Математические заметки

том 58 выпуск 3 сентябрь 1995

УПРАВЛЯЕМОСТЬ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СКАЛЯРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ОРТАНТЕ

Ю. Л. Сачков

1. Введение. Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\dot{x} = (A + uB)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A и B – постоянные вещественные $n \times n$ матрицы, $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – кусочно-постоянное неограниченное управление.

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $R(x)$ множество всех точек в $\mathbb{R}^n$, достижимых из x за произвольное неотрицательное время, т.е.

$$R(x) = \bigl\{\gamma(T) : \gamma(\cdot) - \text{траектория системы (1)},\ \gamma(0) = x,\ T \geqslant 0\bigr\}.$$

Положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ и *открытый положительный ортант* $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ определим равенствами

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant 0\}, \qquad \mathring{\mathbb{R}}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}.$$

Следующее определение было предложено У. М. Бутби в [1]:

Определение 1. Система (1) называется *управляемой в положительной ортанте*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ имеем $R(x) \supset \mathring{\mathbb{R}}^n_+$.

В [1] отмечено, что свойство управляемости системы (1) в положительном ортанте имеет смысл рассматривать, лишь если все траектории этой системы, начинающиеся в $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, не выходят из этого множества, т.е. когда

все внедиагональные элементы $A = (a_{ij})$ неотрицательны и B диагональна: $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. (2)

В данной работе изучается вопрос об управляемости системы (1) в положительном ортанте в предположении условий (2) при $n > 2$. Показано, что в случае общего положения ответ на этот вопрос отрицателен. Это следует из существования гиперповерхностей, разделяющих $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ на две части и пересекаемых всеми траекториями системы (1) только в одном направлении. Полученный результат является обобщением трехмерного результата автора в [2].

Для $n = 2$ этот вопрос был исследован полностью А. Баччиотти в [3]. В двумерном случае множество пар матриц (A, B) удовлетворяющих (2), для которых система (1) управляема в положительном ортанте, имеет непустую внутренность и не является всюду плотным.

2. Предварительные леммы. Рассмотрим сначала случай общего положения, когда наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы B отличны от всех остальных:

$$B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n), \qquad b_1 < b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} < b_n. \tag{3}$$

Рассмотрим следующую функцию, определенную на $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$:

$$H(x) = \sum_{i=2}^{n-1} x_1^{c_i} x_i x_n^{d_i},$$

где при $i = 1, \dots, n$ коэффициенты c_i и d_i определяются равенствами

$$c_i = \frac{b_i - b_n}{b_n - b_1}, \qquad d_1 = \frac{b_1 - b_i}{b_n - b_1}.$$

Отметим следующие свойства этих коэффициентов:

$$\begin{gathered} c_1 = d_n = -1, \qquad c_n = d_1 = 0, \\ -1 < c_i < 0, \quad -1 < d_i < 0, \qquad i = 2, \dots, n-1, \\ c_i + d_i = -1, \qquad i = 1, \dots, n, \\ b_1 c_i + b_i + b_n d_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{4}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (3). *Тогда функция* $H(x)$ *является первым интегралом уравнения* $\dot{x} = Bx$ *в* $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$.

Доказательство. Вычислим производную $H(x)$ в силу этого уравнения. В силу равенства (4):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=2}^{n-1} (c_i b_1 + b_i + d_i b_n) x_1^{c_i} x_i x_n^{d_i} \equiv 0.$$

Итак, векторное поле Bx касается любой гиперповерхности $\{H(x) = C\}$ во всех ее точках $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$. Направление пересечения гиперповерхности $\{H(x) = C\}$ полем Ax определяется знаком функции

$$f(x) = \langle \operatorname{grad} H(x), Ax \rangle.$$

Лемма 2.2. *Пусть* $n > 2$, $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ *матрица такая, что*:

$$\begin{aligned} &a_{1n} > 0, \quad a_{n1} > 0, \\ &a_{1j} \geqslant 0, \quad a_{nj} \geqslant 0, \quad a_{1j} + a_{nj} > 0, \qquad j = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Пусть также выполнено условие (3). *Тогда при достаточно больших* C *выполнено неравенство*

$$\left(f(x) \big|_{H(x)=C} \right) < 0.$$

Доказательство. Введем однородные координаты $u = (u_2, \dots, u_n)$: $u_i = x_i / x_1$, $i = 2, \dots, n$, и, кроме того, положим $u_1 \equiv 1$. В новых координатах имеем:

$$f(u) = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} u_j u_n^{d_i} \left(c_i a_{1j} u_i + a_{ij} + d_i a_{nj} \frac{u_i}{u_n} \right), \qquad H(u) = \sum_{i=2}^{n-1} u_i u_n^{d_i}.$$

Мы хотим показать, что

$$\text{для достаточно больших } C \quad \left(f(u) \big|_{H(u)=C} \right) < 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$f(u) = P_1(u) + N_1(u) + P_2(u) + N_2(u) + P_3(u) + N_3(u),$$

где $N_i(u)$ – отрицательные члены, а $P_i(u)$ – члены с неопределенным знаком:

$$N_1(u) = a_{1n} \sum_{i=2}^{n-1} c_i u_i u_n^{d_i+1}, \quad N_2(u) = a_{n1} \sum_{i=2}^{n-1} d_i u_i u_n^{d_i-1},$$

$$N_3(u) = \sum_{i,j=2}^{n-1} (c_i a_{1j} u_i u_j u_n^{d_i} + d_i a_{nj} u_i u_j u_n^{d_i-1}),$$

$$P_1(u) = a_{11} \sum_{i=2}^{n-1} c_i u_i u_n^{d_i}, \quad P_2(u) = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j u_n^{d_i},$$

$$P_3(u) = a_{nn} \sum_{i=2}^{n-1} d_i u_i u_n^{d_i}.$$

Докажем утверждение (5), разделяя область изменения u на три части и делая необходимые оценки в каждой части.

А) Сначала доказываем, что

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall C > 0 \quad \big(f(u)\big|_{H(u)=C, u_n<\varepsilon}\big) < 0.$$

Действительно, для малых u_n знак $\big(f(u)|_{H(u)=C}\big)$ определяется членом $N_2(u)$: легко видеть, что

$$P_k(u) = o\big(N_2(u)\big), \qquad u_n \to 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Б) Затем делаем аналогичные оценки для больших u_n, т.е. показываем, что

$$\exists K > 0 \, \forall C > 0 \quad \big(f(u)\big|_{H(u)=C, u_n>K}\big) < 0,$$

используя то, что при больших u_n знак $\big(f(u)|_{H(u)=C}\big)$ определяется членом $N_1(u)$.

В) После этого доказываем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall K > 0 \, \forall \text{ достаточно больших } C \quad \big(f(u)\big|_{H(u)=C, \varepsilon \leqslant u_n \leqslant K}\big) < 0.$$

Сейчас главным является член $N_3(u)$: при $\varepsilon \leqslant u_n \leqslant K$ и достаточно больших C все члены $P_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, подавляются отрицательным членом $N_3(u)$.

Теперь (5) очевидно следует из А), Б), и В).

3. Условия неуправляемости. В этом разделе даются два условия, достаточные для неуправляемости системы (1) в положительном ортанте. Первый результат охватывает случай общего положения:

Теорема 3.1. *Пусть* $n > 2$ *и выполнены условия* (2). *Пусть также имеют место следующие неравенства*:

$$\begin{gathered} a_{1n} > 0, \quad a_{n1} > 0, \\ a_{1j} + a_{nj} > 0, \qquad j = 2, \dots, n-1, \\ b_1 < b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} < b_n. \end{gathered}$$

Тогда система (1) *не является управляемой в положительном ортанте.*

Доказательство. Для всех достаточно больших C гиперповерхность $\{H(x) = C\}$ пересекается всеми траекториями системы (1) только в одном направлении – направлении убывания $H(x)$ (см. леммы 2.1 и 2.2).

Докажем еще одно условие, достаточное для неуправляемости; оно касается некоторых вырожденных случаев, не охваченных условиями теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $n > 2$ *и выполнены условия* (2). *Пусть для некоторых* i, j, *таких что* $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *имеем*:

$$\begin{gathered} b_i = b_j, \\ (\forall\, k \neq i \quad a_{ik} > 0) \quad \text{или} \quad (\forall\, k \neq j \quad a_{jk} > 0). \end{gathered}$$

Тогда система (1) *не является управляемой в положительном ортанте.*

Доказательство. Предположим, что выполнено первое условие, $(\forall\, k \neq i \;\, a_{ik} > 0)$; если выполнено второе, заменим j на i.

Рассмотрим функцию $G(x) = x_j/x_i$ и покажем, что при достаточно больших C гиперплоскость $\{G(x) = C\}$ пересекается всеми траекториями системы (1) в $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ только в одном направлении.

Действительно, поле Bx касается гиперплоскости $\{G(x) = C\}$ в силу равенства $b_i = b_j$. Направление пересечения этой гиперплоскости полем Ax определяется знаком функции

$$p(x) = \langle \operatorname{grad} G(x), Ax \rangle.$$

Введем однородные координаты: $v = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$, где $v_k = x_k / x_i$ при $k \neq i$. В этих координатах имеем:

$$
\begin{aligned}
G(v) &= v_j, \\
p(v) &= \sum_{k \neq i,j} \big(a_{jk} - G(v) a_{ik}\big) v_k + a_{ji} + a_{jj} G(v) - G(v) a_{ii} - G^2(v) a_{ij}.
\end{aligned}
$$

Методом, примененным в лемме 2.2, легко показывается, что для достаточно больших C имеем

$$
\big(p(v)\big|_{G(v)=C}\big) < 0.
$$

Поэтому для достаточно больших C все траектории системы (1) пересекают гиперплоскость $\big\{G(x) = C\big\}$ в $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ только в одном направлении – направлении убывания $G(x)$.

Хотя при $n > 2$ почти все системы (1), удовлетворяющие условиям (2), не являются управляемыми в положительном ортанте, при $n = 3$ можно привести примеры таких управляемых в положительном ортанте систем и вообще дать некоторые достаточные условия управляемости (касающиеся лишь вырожденных случаев).

Автор выражает благодарность профессору А. Ф. Филиппову за внимание к работе.

Институт Программных Систем РАН

Поступило
25.05.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Boothby W. M. Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems // SIAM J. Control Optim. 1982. V. 20. №5. P. 634–644.

[2] Сачков Ю. Л. Управляемость двумерных и трехмерных билинейных систем в положительном ортанте // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 361–363.

[3] Bacciotti A. On the positive orthant controllability of two-dimensional bilinear systems // Systems and Control Lett. 1983. V. 3. P. 53–55.