КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ СУБРИМАНОВЫХ СТРУКТУР НА СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ $SL_2(\mathbb{R})$

© 2013 г. А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков

*

Аннотация

В этой работе мы начинаем исследование субримановых кратчайших для левоинвариантных субримановых структур на группе Ли $SL_2(\mathbb{R})$. Наиболее эффективный подход к этой задаче основан на теории оптимального управления. Поиск параметризации субримановых геодезических может быть нетривиальной задачей даже для левоинвариантных субримановых структур на группах Ли. Возникает естественный вопрос о теоретической возможности такой параметризации в некотором разумном смысле — вопрос интегрируемости ОДУ, определяющих субримановы геодезические. В этой статье мы докажем, что гамильтонова система ОДУ для субримановых геодезических интегрируема по Лиувиллю для контактных левоинвариантных субримановых структур эллиптического типа на группе Ли $SL_2(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: Субриманова геодезическая, левоинвариантное распределение, специальная линейная группа, интегрируемость.

1 Введение

Путь G — связная трехмерная унимодулярная группа Ли, и L — алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на G. Левоинвариантной субримановой (СР) структурой на G называется левоинвариантное подрасслоение касательного расслоения $\Delta \subset TG$, $\Delta + [\Delta, \Delta] = TG$ ранга 2, снабженное левоинвариантным скалярным произведением g на Δ [1]. Субриманову структуру можно определить с помощью ортонормированного репера $f_1, f_2 \in L$:

$$\Delta_q = span(f_1(q), f_2(q)), \quad g(f_i(q), f_j(q)) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2,$$

где $q \in G$, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Субримановой кратчайшей (СР-кратчайшей) называется липшецева кривая $q : [0, t_1] \to G$ такая, что $\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)}$ для почти всех $t \in [0, t_1]$, и длина кривой

$$l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\dot{q}(t), \dot{q}(t))}\, dt$$

минимальна среди всех таких кривых, соединяющих две заданные точки $q(0) = q_0$ и $q(t_1) = q_1$.

Иными словами, СР кратчайшая является решением следующей задачи оптимального управления [2]:

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \qquad q \in G, \qquad (u_1, u_2) \in R^2, \tag{1}$$

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{3}$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Договор No 14.B25.31.0029)

Субримановой геодезической (СР геодезической) называется кривая на G, достаточно малые дуги которой являются субримановыми кратчайшими.

Субриманова геометрия является быстро развивающейся областью математики, лежащей на пересечении дифференциальной геометрии, уравнений в частных производных, теории оптимального управления и вариационного исчисления, метрического анализа, теории групп и алгебр Ли, и других важных областей математики. Она имеет богатые приложения в классической и квантовой механике [3], робототехнике [4], нейрофизиологии зрения [5], машинной графике [6] и т.д.

В этой работе мы начинаем исследование субримановых кратчайших на специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{R})$. Наиболее эффективный подход к этой задаче основан на теории оптимального управления и состоит из следующих этапов [7] :

1. Доказательство существования СР кратчайших. В задачах субримановой геометрии в общем случае этот пункт является стандартным следствием теоремы Рашевского-Чжоу и теоремы Филиппова. В частности, это выполнено и для рассматриваемой задаче на $SL_2(\mathbb{R})$;

2. параметризация СР геодезических с помощью принципа максимума Понтрягина;

3. выбор СР кратчайших среди СР геодезических с помощью условий оптимальности второго порядка и детального изучения структуры семейства СР геодезических.

Отметим, что сложность отмеченных этапов возрастает очень быстро по мере продвижения. Существование СР кратчайших для левоинвариантных структур на группах Ли (этап 1) является стандартным следствием теоремы Рашевского-Чжоу и теоремы Филиппова. Явная параметризация СР геодезических была получена во многих задачах [2]. Полное описание всех СР кратчайших (оптимальный синтез в приведенной выше задаче оптимального управления) известно лишь в нескольких простейших случаях: группа Гейзенберга [8], группа $SO(3)$, $SU(2)$, $SL(2)$ с метрикой Киллинга [9], $SE(2)$ [10]. Поиск параметризации СР-геодезических может быть нетривиальной задачей даже для левоинвариантных СР-структур на группах Ли. Так возникает вопрос о теоретической возможности такой параметризации в некотором естественном смысле — вопрос интегрируемости системы ОДУ, определяющей СР геодезические. В статье [11] представлен пример 6-мерной группы Ли с неинтегрируемой системой ОДУ для СР геодезических.

В этой статье мы докажем, что гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (система ОДУ для СР геодезических) интегрируема по Лиувиллю для эллиптических контактных левоинвариантных СР структур на специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{R})$.

2 Субримановы структуры и принцип максимума Понтрягина

Левоинвариантные контактные СР структуры на трехмерных группах Ли были классифицированы с точностью до локальных изометрий в недавней работе А. Аграчев и Д. Барилари [12]. В частности, было показано, что если G — унимодулярная группа, т.е. ее алгебра Ли является одной из следующих алгебр Ли: h_3, $so(3)$, $sl(2)$, $se(2)$, или $sh(2)$, то существует ортонормированный репер

$$\Delta_q = span(f_1(q), f_2(q)), \quad g(f_i(q), f_j(q)) = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,$$

такой, что $L = span\,(f_0, f_1, f_2)$, и выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$[f_2, f_1] \quad = f_0, \tag{4}$$

$$[f_1, f_0] \quad = (\chi + \kappa) f_2, \tag{5}$$

$$[f_2, f_0] \quad = (\chi - \kappa) f_1, \tag{6}$$

для некоторых постоянных $\chi \geq 0$ и $\kappa \in \mathrm{R}$.

Хорошо известно [7], что параметризованные длиной дуги СР геодезические для контактных левоинвариантных проблем на группах Ли являются проекциями

$$q(t) = \pi(\lambda(t)), \quad \pi : T^*G \to G,$$

траекторий гамильтоновой системы

$$\dot\lambda = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*G,$$

где функция Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \tfrac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda)), \\ h_i(\lambda) &= \langle \lambda, f_i(q)\rangle, \quad q = \pi(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь гамильтоново векторное поле $\vec{H}$ на кокасательном расслоении T^*G задается следующим уравнением:

$$\sigma_\lambda(\cdot, \vec{H}) = d_\lambda H, \quad \lambda \in T^*G,$$

где $\sigma = ds$, $s_\lambda = \lambda \circ \pi_*$.

Целью данной работы является исследование интегрируемости гамильтонова векторного поля $\vec{H}$ на специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{R})$ для левоинвариантных СР структур эллиптического типа.

В силу соотношений (4)–(6) мы имеем следующие соотношения на скобки Пуассона:

$$\begin{gathered} \{H, h_1\} = h_2 \{h_2, h_1\} = h_2 h_0, \\ \{H, h_2\} = h_1 \{h_1, h_2\} = -h_1 h_0, \\ \{H, h_0\} = h_1 \{h_1, h_0\} + h_2 \{h_2, h_0\} = 2\chi h_1 h_2. \end{gathered}$$

Таким образом гамильтонова система с гамильтонианом H имеет следующий вид:

$$\dot h_1 = h_2 h_0, \tag{7}$$

$$\dot h_2 = -h_1 h_0, \tag{8}$$

$$\dot h_0 = 2\chi h_1 h_2, \tag{9}$$

$$\dot q = h_1 f_1 + h_2 f_2. \tag{10}$$

Хорошо известно, что гамильтониан H является первым интегралом гамильтоновой системы (7)–(10). В полярных координатах

$$h_1 = r\cos\theta, \quad h_2 = r\sin\theta,$$

вертикальная подсистема гамильтоновой системы (7)–(10) (для сопряженных переменных h_i) сводится к уравнению маятника

$$\begin{aligned} \dot r &= 0, \\ \dot\theta &= -h_0, \\ \dot h_0 &= \chi r^2 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Сделав еще одну замену переменных

$$\gamma = 2\theta, \quad c = -2h_0,$$

мы получаем классическую систему, описывающую математический маятник:

$$\begin{aligned} \dot r &= 0, \\ \dot\gamma &= c, \\ \dot c &= -2\chi r^2 \sin\gamma. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что эта система имеет первый интеграл — полную энергию маятника

$$E = \frac{c^2}{2} - 2\chi r^2 \cos\gamma = 2h_0^2 - 2\chi(h_1^2 - h_2^2). \tag{11}$$

Итак, мы установили, что гамильтонова система (7)–(10) имеет 2 левоинвариантных первых интеграла: гамильтониан H и полную энергию маятника E. Для того чтобы установить интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы (7)–(10) требуется предъявить три линейно независимых первых интеграла, находящихся в инволюции [13]. В следующем разделе на основе анализа правоинвариантных векторных полей на группе мы найдем недостающий 3-ий первый интеграл для гамильтоновой системы (7)–(10) и покажем, что интегралы являются функционально независимыми и находятся в инволюции.

3 Группа $SL_2(\mathbb{R})$. Линейные преобразования плоскости, сохраняющие площадь

Группа Ли $SL(2) = SL_2(\mathbb{R})$ (везде в тексте мы подразумеваем группу над полем вещественных чисел R, далее мы будем использовать обозначение $SL(2)$) и ее алгебра Ли $sl(2)$ в наиболее часто используемом базисе параметризуются 2×2 матрицами [14]:

$$SL(2) = \left\{X \in \mathrm{R}^{2\times 2} | \det X = 1\right\}, \tag{12}$$

$$sl(2) = \left\{A \in \mathrm{R}^{2\times 2} | trA = 0\right\} = span(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}), \tag{13}$$

где E_{ij} обозначает матрицу, единственный ненулевой элемент которой находится в позиции (i, j) и равен 1.

Далее в тексте мы будем использовать другое представление группы $SL(2)$, а именно мы будем задавать элемент группы матрицей порядка 3×3 следующего вида:

$$SL(2) = \left\{ G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | \det G = 1 \right\}. \tag{14}$$

Для алгебры Ли $sl(2)$ мы будем использовать следующий базис:

$$sl(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | A_{11} + A_{22} = 0 \right\} = span(A_1, A_2, A_3), \tag{15}$$

$$A_1 = E_{12} + E_{21}, \qquad A_2 = E_{11} - E_{22}, \qquad A_3 = E_{12} - E_{21}, \tag{16}$$

$$[A_2, A_1] = 2A_3, \qquad [A_1, A_3] = -2A_2, \qquad [A_2, A_3] = 2A_1. \tag{17}$$

Для параметризации группы $SL(2)$ с помощью 3-х параметров ν, α, φ мы используем следующее разложение:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N(\nu) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ \nu & \mathrm{sh}\ \nu & 0 \\ \mathrm{sh}\ \nu & \mathrm{ch}\ \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi & 0 \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad v \in R, \; \alpha \in R, \; \varphi \in S^1,$$

$$SL(2) \ni G = A(\alpha)N(\nu)K(\varphi) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Явные выражения для G_{ij} имеют следующий вид:

$$G_{11} = e^{\alpha}\,(\cos\varphi\ \operatorname{ch}\nu - \sin\varphi\ \operatorname{sh}\nu), \tag{18}$$
$$G_{12} = e^{\alpha}\,(\sin\varphi\ \operatorname{ch}\nu + \cos\varphi\ \operatorname{sh}\nu), \tag{19}$$
$$G_{21} = e^{-\alpha}\,(-\sin\varphi\ \operatorname{ch}\nu + \cos\varphi\ \operatorname{sh}\nu), \tag{20}$$
$$G_{22} = e^{-\alpha}\,(\cos\varphi\ \operatorname{ch}\nu + \sin\varphi\ \operatorname{sh}\nu). \tag{21}$$

Мы имеем следующий изоморфизм множеств:

$$SL(2) \cong \mathrm{R}_{\nu} \times \mathrm{R}_{\alpha} \times S_{\varphi}, \qquad \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (\nu,\, \alpha, \varphi)^T.$$

Два неэквивалентных левоинвариантных распределения может быть определено на группе $SL(2)$ (см. [12]). Различие обусловлено сужением формы Киллинга на распределение (она может быть положительно определенной или знакопеременной). Согласно [12] мы будем говорить, что в первом случае задана эллиптическая структура $SL_e(2)$ на группе $SL(2)$, и гиперболическая структура $SL_h(2)$ во втором случае.

Канонический репер для $SL_e(2)$ имеет следующий вид :

$$f_1 = \tfrac{1}{2}GA_1, \quad f_2 = \tfrac{\xi}{2}GA_2, \quad f_0 = \tfrac{\xi}{2}GA_3,\ G \in SL(2),\ \xi > 1, \tag{22}$$
$$[f_1, f_0] = -f_2, \qquad [f_2, f_0] = \xi^2\, f_1, \qquad [f_2, f_1] = f_0. \tag{23}$$

Здесь и далее в тексте мы переходим от двух параметров $(\chi,\, \kappa)$, введенных в работе [12], к одному параметру ξ, используя следующие соотношения:

$$\chi = (-1 + \xi^2)/2, \qquad \kappa = (-1 - \xi^2)/2.$$

Далее мы будем изучать интегрируемость левоинвариантных субримановых структур на $SL(2)$ для случая $SL_e(2)$. А именно, мы докажем интегрируемость по Лиувиллю семейства гамильтоновых систем (7)–(10) на $SL(2)$, параметризованного константой ξ.

Мы начнем исследование с управляемой системы†

$$\dot G = u_1 f_1(G) + u_2 f_2(G), \qquad G \in SL(2), \qquad (u_1, u_2) \in R^2, \tag{24}$$
$$G(0) = Id, \qquad G(t_1) = G_1, \tag{25}$$
$$l = \int_0^{t_1} \tfrac{u_1^2 + u_2^2}{2}\, dt \to \min. \tag{26}$$

Далее мы применим к этой системе принцип максимума Понтрягина, с помощью техники левоинвариантных гамильтонианов, линейных на слоях кокасательного расслоения. После этого мы исследуем вопрос интегрируемости по Лиувиллю полученной системы.

4 Интегрируемость эллиптической структуры $SL_e(2)$

В этом пункте мы рассматриваем задачу (24)–(26) в эллиптическом случае $SL_e(2)$, то есть когда левоинвариантные векторные поля f_i задаются формулами (22)–(23). Управляемая система имеет вид:

$$\dot G = \begin{pmatrix} G_{12} & G_{11} & 0 \\ G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tfrac{u_1}{2} + \begin{pmatrix} G_{11} & -G_{12} & 0 \\ G_{21} & -G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tfrac{\xi\, u_2}{2}. \tag{27}$$

†Заметим, что интеграл (22) в рассматриваемой задаче отличается от исходного (3) отсутствием корня в подынтегральном выражении. Используя неравенство Коши-Буняковского, можно показать, что эти задачи являются эквивалентными (см. [7]). Отметим также, что в силу левоинвариантности рассматриваемой задачи мы можем зафиксировать начальное условие в единице группы $G(0) = Id$ без ограничения общности.

Рассмотрим гладкую кривую, выходящую из единицы группы

$$G(t) = \{G(\nu(t), \alpha(t), \varphi(t)) | G(0) = Id \sim \{\nu = 0,\ \alpha = 0,\ \varphi = 0\}\}.$$

Вектор скорости записывается в следующем виде:

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial G}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \varphi}\dot{\varphi}.$$

Собирая коэффициенты при $\frac{\partial G}{\partial \nu}$, $\frac{\partial G}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ мы можем представить управляемую систему (24) в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi / \operatorname{ch} 2\nu \\ -\sin 2\varphi\ \operatorname{th} 2\nu \end{pmatrix} \frac{u_1}{2} + \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi / \operatorname{ch} 2\nu \\ -\cos 2\varphi\ \operatorname{th} 2\nu \end{pmatrix} \frac{\xi\, u_2}{2}.$$

Действуя аналогично, выпишем соответствие между левоинвариантными векторными полями $X_i \sim f_i$ ($i = \{1, 2, 0\}$) в матричном и векторном виде:

$$f_1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} G_{12} & G_{11} & 0 \\ G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi / \operatorname{ch} 2\nu \\ -\sin 2\varphi\ \operatorname{th} 2\nu \end{pmatrix} = X_1,$$

$$f_2 = \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} G_{11} & -G_{12} & 0 \\ G_{21} & -G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi / \operatorname{ch} 2\nu \\ -\cos 2\varphi\ \operatorname{th} 2\nu \end{pmatrix} = X_2,$$

$$f_0 = \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} -G_{12} & G_{11} & 0 \\ -G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0.$$

Правоинвариантные векторные поля $Y_i = -A_i\, G$ выражаются следующим образом:

$$-\tfrac{1}{2} A_1\, G = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -G_{21} & -G_{22} & 0 \\ -G_{11} & -G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} 2\alpha \\ \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{th} 2\nu \\ \operatorname{sh} 2\alpha / \operatorname{ch} 2\nu \end{pmatrix} = Y_1,$$

$$-\tfrac{\xi}{2} A_2\, G = \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} -G_{11} & -G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = Y_2,$$

$$-\tfrac{\xi}{2} A_3\, G = \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} -G_{21} & -G_{22} & 0 \\ G_{11} & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{\xi}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} 2\alpha \\ -\operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{th} 2\nu \\ -\operatorname{ch} 2\alpha / \operatorname{ch} 2\nu \end{pmatrix} = Y_0.$$

Теперь запишем левоинвариантные гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, линейные на слоях кокасательного расслоения $T^*(SL(2))$:

$$\begin{aligned} h_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda_1 \cos 2\varphi + \tfrac{(\lambda_2 - \lambda_3 \operatorname{sh} 2\nu)}{\operatorname{ch} 2\nu} \sin 2\varphi\right), \\ h_2 &= \tfrac{\xi}{2}\left(-\lambda_1 \sin 2\varphi + \tfrac{(\lambda_2 - \lambda_3 \operatorname{sh} 2\nu)}{\operatorname{ch} 2\nu} \cos 2\varphi\right), \\ h_0 &= \tfrac{\xi \lambda_3}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично, правоинвариантные гамильтонианы $g_i(\lambda) = \langle \lambda, Y_i \rangle$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1 &= \tfrac{1}{2}\left(-\lambda_1 \operatorname{ch} 2\alpha + \tfrac{(\lambda_3 + \lambda_2 \operatorname{sh} 2\nu)}{\operatorname{ch} 2\nu} \operatorname{sh} 2\alpha\right), \\ g_2 &= -\tfrac{\xi \lambda_2}{2}, \\ g_0 &= -\tfrac{\xi}{2}\left(-\lambda_1 \operatorname{sh} 2\alpha + \tfrac{(\lambda_3 + \lambda_2 \operatorname{sh} 2\nu)}{\operatorname{ch} 2\nu} \operatorname{ch} 2\alpha\right). \end{aligned}$$

Заметим, что отображение $\Omega : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \to (h_1, h_2, h_0)$ невырожденное, и правоинвариантные гамильтонианы g_i выражаются через h_i. Далее в тексте мы будем использовать только координаты h_i, однако явного выражения для g_i приводить не будем, ввиду громоздкости формул.

Гамильтонова система (7)–(10) для эллиптической структуры $SL_e(2)$ принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot h_1 = h_2 h_0, \\ \dot h_2 = -h_1 h_0, \\ \dot h_0 = (-1+\xi^2) h_1 h_2, \\ \dot\nu = \frac{1}{2}\left(h_1 \cos 2\varphi \ - \xi\, h_2 \sin 2\varphi\,\right), \\ \dot\alpha = \frac{1}{2}\left(h_1 \sin 2\varphi \ + \xi\, h_2 \cos 2\varphi\,\right) / \operatorname{ch} 2\nu, \\ \dot\varphi = \frac{1}{2}\left(-h_1 \sin 2\varphi \ \ - \xi\, h_2 \cos 2\varphi\,\right) \operatorname{th} 2\nu. \end{cases} \tag{28}$$

Теорема 1. *Гамильтонова система* (28) *принципа максимума Понтрягина для эллиптических субримановых структур на группе* $SL(2)$ *интегрируема по Лиувиллю.*

$\triangleleft$ Для доказательства теоремы требуется предъявить три функционально независимых первых интеграла гамильтоновой системы (28), находящихся в инволюции.

Поскольку левые сдвиги на группе коммутируют с правыми сдвигами, правоинвариантные гамильтонианы g_i являются первыми интегралами для левоинвариантной гамильтоновой системы (28). Можно непосредственно убедиться в этом, продифференцировав g_i с учетом динамики (28). Итак, мы автоматически получили 3 первых интеграла исследуемой гамильтоновой системы.

Как было уже замечено в разделе 1, вертикальная подсистема в (28) для сопряженных переменных h_i не зависит от переменных состояния (ν, α, φ) и сводится к уравнению математического маятника. Как было замечено в разделе 1, гамильтониан $H = \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right)$ и полная энергия маятника $E = 2h_0^2 - (\xi^2-1)(h_1^2 - h_2^2)$ являются первыми интегралами системы (28). Выберем один из правоинвариантных гамильтонианов g_i, и убедимся, что мы получили полный набор первых интегралов. Для этого требуется проверить, что найденные первые интегралы функционально независимы и находятся в инволюции. Выберем для определенности g_2, поскольку этот интеграл выражается наиболее простой формулой

$$g_2 = -\left(h_2 \cos 2\varphi + h_1 \xi \sin 2\varphi\right) \operatorname{ch} 2\nu - h_3 \operatorname{sh} 2\nu.$$

Правоинвариантный гамильтониан g_2 коммутирует по Пуассону с левоинвариантными первыми интегралами H и E. Непосредственным вычислением проверяется, что интегралы H и E тоже коммутируют по Пуассону:

$$\{H, E\} = \{H, g_2\} = \{E, g_2\} = 0.$$

Это означает, что найденный набор интегралов находится в инволюции. Осталось убедиться, что найденные интегралы функционально независимы. Для этого достаточно проверить, что градиенты найденных первых интегралов ∇H, ∇E, ∇g_2 линейно независимы на открытом всюду плотном множестве $U \subseteq T^*SL(2)$. Ввиду аналитичности рассматриваемых функций H, E и g_2, это условие будет выполнено, если найдется хотя бы одна точка, в которой градиенты ∇H, ∇E, ∇g_2 линейно независимы. Запишем матрицу Якоби

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} (\nabla H)^T \\ (\nabla E)^T \\ (\nabla g_2)^T \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\left(-1+\xi^2\right) h_1 & 2\left(-1+\xi^2\right) h_2 & 4\, h_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi \operatorname{ch} 2\nu \ \sin 2\varphi & -\operatorname{ch} 2\nu \ \cos 2\varphi & \operatorname{sh} 2\nu & \nabla g_2^{\nu} & \nabla g_2^{\alpha} & \nabla g_2^{\varphi} \end{pmatrix},$$

и убедимся, что матрица J имеет ранг 3 хотя бы в одной точке. Это легко проверить, сосчитав минор порядка 3×3 по первым трем столбцам:

$$\mathrm{Det}(\mathrm{J}[3,3]) = 4\,h_0\ \mathrm{ch}\ 2\nu\,(h_1 \cos 2\varphi - h_2\xi\ \sin 2\varphi) - 4h_1\,h_2\left(-1+\xi^2\right)\ \mathrm{sh}\ 2\nu \not\equiv 0.$$

▷

Итак, мы нашли полный набор первых интегралов гамильтоновой системы (28). Это означает интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы (28) для эллиптической структуры $SL_e(2)$. В заключение добавим, что интегрируемость по Лиувиллю гиперболических структур $SL_h(2)$ может быть установлена аналогичным образом.

5 Заключение

Доказано, что гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (система ОДУ для СР геодезических) интегрируема по Лиувиллю для контактных левоинвариантных СР структур эллиптического типа на специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{R})$. В дальнейшем планируется применить описанный подход для исследования СР структур гиперболического типа $SL_h(2)$, а также явное интегрирование СР геодезических в обоих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. – Mathematical Surveys and Monographs. 2002
2. *Sachkov Yu.L.* Control Theory on Lie Groups // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 156. № 3. P. 381-439.
3. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Решение задачи Эйлера об эластиках// Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 78-88.
4. *Маштаков А.П.* Математическое и программное обеспечение задач управления в робототехнике с приложением к машинной графике. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Переславль-Залесский. 2012.
5. *Petitot J.* The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure // J. Physiology. 2003. № 97. P. 265-309.
6. *Mashtakov A.P., Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rototranslations // Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications (NM-TMA). 2013. № 6. P. 61-95.
7. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. – 392 с.
8. *Brockett R.* Control theory and singular Riemannian geometry // New Directions in Applied Mathematics. 1981. P. 11-27.
9. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces. SIAM, Journal on Control and Optimization. 2008. Vol 47. pp. 1851-1878.
10. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane// ESAIM: COCV. 2011. Vol. 17. № 2. P. 293-321.
11. *Montgomery R., Shapiro M., Stolin A.* A nonintegrable sub-Riemannian geodesic flow on a Carnot group // Journal of Dynamical and Control Systems. 1997. Vol. 3, № 4. P. 519-530.
12. *Agrachev A.A., Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. 2012. Vol. 18. № 1. P. 21-41.
13. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. - М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.
14. *Lang S.* $SL2(\mathbb{R})$. – Springer. 1975. 428 p.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.* Математическая теория оптимальных процессов. - М: Наука. 1969. 384 с.
16. *Ардентов А.А., Бесчастный И.Ю., Маштаков А.П., Сачков Ю.Л.* Интерфейс для исследования субримановых геодезических на трехмерных группах Ли // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 200-203.

ИПС им. А. К. Айламазяна РАН

Поступила в редакцию
1.06.2014 г.