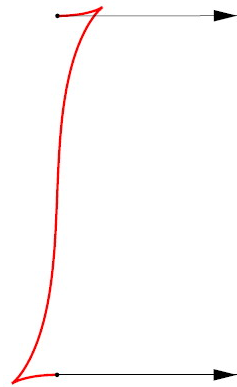
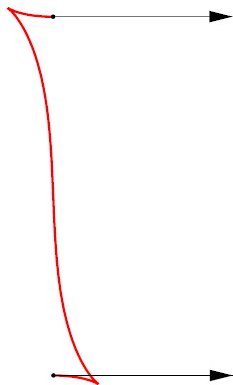
Оптимальные решения

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



Оптимальные решения

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



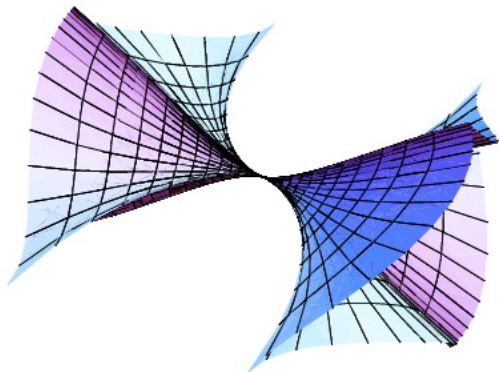
Оптимальные решения

Общий случай:

системы уравнений в функциях Якоби \Rightarrow

\Rightarrow компьютерная программа в системе MATHEMATICA.

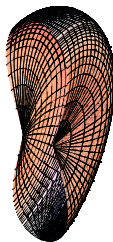
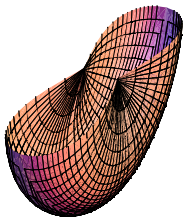
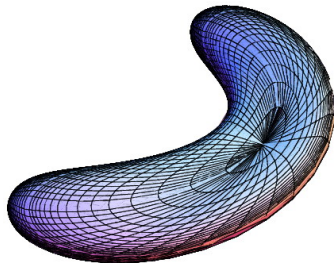
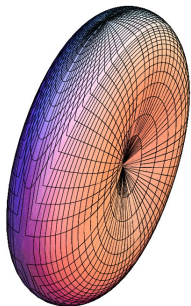
Субриманова каустика $\{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in N, t = t_{\text{conj}}^1(\lambda)\}$



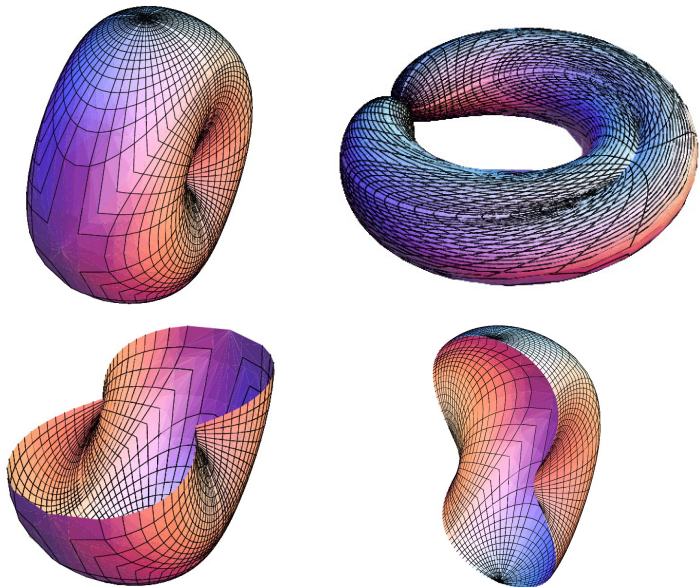
Субримановы сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\},$
- $S_R = \{q \in M \mid d(q_0, q) = R\},$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2,$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2/\{N = S\},$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong T^2.$

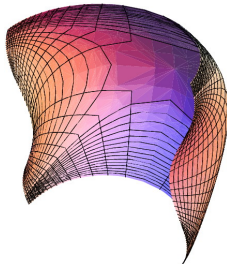
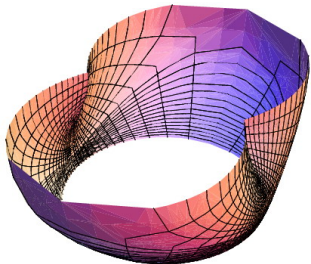
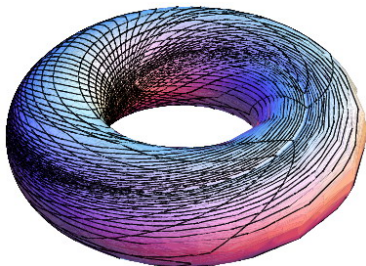
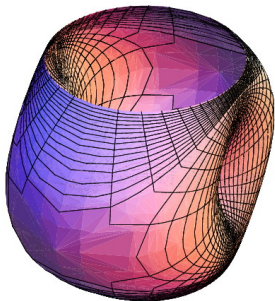
Субриманова сфера радиуса меньше π



Субриманова сфера радиуса π



Субриманова сфера радиуса больше π



Восстановление контуров и изображений с помощью субримановых геодезических на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$

