УДК 517.977.1

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ НА ГРУППАХ ЛИ И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Ю.Л. САЧКОВ

Содержание

1) Данная работа написана при поддержке РФФИ, проекты 98-01-01028 и No. 97-1-1a/22.

1. Введение

Данная работа написана с целью дать полный обзор результатов по управляемости правоинвариантных систем на группах Ли и их однородных пространствах. Этот вопрос является предметом активных исследований в математической теории управления и теории полугрупп Ли в течение более чем 25 лет. Работы в этом направлении вызваны потребностями приложений в механике и геометрии, связями с другими важными классами нелинейных управляемых систем (билинейными и аффинными), а также исследованиями по обобщению теории Софуса Ли с группового случая на полугрупповой.

Структура работы подробно отражена в содержании. Определения, постановки задач, а также общие результаты по правоинвариантным системам приводятся в §§ 2–4. §§ 5–7 посвящены условиям управляемости для трех наиболее изученных случаев: однородным системам, компактным группам Ли и полупрямым произведениям. В следующих параграфах условия управляемости представлены согласно групповым свойствам пространства состояний: полупростой случай (§ 8), нильпотентный случай (§ 9) и его обобщение (§ 10), разрешимый случай и его обобщения (§§ 11–16). В заключение, в § 17 перечисляются некоторые работы, имеющие отношение к теме данного обзора.

2. Определения и общие свойства правоинвариантных систем

В данной работе будем обозначать через G вещественную группу Ли, а через L – ее алгебру Ли, т.е. множество правоинвариантных векторных полей на G.

2.1. **Основные определения.** *Правоинвариантной управляемой системой* Γ на группе Ли G называется произвольное множество правоинвариантных векторных полей на G, т.е. любое подмножество

$$\Gamma \subset L. \tag{2.1}$$

Важный для приложений класс правоинвариантных систем образуют системы, *аффинные по управлению*:

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots , u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}, \tag{2.2}$$

где A, B_1, ... , B_m — некоторые элементы L. Если пространство управлений U совпадает с $\mathbb{R}^m$, то система (2.2) есть аффинное подпространство L.

Замечание. В данной работе мы будем записывать правоинвариантные системы в виде (2.1) или (2.2), т.е. как набор векторных полей — *полисистему*. Следуя *классической нотации*, аффинные по управлению системы (2.2) записываются в виде

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i(x), \qquad u = (u_1, \dots , u_m) \in U, \quad x \in G, \tag{2.3}$$

с кусочно-постоянными управлениями $u_1(\cdot)$, ... , $u_m(\cdot)$. Полисистема (2.1) записывается в классической нотации с помощью выбора параметризации множества Γ.

Траекторией правоинвариантной системы Γ на G называется непрерывная кривая $x(t)$ в G, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и такая, что существуют разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ и векторные поля $A_1, \dots , A_k$ в Γ такие, что ограничение $x(t)$ на каждый открытый интервал (t_{i-1}, t_i) дифференцируемо и $\dot{x}(t) = A_i(x(t))$ при $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots , k$.

Для любого $T \geq 0$ и любого x из G *множеством достижимости за время* T системы Γ из точки x называется множество $\mathbb{A}_\Gamma(x, T)$ всех точек, в которые система может быть переведена из x в точности за T единиц времени:

$$\mathbb{A}_\Gamma(x, T) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ траектория } \Gamma,\ x(0) = x\}.$$

Множество достижимости за время не больше $T \geq 0$ определяется как

$$\mathbb{A}_\Gamma(x, \leq T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{A}_\Gamma(x, t).$$

Множество достижимости системы Γ из точки $x \in G$ — это множество $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ всех конечных точек $x(T)$, $T \geq 0$, всех траекторий Γ, начинающихся в точке x:

$$\mathbb{A}_\Gamma(x) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ траектория } \Gamma,\ x(0) = x,\ T \geq 0\} = \bigcup_{T \geq 0} \mathbb{A}_\Gamma(x, T).$$

Если это не приводит к неопределенности, то мы обозначаем в дальнейшем множества достижимости $\mathbb{A}_\Gamma(x, T)$ и $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ соответственно через $\mathbb{A}(x, T)$ и $\mathbb{A}(x)$.

Система Γ называется *управляемой*, если для любой пары точек x_0 и x_1 из G точка x_1 достижима из x_0 вдоль траектории Γ за некоторое неотрицательное время:

$$x_1 \in \mathbb{A}(x_0) \text{ для любых } x_0,\ x_1 \in G,$$

или, иными словами, если

$$\mathbb{A}(x) = G \text{ для любых } x \in G.$$

Другое свойство, очевидно, более слабое, чем управляемость, также существенно для описания множеств достижимости. Система Γ называется *достижимой* в точке $x \in G$, если множество достижимости $\mathbb{A}(x)$ имеет непустую внутренность в G.

Орбита системы Γ через точку $x \in G$ обозначается $\mathcal{O}_\Gamma(x)$ и определяется аналогично множеству достижимости $\mathbb{A}(x)$, но терминальное время T может принимать как положительные, так и отрицательные значения:

$$\mathcal{O}_\Gamma(x) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ траектория } \Gamma,\ x(0) = x,\ T \in \mathbb{R}\}.$$

Если система Γ задана, то ее орбита обозначается $\mathcal{O}(x)$.

Замечание. Инверсия

$$i : G \to G, \qquad i(x) = x^{-1}$$

индуцирует изоморфизм между алгеброй Ли правоинвариантных векторных полей на группе Ли G и алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей на G. Поэтому все задачи для левоинвариантных систем, включая управляемость, сводятся к изучению правоинвариантных систем.

Для любого подмножества $\Gamma \subset L$ будем обозначать через $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ алгебру Ли, порожденную Γ, т.е. наименьшую подалгебру в L, содержащую Γ.

Если l — подмножество линейного пространства V, то $\mathrm{span}(l)$ будет обозначать линейное подпространство в V, порожденное l, а $\mathrm{co}(l)$ — положительный выпуклый конус, порожденный множеством l.

Топологическое замыкание и внутренность множества M обозначаются соответственно через $\mathrm{cl}\, M$ и $\mathrm{int}\, M$.

Для тождественного оператора и единичной матрицы используется обозначение Id, а E_{ij} обозначает матрицу с единичным ij-м элементом и нулевыми остальными элементами. Транспонированная матрица A обозначается A^{T}.

2.2. **Простейшие свойства орбит и множеств достижимости.** Пусть

$$\exp\,:\, L \to G$$

— экспоненциальное отображение из алгебры Ли L в группу Ли G. Любое правоинвариантное векторное поле $A \in L$ полно. Траектория A через единицу e группы G имеет вид

$$\exp(tA), \qquad t \in \mathbb{R},$$

а

$$\exp(tA)x, \qquad t \in \mathbb{R}$$

есть траектория A через точку $x \in G$.

В следующем предложении мы приводим некоторые свойства наборов правоинвариантных векторных полей, известные из теории групп Ли.

Лемма 2.1. *Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система и x — произвольная точка группы G.*

(i) $\mathcal{O}(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(e)x$.
(iii) $\mathcal{O}(e)$ *является связной подгруппой Ли в G с алгеброй Ли* $\mathrm{Lie}(\Gamma)$.
(iv) $\mathcal{O}(x)$ *является максимальным интегральным многообразием инволютивного правоинвариантного распределения* $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ *на G, содержащим точку x.*

Нижеследующие важные свойства множеств достижимости легко следуют из правоинвариантности Γ и определения $\mathbb{A}(x)$.

Лемма 2.2. *Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система и x — произвольная точка группы G.*

(i) $\mathbb{A}(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \geq 0,\ k \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}(e)x$.
(iii) $\mathbb{A}(e)$ *является подполугруппой группы G.*
(iv) $\mathbb{A}(x)$ *является линейно связным подмножеством группы G.*

Так как все существенные свойства множеств достижимости (включая управляемость, см. теоремы 2.6, 2.7) выражаются в терминах множества достижимости из единицы $\mathbb{A}(e)$, то мы ограничимся в дальнейшем изучением этого множества и обозначим его $\mathbb{A}$. Аналогично, мы будем обозначать орбиту $\mathcal{O}(e)$ просто через $\mathcal{O}$.

2.3. **Матричные системы.** Важный класс правоинвариантных систем, который мотивировал само развитие теории таких систем, образован *матричными* управляемыми системами.

Обозначим через $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ множество всех вещественных матриц размера $n \times n$.

Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ образована всеми невырожденными $n \times n$–матрицами

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}\,.$$

Групповое умножение в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ есть обычное матричное умножение, а вещественная аналитическая структура на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ задается с помощью отождествления $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ с $\mathbb{R}^{n^2}$.

Алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ является пространство всех вещественных $n\times n$–матриц
$$\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})=\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$$
с матричным коммутатором
$$[A,B]=AB-BA,\qquad A,B\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}),$$
в качестве произведения.

Пусть G — *линейная группа*, т.е. замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, и пусть $L\subset\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ — алгебра Ли группы G.

Для любой матрицы $A\in L$ соответствующее правоинвариантное векторное поле на G задается матричным произведением
$$A(x)=Ax,\qquad x\in G \tag{2.4}$$
(мы отождествляем правоинвариантное векторное поле с его значением в единице группы).

Экспоненциальное отображение из L в G задается матричной экспонентой
$$A\mapsto\exp(A)=\mathrm{Id}+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots,\qquad A\in L.$$
Траектория $A\in L$ через точку $x\in G$ определяется с помощью матричной экспоненты и произведения
$$\exp(tA)x,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$
Умножение справа на элемент $g\in G$
$$x\mapsto xg,\qquad x\in G$$
отображает траекторию (2.5) в траекторию, поэтому векторные поля вида (2.4) называются правоинвариантными.

Правоинвариантная управляемая система на линейной группе G есть произвольное множество матриц $\Gamma\subset L$.

Аффинная по управлению правоинвариантная управляемая система на G имеет вид (2.2) для некоторых матриц $A,B_1,\dots,B_m\in L$. В классической нотации такая система записывается как матричная управляемая система
$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{m}u_iB_ix,\qquad u=(u_1,\dots,u_m)\in U\subset\mathbb{R}^m,\quad x\in G. \tag{2.6}$$

Мы рассмотрим ниже несколько примеров линейных групп G и их алгебр Ли L. В каждом из этих случаев G может рассматриваться как пространство состояний правоинвариантной системы $\Gamma\subset L$; для аффинной по управлению системы (см. (2.2) или (2.6)) матрицы A, B_1, …, B_m могут выбираться произвольно в алгебре Ли L.

Пример 2.1. Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ имеет алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. Ее размерность равна n^2. Заметим, что $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ несвязна: она имеет две связные компоненты.

Пример 2.2. Компонента связности единицы в $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ есть группа всех вещественных $n\times n$–матриц с положительным определителем
$$\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{M}(n;\mathbb{R})\mid\det X>0\}.$$
Алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})$ является $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$.

Пример 2.3. *Специальная линейная группа* есть группа всех вещественных $n \times n$–матриц с единичным определителем

$$\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}.$$

Это — связная группа Ли размерности (n^2-1), а ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех $n \times n$–матриц с нулевым следом

$$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Пример 2.4. *Специальная ортогональная группа* образована всеми вещественными ортогональными $n \times n$–матрицами с единичным определителем:

$$\mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}} = X^{-1},\ \det X = 1\}.$$

Это — связная группа Ли размерности $n(n-1)/2$, а ее алгебра Ли $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех вещественных кососимметрических $n \times n$–матриц:

$$\mathfrak{so}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}} = -A\}.$$

2.4. **Нормальная достижимость.** Если точка y из G достижима из другой точки x из G, то существуют элементы $A_1, \dots, A_k$ в Γ и $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ с положительными координатами такие, что

$$y = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) x.$$

Следующее более сильное свойство оказывается существенным при изучении топологических свойств множества достижимости и управляемости.

Определение 2.1. Точка y группы G называется *нормально достижимой* из точки x группы G вдоль системы Γ, если существуют элементы $A_1, \dots, A_k$ в Γ и $\hat{t} \in \mathbb{R}^k$ с положительными координатами $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k$ такие, что отображение $F(t_1, \dots, t_k) = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) x$ из $\mathbb{R}^k$ в G имеет следующие свойства:

(i) $F(\hat{t}) = y$.

(ii) Ранг дифференциала dF в точке $\hat{t}$ равен размерности G.

В этом случае точка y называется нормально достижимой из x вдоль полей $A_1, \dots, A_k$.

Теорема 2.1. *Если* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$*, то в любой окрестности* O *единицы* $e \in G$ *существуют точки, нормально достижимые из* e *вдоль* Γ*. Следовательно, множество* $\operatorname{int} \mathbb{A} \cap O$ *непусто.*

Доказательство. Обозначим $n = \dim L = \dim \mathrm{Lie}(\Gamma)$. Если $n = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что $n > 0$ и зафиксируем окрестность O единицы e.

Существует ненулевой элемент $A_1 \in \Gamma$. Кривая

$$M_1 = \{\exp(t_1 A_1) \mid 0 < t_1 < \varepsilon_1\}$$

является гладким одномерным многообразием, содержащимся в окрестности O при достаточно малых положительных ε_1. Если $n = 1$, то любая точка в M_1 нормально достижима из e вдоль A_1, т.к. отображение $F_1(t_1) = \exp(t_1 A_1)$ имеет ранг 1 в интервале $I_1 = (0, \varepsilon_1)$.

Если $n > 1$, то существует элемент $A_2 \in \Gamma$ такой, что правоинвариантное поле A_2 не касается M_1 ни в какой точке M_1: если бы касание имело место для всех $A_2 \in \Gamma$, то $\dim \mathrm{Lie}(\Gamma) = 1$, противоречие. Поэтому множество

$$M_2 = \{\exp(t_2 A_2) \exp(t_1 A_1) \mid 0 < t_i < \varepsilon_i,\ i = 1, 2\}$$

является гладким двумерным многообразием, лежащим в O при достаточно малых положительных ε_1, ε_2. Более того, отображение

$$F_2(t_1, t_2) = \exp(t_2 A_2) \exp(t_1 A_1)$$

имеет ранг 2 в области $I_2 = (0, \varepsilon_1) \times (0, \varepsilon_2)$. Если $n = 2$, то теорема доказана, т.к. любая точка M_2 нормально достижима из e вдоль A_1, A_2.

Если $n > 2$, то доказываем по индукции. Для любой размерности $k < n$ и некоторых элементов $A_1, \dots, A_k \in \Gamma$ построим k-мерное гладкое многообразие

$$M_k = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) \mid 0 < t_i < \varepsilon_i, \ i = 1, \dots, k\},$$

содержащееся в окрестности O при достаточно малых положительных $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, так что отображение $F_k(t_1, \dots, t_k) = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)$ имеет ранг k в области $I_k = (0, \varepsilon_1) \times \dots \times (0, \varepsilon_k)$. Тогда любая точка в M_n нормально достижима из e вдоль $A_1, \dots, A_n$.

Образ параллелепипеда I_n при отображении F_n является открытым множеством, содержащимся в $\mathbb{A}$ и O, поэтому $\operatorname{int} \mathbb{A} \cap O \supset F_n(I_n)$. □

Если алгебра Ли, порожденная Γ, не совпадает со всей алгеброй Ли L, то Γ может рассматриваться как правоинвариантная система на орбите $\mathcal{O}$. Согласно (iv) леммы 2.1, алгебра Ли $\operatorname{Lie}(\Gamma)$ совпадает с алгеброй Ли группы Ли $\mathcal{O}$, поэтому из предыдущей теоремы вытекают следующие отношения между множеством достижимости $\mathbb{A}$ и орбитой $\mathcal{O}$.

Лемма 2.3. (i) *Множество достижимости $\mathbb{A}$ содержится в орбите $\mathcal{O}$.*
(ii) *Для любой окрестности O единицы e в топологии орбиты $\mathcal{O}$ пересечение $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathbb{A} \cap O$ непусто.*
(iii) *Более того, $\operatorname{cl} \operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathbb{A} \supset \mathbb{A}$.*

(Мы обозначаем через $\operatorname{int}_{\mathcal{O}}$ внутренность подмножества орбиты $\mathcal{O}$ в топологии $\mathcal{O}$.)

Доказательство. (i) очевиден. (ii) следует из теоремы 2.1: так как $\operatorname{Lie}(\Gamma)$ является алгеброй Ли группы $\mathcal{O}$, то в этой теореме необходимо заменить G на $\mathcal{O}$. Для доказательства включения (iii) возьмем любую точку x в $\mathbb{A}$ и выберем любую окрестность U точки x в $\mathcal{O}$. Необходимо показать, что пересечение $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathbb{A} \cap U$ непусто. Существует окрестность O точки e в $\mathcal{O}$ такая, что $Ox \subset U$. Согласно (ii), существует точка y в $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathbb{A} \cap O$. Тогда $yx \in \operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathbb{A} \cap U$. □

2.5. Простые условия управляемости.

Теорема 2.2. *Необходимым условием для управляемости правоинвариантной системы Γ на G является связность группы Ли G.*

Доказательство. Множество достижимости $\mathbb{A}$ линейно связно, см. лемму 2.2. □

Замечание. Ввиду предыдущей теоремы, в дальнейшем все группы Ли предполагаются связными, если явно не оговорено противное.

Важнейшее необходимое условие управляемости, приведенное в следующем предложении, обычно называется *ранговым условием*.

Теорема 2.3. *Если правоинвариантная система Γ на G управляема, то Γ порождает L как алгебру Ли: $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. Если $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$, то множество достижимости $\mathbb{A}$ имеет непустую внутренность в группе G.*

Доказательство. Если $\mathbb{A} = G$, то тем более $\mathcal{O} = G$. Согласно лемме 2.1, имеем $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то из теоремы 2.1 следует $\mathrm{int}\,\mathbb{A} \neq \emptyset$. □

Вообще говоря, ранговое условие недостаточно для управляемости, но эквивалентно достижимости.

Теорема 2.4. *Правоинвариантная система Γ на G достижима в единице (и тогда в любой точке из G) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.*

Доказательство. Необходимость. Если множество достижимости $\mathbb{A}$ имеет непустую внутренность в G, то это верно и для орбиты $\mathcal{O}$. Согласно лемме 2.1, получаем $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Достаточность. Если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то $\mathrm{int}\,\mathbb{A}$ непуста по теореме 2.1. □

Если для системы $\Gamma \subset L$ выполнено ранговое условие $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то говорят, что Γ — система *полного ранга*.

Теорема 2.5. *Правоинвариантная система Γ на связной группе Ли G управляема тогда и только тогда, когда:*

(i) *множество достижимости $\mathbb{A}$ является подгруппой в G и*
(ii) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Необходимость. (i) очевиден, а (ii) следует из рангового условия.

Достаточность. Если $\mathbb{A}$ является подгруппой, то для любой экспоненты $\exp(tA)$, $A \in \Gamma$, $t \geq 0$, ее обратный элемент $\exp(-tA)$ также содержится в $\mathbb{A}$. Поэтому множество достижимости A совпадает с орбитой $\mathcal{O}$. Но так как Γ имеет полный ранг, то ее орбита совпадает со всей группой G (см. лемму 2.1, (iv)). Следовательно, $\mathbb{A} = G$. □

Теорема 2.6. *Правоинвариантная система Γ управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда она управляема из единицы, т.е. $\mathbb{A} = G$.*

Доказательство. См. лемму 2.2, (ii). □

Если Γ — система полного ранга, то ее множество достижимости $\mathbb{A}$ имеет непустую внутренность в G. Но, вообще говоря, единичный элемент e может лежать на границе $\mathbb{A}$.

Теорема 2.7. *Правоинвариантная система Γ управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда единица e принадлежит внутренности множества $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, а достаточность следует из того, что в связной группе Ли G любая окрестность единицы e порождает G как полугруппу. □

Нижеследующее условие управляемости имеет фундаментальное значение, т.к. оно показывает, что при изучении управляемости систем полного ранга можно заменять множество достижимости $\mathbb{A}$ его замыканием $\mathrm{cl}\,\mathbb{A}$.

Теорема 2.8. *Если множество достижимости $\mathbb{A}$ плотно в связной группе Ли G и $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то Γ управляема на G.*

Доказательство. Рассмотрим систему в обратном времени

$$-\Gamma = \{-A \mid A \in \Gamma\},$$

ее траекториями являются траектории Γ, проходимые в обратном направлении. Множество достижимости системы $-\Gamma$ имеет вид

$$\mathbb{A}_{-\Gamma} = \{\exp(-t_k A_k) \cdots \exp(-t_1 A_1) \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \geq 0,\ k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{A}^{-1}. \qquad (2.7)$$

Так как система $-\Gamma$ имеет полный ранг: $\mathrm{Lie}(-\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то ее множество достижимости имеет непустую внутренность и потому содержит открытое множество O_1.

С другой стороны, так как Γ имеет полный ранг, то существует точка x в G, имеющая окрестность $O(x)$, содержащуюся в $\mathbb{A}$.

Замыкание множества достижимости из x всюду плотно: $\mathrm{cl}\,\mathbb{A}(x) = \mathrm{cl}(\mathbb{A}\cdot x) = G$, поэтому существует точка $y \in \mathbb{A}(x) \cap O_1$. Имеем $y \in \mathbb{A} \cdot x$, поэтому $yx^{-1} \in \mathbb{A}$. Принимая во внимание включение $O(x) \subset \mathbb{A}$ и полугрупповое свойство множества достижимости $\mathbb{A}$, получаем, что окрестность $O(y) = yx^{-1} \cdot O(x)$ точки y содержится в $\mathbb{A}$. Но $y \in O_1 \subset \mathbb{A}^{-1}$, поэтому $y^{-1} \in \mathbb{A}$, и окрестность единицы $O(e) = y^{-1} \cdot O(y)$ содержится в $\mathbb{A}$. Согласно теореме 2.7, $\mathbb{A} = G$. □

Теорема 2.9. *Правоинвариантная система Γ управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда единица e нормально достижима из e вдоль некоторых элементов $A_1, \dots, A_k$ в Γ.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 2.1 существует точка $x \in G$, нормально достижимая вдоль некоторых полей $A_1, \dots, A_k \in \Gamma$ из e. Так как Γ управляема, то система в обратном времени $-\Gamma$ также управляема, поэтому

$$e = \exp(t_l A_l) \cdots \exp(t_{k+1} A_{k+1}) x$$

для некоторых $A_{k+1}, \dots, A_l \in \Gamma$ и некоторых $t_{k+1}, \dots, t_l > 0$. Тогда e нормально достижима из e вдоль полей $A_1, \dots, A_l$.

Достаточность следует из теоремы 2.7, т.к. нормально достижимая точка принадлежит внутренности множества достижимости. □

Из предыдущего результата легко следует, что управляемость правоинвариантных систем сохраняется при малых возмущениях. Точнее, пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторое расстояние в алгебре Ли L и $d(\cdot,\cdot)$ — соответствующее хаусдорфово расстояние между подмножествами L:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max\left\{\sup_{A_1 \in \Gamma_1} \inf_{A_2 \in \Gamma_2} \rho(A_1, A_2),\ \sup_{A_2 \in \Gamma_2} \inf_{A_1 \in \Gamma_1} \rho(A_1, A_2)\right\}.$$

Теорема 2.10. *Если правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что любая система $\Gamma' \subset L$ управляема при условии $d(\Gamma, \Gamma') < \varepsilon$.*

Доказательство. Если Γ управляема, то единица e нормально достижима из e вдоль некоторых $A_1, \dots, A_k \in \Gamma$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ любая система Γ', для которой $d(\Gamma, \Gamma') < \varepsilon$, содержит элементы $A_1', \dots, A_k'$ такие, что $\rho(A_i, A_i') < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$. Тогда e нормально достижима из e вдоль $A_1', \dots, A_k'$. □

2.6. **Примечания.** Управляемые системы, пространством состояния которых являются группы Ли, изучаются в математической теории управления с начала 70-ых годов.

Р. В. Брокетт [48] рассматривал прикладные задачи, приводящие к управляемым системам на матричных группах и их однородных пространствах; например, в модели преобразователя постоянного тока и задаче управления вращением твердого тела возникают задачи управления на группе вращений трехмерного пространства $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$ и на $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ соответственно. Такие задачи естественно приводят к матричным управляемым системам вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i x(t), \quad u_i(t) \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

где $x(t)$ и A, $B_1, \dots, B_m$ — $n \times n$–матрицы.

Последовательное математическое изучение управляемых систем на группах Ли было начато В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [99]. Они отметили, что переход от матричной системы (2.8) к более общей правоинвариантной системе

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i(x(t)), \quad x(t) \in G, \quad u(t) \in \mathbb{R},$$

где A, $B_1, \dots, B_m$ — правоинвариантные векторные поля на группе Ли G, "никоим существенным образом не влияет на природу задачи". Простейшие свойства множеств достижимости и орбит правоинвариантных систем были установлены в работе [99].

Понятие нормальной достижимости было введено и исследовано (для произвольных нелинейных систем) Х. Дж. Суссманном [151].

3. Управляемые системы, подчиненные действию групп

3.1. Транзитивные действия, однородные пространства и управляемость.

Определение 3.1. Группа Ли G действует на аналитическом многообразии M, если существует аналитическое отображение $\theta : G \times M \to M$, удовлетворяющее свойствам:

(1) $\theta(g_2 g_1, x) = \theta(g_2, \theta(g_1, x))$ для всех g_1, g_2 из G и всех x из M, и
(2) $\theta(e, x) = x$ для всех x из M.

Для любого $g \in G$ рассмотрим аналитический диффеоморфизм $\theta_g : M \to M$, который определяется как $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ (диффеоморфизм, обратный к θ_g, равен $\theta_{g^{-1}}$). Отображение $g \mapsto \theta_g$ называется *действием* группы G на M. Действие является гомоморфизмом из группы G в группу аналитических диффеоморфизмов многообразия M. Для любого элемента $A \in L$, $\theta_{\exp tA}$ есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M с генератором $\theta_*(A)$ — аналитическим векторным полем на M:

$$\theta_*(A)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_{\exp tA}(x), \quad x \in M, \ A \in L.$$

Такие векторные поля $\theta_*(A)$, $A \in L$, называются *подчиненными действию θ группы G*. Они образуют конечномерную алгебру Ли

$$\theta_*(L) = \{\theta_*(A) \mid A \in L\}$$

полных векторных полей на M.

Определение 3.2. Система векторных полей $\mathcal{F}$ на M называется *подчиненной действию* θ, если $\mathcal{F}$ содержится в $\theta_*(L)$. Если $\mathcal{F} = \theta_*(\Gamma)$ для некоторой правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$, то $\mathcal{F}$ называется *индуцированной* системой Γ.

Группа Ли G действует *транзитивно* на M, если для любого $x \in M$ орбита $\{\theta_g(x) \mid g \in G\}$ совпадает со всем многообразием M. Многообразие, допускающее транзитивное действие группы Ли, называется *однородным пространством* этой группы Ли. Однородные пространства — это в точности фактормногообразия групп Ли. Если θ — транзитивное действие G на M, то рассмотрим группу изотропии H в некоторой фиксированной точке $x \in M$:

$$H = \{g \in G \mid \theta_g(x) = x\}.$$

H является замкнутой подгруппой в G, и многообразие M диффеоморфно пространству левых смежных классов G/H, причем диффеоморфизм $G/H \to M$ задается как $gH \mapsto \theta_g(x)$.

Если дана правоинвариантная система Γ на группе Ли G, действующей транзитивно на многообразии M, то можно построить систему на M, индуцированную системой Γ. Следующее утверждение дает условие управляемости, связанное с этой конструкцией.

Теорема 3.1. *Пусть θ — действие связной группы Ли на многообразии M, $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система на G и $\mathcal{F} = \theta_*(\Gamma)$ — индуцированная система на M.*

(i) *Для любой точки x из M множество достижимости системы $\mathcal{F}$ из точки x имеет вид*

$$\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = \theta_{\mathbb{A}_\Gamma}(x) = \{\theta_g(x) \mid g \in \mathbb{A}_\Gamma\}.$$

(ii) *Пусть действие θ транзитивно. Если Γ управляема на G, то $\mathcal{F}$ управляема на M.*

(iii) *$\mathcal{F}$ управляема на M тогда и только тогда, когда полугруппа $\mathbb{A}_\Gamma$ действует транзитивно на M.*

Доказательство. (i) Для любой траектории $g(t)$ системы Γ и любой точки x многообразия M кривая $\theta_{g(t)}(x)$ является траекторией системы $\mathcal{F}$; более того, любая траектория $\mathcal{F}$ получается таким образом.

(ii) Если $\mathbb{A}_\Gamma = G$, то $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = M$, т.к. орбита действия θ совпадает с M.

(iii) Достаточность доказывается как в (ii). А необходимость получается из описания множества достижимости $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$ в (i). $\square$

Важные приложения теоремы 3.1 относятся к случаю линейного действия линейных групп $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда индуцированные системы являются билинейными или, более общо, аффинными системами.

3.2. **Билинейные системы.**

3.2.1. *Индуцированные векторные поля и системы.* Для линейного действия группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\theta_g(x) = gx, \quad g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

индуцированные векторные поля линейны:

$$\theta_*(A)(x) = Ax, \quad A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем произвольным образом элементы $A, B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ и множество управления $U \subset \mathbb{R}^m$ и рассмотрим аффинную по управлению правоинвариантную систему на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$:

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}.$$

Тогда индуцированная система является набором линейных векторных полей на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F} = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}.$$

Переходя от полисистем к управляемым системам в классической нотации, получаем билинейную систему:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3.2.2. *Билинейные системы на* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Предположим, что действие связной линейной группы $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ транзитивно на линейном пространстве с выколотым началом координат $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Типичные примеры — это группы $\mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Пусть L — алгебра Ли группы G. В предыдущих примерах алгебры Ли равны соответственно $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ и $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$.

Для этого случая из теоремы 3.1 вытекает следствие.

Следствие 3.1. *Если правоинвариантная система*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

управляема на линейной группе G, которая действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то билинейная система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3.2.3. *Билинейные системы на* S^{n-1}. Теперь рассмотрим случай, когда связная линейная группа транзитивно действует на единичной сфере

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

например, группу $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ вращений n-мерного пространства. Пусть L — алгебра Ли группы G. В предыдущем примере алгебра Ли $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ состоит из кососимметрических $n \times n$–матриц.

Тогда теорема 3.1 дает следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Если правоинвариантная система*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

управляема на линейной группе G, которая действует транзитивно на S^{n-1}, то билинейная система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in S^{n-1}$$

управляема на сфере S^{n-1}.

3.3. **Аффинные системы.**

3.3.1. *Индуцированные векторные поля и системы.* Обозначим группу всех обратимых аффинных отображений n-мерного пространства через $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$. Она является полупрямым произведением группы трансляций n-мерного пространства и общей линейной группы:

$$\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}).$$

Эта группа может быть представлена как подгруппа группы $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Вкладывая $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ в качестве гиперплоскости

$$\mathbb{R}^n \times \{v_{n+1} = 1\} = \{(v_1, \dots, v_n, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n\},$$

получаем аффинное отображение в $\mathbb{R}^n$, определяемое элементом $\overline{X} \in \mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xv + x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть группа $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\theta_{\overline{X}}(v) = Xv + x, \quad \overline{X} \in \mathrm{Aff}(n;\mathbb{R}), \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{aff}(n;\mathbb{R})$ аффинной группы представляется матрицами

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n.$$

Однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$, соответствующая элементу $\overline{A} \in \mathfrak{aff}(n;\mathbb{R})$, имеет вид

$$\exp t \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tA} & \frac{e^{tA} - \mathrm{Id}}{A} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{e^{tA} - \mathrm{Id}}{A} = t\,\mathrm{Id} + \frac{t^2}{2!} A + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^{n-1} + \cdots .$$

Соответствующий поток в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\theta_{\exp(t\overline{A})}(v) = e^{tA} v + \frac{e^{tA} - \mathrm{Id}}{A} a,$$

поэтому индуцированное векторное поле является аффинным векторным полем на $\mathbb{R}^n$:

$$\theta_*(\overline{A})(v) = Av + a, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть теперь G — связная линейная подгруппа в $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$, действующая транзитивно на $\mathbb{R}^n$, например, группа обратимых аффинных преобразований n-мерного пространства, сохраняющих ориентацию

$$\mathrm{Aff}_+(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{GL}_+(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

или группа евклидовых движений n-мерного пространства

$$\mathrm{E}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Пусть L — алгебра Ли группы G; в предыдущих примерах имеем соответственно алгебры Ли

$$\mathfrak{aff}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n \right\},$$

и

$$\mathfrak{e}(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathfrak{so}(n;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(n;\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Аффинная по управлению правоинвариантная система на группе Ли G

$$\Gamma = \left\{ \overline{A} + \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{B}_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L, \tag{3.1}$$

где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B}_i = \begin{pmatrix} B_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ i = 1, \dots, m,$$

индуцирует следующую *аффинную* управляемую систему:

$$\dot{x} = Ax + a + \sum_{i=1}^{m} u_i (B_i x + b_i), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Отметим следующие частные случаи аффинных систем: билинейные системы, рассмотренные в пп. 3.2.2 и 3.2.3 ($a = b_1 = \dots = b_m = 0$), и классические *линейные* системы

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

которые получаются при $a = 0$, $B_1 = \dots = B_m = 0$.

Из теоремы 3.1 вытекает следующее предложение.

Следствие 3.3. *Пусть G — связная линейная подгруппа в $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$, которая действует транзитивно на $\mathbb{R}^n$. Если правоинвариантная система* (3.1) *управляема на G, то индуцированная аффинная система* (3.2) *управляема на $\mathbb{R}^n$.*

3.4. **Примечания.** Исследование управляемых систем на однородных пространствах, подчиненных действию групп (в частности, билинейных и аффинных системы) было одной из важнейших задач, вызвавших изучение правоинвариантных систем. Результаты этого раздела принадлежат в основном Р. В. Брокетту [48]. Терминология и весь подход в целом были предложены В. Джарджевичем и И. Купкой [96].

В. Бутби и Е. Н. Вильсон [41, 43] нашли полный список линейных групп, действующих транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Более того, ими предложен алгоритм, использующий лишь рациональные операции с матрицами, для проверки того, что группа Ли, порожденная данными матрицами, принадлежит этому списку.

Все группы Ли, транзитивно действующие на сферах, также перечислены, см. работы Х. Самельсона [144], стр. 26, А. Бореля [44, 45], Д. Монтгомери и Х. Самельсона [129].

4. Лиевское насыщение

Эффективным способом для получения (достаточных) условий управляемости является техника расширения, основанная на вычислении касательного конуса ко множеству достижимости системы в единице.

Определение 4.1. Правоинвариантные системы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset L$ называются *эквивалентными* друг другу, если $\mathrm{cl}(\mathbb{A}_{\Gamma_1}) = \mathrm{cl}(\mathbb{A}_{\Gamma_2})$.

Определение 4.2. Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система. Лиевское насыщение системы Γ, обозначаемое $\mathrm{LS}(\Gamma)$, есть наибольшее подмножество алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$, эквивалентное Γ.

Если системы Γ_1 и Γ_2 эквивалентны системе Γ, то их объединение, очевидно, также эквивалентно Γ. Поэтому лиевское насыщение системы Γ всегда существует: это объединение всех систем в $\mathrm{Lie}(\Gamma)$, эквивалентных Γ. Наибольшая правоинвариантная система, эквивалентная Γ, имеет вид $\{A \in L \mid \exp(tA) \in \mathrm{cl}(\mathbb{A}_\Gamma)\ \forall t \geq 0\}$, поэтому лиевское насыщение можно описать следующим образом.

Теорема 4.1. *Для любой системы* $\Gamma \subset L$

$$\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) \cap \{A \in L \mid \exp(tA) \in \mathrm{cl}(\mathbb{A}_\Gamma)\ \forall t \geq 0\}.$$

Обозначим через $\mathrm{E}(\Gamma)$ множество $\{A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \mid -A \in \mathrm{LS}(\Gamma)\}$. Это — наибольшее линейное подпространство L, содержащееся в $\mathrm{LS}(\Gamma)$.

Основные свойства лиевского насыщения собраны в следующем утверждении.

Теорема 4.2. (0) $\mathrm{LS} \circ \mathrm{LS} = \mathrm{LS}$,

(1) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ — *замкнутый выпуклый положительный конус в* L, *т.е.*

(1a) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ *топологически замкнуто:*

$$\mathrm{cl}(\mathrm{LS}(\Gamma)) = \mathrm{LS}(\Gamma),$$

(1b) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ *выпукло:*

$$A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow\ \alpha A + (1-\alpha)B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \in [0,1],$$

(1c) $\mathrm{LS}(\Gamma)$ — *положительный конус:*

$$A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow\ \alpha A \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \geq 0.$$

Поэтому

$$A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow \ \alpha A + \beta B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha, \beta \geq 0.$$

(2) *Для всех* $A \in \mathrm{E}(\Gamma)$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t \,\mathrm{ad}\, A}\, \mathrm{LS}(\Gamma) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).$$

То есть,

$$\pm A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow \ e^{t \,\mathrm{ad}\, A} B = B + (t \,\mathrm{ad}\, A) B + \frac{(t \,\mathrm{ad}\, A)^2}{2!} B + \ldots \in \mathrm{LS}(\Gamma) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

(3) $\mathrm{E}(\Gamma)$ — *подалгебра* L. *В частности,*

$$\pm A, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow \ \pm[A, B] \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

(4) *Если* $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ *и однопараметрическая подгруппа* $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *периодична, то* $\mathbb{R}A \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Доказательство. (0) очевидно в силу определения лиевского насыщения и теоремы 4.1.

(1) следует из известных свойств множеств достижимости: $\mathbb{A}_{\mathrm{cl}(\Gamma)} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{A}_\Gamma)$, $\mathbb{A}_{\mathrm{co}(\Gamma)} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{A}_\Gamma)$, и $\mathbb{A}_{\mathbb{R}_+\Gamma} = \mathbb{A}_\Gamma$.

Для доказательства свойства (2) предположим, что $\pm A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Тогда

$$\exp(s e^{t \,\mathrm{ad}\, A} B) = \exp(s \,\mathrm{Ad}_{\exp(tA)}\, B) = \exp(tA) \exp(sB) \exp(-tA) \in \mathrm{cl}(\mathbb{A}_\Gamma)$$

для всех $s \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, поэтому $e^{t \,\mathrm{ad}\, A} B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Теперь свойство (3) легко доказывается: если $\pm A, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, то имеем $\pm e^{t \,\mathrm{ad}\, A} B, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, поэтому

$$\pm[A, B] = \pm \lim_{t \to 0} \frac{e^{t \,\mathrm{ad}\, A} B - B}{t} \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

(4) следует из цепочки

$$\{\exp(tA) \mid t \geq 0\} = \{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_\Gamma,$$

справедливой для всех элементов $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, имеющих периодическую однопараметрическую группу. □

Следующая теорема дает общий критерий управляемости в терминах лиевского насыщения.

Теорема 4.3. *Правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Необходимость следует из определения лиевского насыщения.

Достаточность. Предположим, что $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$. Связная группа Ли G порождается как полугруппа однопараметрическими полугруппами $\{\exp(tA) \mid A \in L,\ t \geq 0\}$, поэтому $\mathrm{cl}(\mathbb{A}) = G$. Если вдобавок выполняется ранговое условие $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то система Γ управляема в силу теоремы 2.8. □

Обычно трудно построить лиевское насыщение правоинвариантной системы явно. Поэтому теорема 4.3 применяется как достаточное условие управляемости при помощи следующей процедуры. Начиная с системы Γ, строится вполне упорядоченное расширяющееся семейство расширений $\{\Gamma_\alpha\}$ системы Γ, т.е.

$$\Gamma_0 = \Gamma, \qquad \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta \text{ при } \alpha < \beta.$$

Правила расширения основаны на теореме 4.2:

(1) По данной системе Γ_α строится $\Gamma_\beta = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\Gamma_\alpha))$.
(2) При $\pm A, B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup e^{\mathbb{R}\,\mathrm{ad}\,A} B$.
(3) При $\pm A, \pm B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}[A, B]$.
(4) Для $A \in \Gamma_\alpha$ с периодической однопараметрической группой строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}A$.

Теорема 4.2 гарантирует, что все расширения Γ_α принадлежат $\mathrm{LS}(\Gamma)$. Если на некотором шаге α получается равенство $\Gamma_\alpha = L$ то $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и система Γ управляема.

4.1. **Примечания.** Идея рассмотрения замыкания множеств достижимости в качестве инварианта правоинвариантных систем при рассмотрении вопросов управляемости восходит к В. Джарджевичу и Х. Дж. Суссманну [99]. Понятие лиевского расширения и техника расширения были развиты В. Джарджевичем и И. Купкой [96, 97].

Теория полугрупп Ли изучает общие подполугруппы групп Ли, не обязательно возникающие как множества достижимости управляемых систем. Для этого случая справедливо обобщение теоремы 4.2.

Подмножество W алгебры Ли L называется *клином*, если W — замкнутый положительный выпуклый конус в L. *Гранью* клина W, обозначаемой $H(W)$, называется наибольшее линейное подпространство L, содержащееся в W:

$$H(W) = W \cap -W.$$

Клин W называется *лиевским клином*, если

$$e^{\mathrm{ad}\,A} W \subset W \quad \text{для всех } A \in H(W).$$

Для замкнутой подполугруппы S группы Ли G, содержащей единицу e, ее касательный конус

$$L(S) = \{A \in L \mid \exp(tA) \in S \ \forall t \geq 0\}$$

является лиевским клином.

Основные результаты теории полугрупп Ли изложены в книгах К.Х. Хофманна и Дж. Д. Лоусона [82], Дж. Хильгерта и К.-Х. Ниба [75], Дж. Хильгерта, К.Х. Хофманна, и Дж. Д. Лоусона [74].

5. Однородные системы

5.1. **Критерий управляемости.** Система $\Gamma \subset L$ называется *однородной*, если вместе со всяким элементом X эта система содержит также противоположный по знаку элемент $-X$, т.е.

$$\Gamma = -\Gamma.$$

Теорема 5.1. *Пусть Γ — однородная правоинвариантная система на G. Тогда ее множество достижимости $\mathbb{A}$ является подгруппой группы G и совпадает с орбитой $\mathcal{O}$.*

Доказательство. См. леммы 2.1 и 2.2. □

Таким образом, проверка управляемости для однородной системы Γ сводится к проверке алгебраического условия совпадения связных групп Ли $\mathcal{O}$ и G.

Теорема 5.2. *Однородная правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1, группа Ли $\mathcal{O}$ имеет алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 5.1. □

5.2. **Аффинные по управлению системы.** Аффинная по управлению система

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}$$

однородна, если вектор сноса A равен нулю, а множество управления U симметрично относительно начала координат: $U = -U$. В этом случае теоремы 5.1, 5.2 приобретают следующий вид.

Теорема 5.3. *Пусть множество управления $U \subset \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию $U = -U$. Рассмотрим однородную аффинную по управлению систему*

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset L$$

на группе Ли G. Тогда:

(i) *Множество достижимости $\mathbb{A}$ совпадает с орбитой $\mathcal{O}$, т.е. связной подгруппой Ли группы G с алгеброй Ли*

(ii) *Если $U = \mathbb{R}^m$, то любая точка $\mathbb{A}$ достижима из единицы e за любое время:*

$$\mathbb{A}(e, T) = \mathbb{A} = \mathcal{O} \text{ для всех } T > 0.$$

(iii) *Если G связна и $U = \mathbb{R}^m$, то система Γ управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(B_1, \dots, B_m) = L$.*

Доказательство. (i) и (iii) следуют соответственно из теорем 5.1 и 5.2.

Чтобы доказать (ii), выберем любое $T > 0$. Пусть некоторая точка x в G достижима из e за некоторое время $T_1 > 0$:

$$x = \exp(t_k X_k) \cdots \exp(t_1 X_1), \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = T_1,$$

где $t_1, \dots, t_k > 0$ и $X_1, \dots, X_k \in \Gamma$. Так как множество управления $U = \mathbb{R}^m$ переходит в себя при гомотетиях относительно начала координат, то векторные поля $Y_i = \alpha X_i$, $i = 1, \dots, k$, принадлежат Γ для $\alpha = T_1/T > 0$. Поэтому x достижимо из e за время T:

$$x = \exp(s_k Y_k) \cdots \exp(s_1 Y_1), \quad \sum_{i=1}^{k} s_i = T,$$

где $s_i = t_i/\alpha$, $i = 1, \dots, k$. □

5.3. **Примечания.** Критерий управляемости для однородных матричных систем был получен Р. В. Брокеттом [48]. В этой же работе критерий был конкретизирован для групп матриц с положительным определителем $\mathrm{GL}_+(n; \mathbb{R})$, унимодулярных матриц $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$, симплектических матриц $\mathrm{Sp}(n; \mathbb{R})$ и ортогональных унимодулярных матриц $\mathrm{SO}(n; \mathbb{R})$.

Общие результаты по управляемости однородных правоинвариантных система получены В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [99].

6. Компактные группы Ли

В этом параграфе мы рассмотрим группы Ли, являющиеся *компактными* топологическими пространствами.

6.1. **Условия управляемости.**

Теорема 6.1. *Правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на компактной связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Для любого правоинвариантного векторного поля $A \in L$ на компактной группе Ли G положительные и отрицательные полутраектории удовлетворяют включению

$$\mathrm{cl}\{\exp(-tA) \mid t \geq 0\} \subset \mathrm{cl}\{\exp(tA) \mid t \geq 0\}.$$

Поэтому любая правоинвариантная система Γ на G эквивалентна однородной системе $\Gamma \cup -\Gamma$. Но для однородных систем управляемость эквивалентна ранговому условию, см. теорему 5.2. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть* G *— компактная связная группа Ли и пусть правоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на* G*. Тогда существует такое* $T > 0$*, что для любых* $g_0, g_1 \in G$ *существует управление, переводящее* g_0 *в* g_1 *за время не больше* T*.*

Доказательство. Внутренности множеств достижимости $\mathbb{A}(e, \leq t)$, $t \geq 0$ образуют открытое покрытие группы G. В силу компактности G, существует время $T_1 > 0$ такое, что

$$\mathrm{int}\, \mathbb{A}(e, \leq T_1) = G.$$

То есть единичный элемент e может быть переведен в любой другой элемент $g_1 \in G$ за время не больше T_1. Применяя аналогичное рассуждение к системе $-\Gamma$, получаем, что существует $T_2 > 0$ такое, что любой элемент $g_0 \in G$ может быть переведен в e за время не больше T_2. Тогда g_0 и g_1 могут быть соединены траекторией Γ за время не больше $T = T_1 + T_2$. $\square$

6.2. **Примеры.**

6.2.1. *Специальная ортогональная группа в размерности* 3. Рассмотрим группу $G = \mathrm{SO}(3; \mathbb{R})$ всех вещественных ортогональных 3×3–матриц с положительным определителем. Группа Ли G компактна и связна. Ее алгебра Ли $L = \mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$ состоит из всех вещественных кососимметрических 3×3–матриц.

Возьмем любые линейно независимые матрицы $A_1, A_2 \in \mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$ и рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = \{A_1, A_2\}$. Заметим, что матрицы A_1, A_2, $[A_1, A_2]$ порождают как линейное пространство всю алгебру Ли $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$. По теореме 6.1 система Γ управляема, то есть любое вращение в $\mathrm{SO}(3; \mathbb{R})$ может быть записано как произведение экспонент

$$\exp(t_k A_{i_k}) \cdots \exp(t_1 A_{i_1}), \quad t_j \geq 0, \ i_j \in \{1, 2\}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Более того, по теореме 6.2 существует $T > 0$, дающее универсальную оценку сверху $\sum_{j=1}^{k} t_j \leq T$ для разложения (6.1) любого вращения в $\mathrm{SO}(3; \mathbb{R})$.

Аффинная по управлению правоинвариантная система со скалярным управлением

$$\dot{X} = (A_1 + uA_2)X, \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \ X \in \mathrm{SO}(3; \mathbb{R}) \tag{6.2}$$

также управляема (для любого множества правления U, содержащего более одного элемента). Более того, существует $T > 0$ такое, что для любых двух матриц $P, Q \in \mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$ существует кусочно-постоянное управление, переводящее P в Q за время не больше T. Заметим, что, вообще говоря, может не существовать сколь угодно малых чисел T с указанным свойством, даже при неограниченном управлении, т.е. при $U = \mathbb{R}$. Возьмем, например, $A_1 = E_{12} - E_{21}$, $A_2 = E_{13} - E_{31}$. Запишем решение системы (6.2) с начальным условием $X(0) = \mathrm{Id}$ в виде $X = (x_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} &= x_{22} + ux_{32}, \\ \dot{x}_{32} &= -ux_{12}. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на x_{12}, а второе на x_{32} и складывая, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_{12}^2 + x_{32}^2) = x_{22}x_{12}.$$

Так как $x_{12}^2 + x_{32}^2$ обращается в нуль при $t = 0$, то имеем

$$(x_{12}^2 + x_{32}^2)(t) = 2\int_0^t x_{22}(\tau)x_{12}(\tau)\,d\tau.$$

Но $x_{22}(\tau)$ и $x_{12}(\tau)$ являются элементами ортогональной матрицы $X(\tau)$, поэтому они ограничены по модулю числом 1. Следовательно,

$$(x_{12}^2 + x_{32}^2)(t) \le 2t.$$

Отсюда следует, что матрица (a_{ij}), для которой $a_{12}^2 + a_{32}^2 = 1$, не достижима из единичной матрицы за время меньше $\frac{1}{2}$.

6.2.2. *Специальная ортогональная группа в размерности n.* Приведенные выше рассуждения обобщаются на случай группы $G = \mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ вращений n-мерного пространства. В этом случае алгебра Ли $L = \mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ группы G состоит из всех кососимметрических $n \times n$–матриц.

Возьмем матрицы $A_1 = \sum_{i=1}^{n-2}(E_{i,i+1} - E_{i+1,i})$ и $A_2 = E_{n-1,n} - E_{n,n-1}$. Легко видеть, что $\mathrm{Lie}(A_1, A_2) = \mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$. Поэтому, хотя группа $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ имеет размерность $\frac{1}{2}n(n-1)$, система с одним управлением

$$\dot{X} = (A_1 + uA_2)X, \quad X \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ u \in U \subset \mathbb{R},$$

управляема (если множество управления U содержит, по крайней мере, две различные точки).

Более того, как и раньше, существует верхняя граница времени, требующегося для достижения одной точки в $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ из другой.

Заметим, что множество пар (A_1, A_2) таких, что $\mathrm{Lie}(A_1, A_2) = L$, открыто и всюду плотно в $L \times L$ (это верно для любой полупростой алгебры Ли L, см. теорему 8.1 ниже). Поэтому матрицы A_1, A_2 можно заменить "почти любой" парой в $L \times L$.

6.2.3. *Реперы Серре-Френе.* Пусть $x(t)$ обозначает любую кривую в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, производные которой $d^k x(t)/dt^k$, $k = 1, \ldots, n$, порождают n-мерное линейное пространство в каждой точке кривой. Репер Серре-Френе вдоль кривой x описывается ортонормальной матрицей $R(t)$ в $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$, связывающей этот репер со стандартным ортонормированным репером $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в

$\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющей следующему дифференциальному уравнению в $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$:

$$\frac{dR}{dt} = R(t)\begin{pmatrix} 0 & -k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ k_1(t) & 0 & -k_2(t) & & \vdots \\ 0 & k_2(t) & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.3)$$

где $k_1(t), \ldots, k_{n-1}(t)$ называются *функциями кривизны*, связанными с кривой x. (Для кривых в $\mathbb{R}^3$, k_2 называется кручением x.) Заметим, что кривизны $k_1, \ldots, k_{n-2}$ положительны, в то время как последняя кривизна k_{n-1} может иметь любой знак. Кривая

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и матрица вращения $R(t)$ могут быть объединены в виде кривой

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x(t) & R(t) \end{pmatrix}$$

в группе $\mathrm{E}(n;\mathbb{R})$ движений n-мерного пространства, реализованной как замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$ всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & R \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ R \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}).$$

Так как первый вектор в репере Серре-Френе является касательным вектором dx/dt, то имеем $dx/dt = R(t)e_1$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. Вместе с системой (6.3) для матрицы ориентации $R(t)$ это дает следующую аффинную по управлению левоинвариантную управляемую систему в $\mathrm{E}(n;\mathbb{R})$:

$$\frac{dg}{dt} = g(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_1(t) & 0 & -k_2(t) & & \vdots \\ 0 & 0 & k_2(t) & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -k_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.4)$$

где $k_1, \ldots, k_{n-1}$ играют роль управлений.

Рассмотрим крайний случай, когда все кривизны, кроме одной, постоянны. Тогда уравнение (6.3) записывается в виде аффинной по управлению системы

$$\frac{dR}{dt} = R(t)(A + uB), \quad R \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ u \geq 0, \qquad (6.5)$$

где $u(t) = k_i(t)$ — непостоянная кривизна (мы предполагаем, что $1 \leq i \leq n-2$; в случае $i = n-1$ управление будет неограниченным: $u \in \mathbb{R}$), и

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \vdots \\ 0 & k_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & k_{i-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -k_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{i+1} & 0 & -k_{i+2} & & \vdots \\ 0 & k_{i+2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{i+1,i} - E_{i,i+1}. \tag{6.9}$$

Обозначая $R^{-1}(t)$ через $h(t)$, превращаем левоинвариантную систему (6.5) в правоинвариантную систему

$$\frac{dh}{dt} = -(A + uB)h(t), \qquad h \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ u \geq 0, \tag{6.10}$$

которую будем называть *системой Серре-Френе*. Из теоремы 6.1 следует, что система (6.10) управляема тогда и только тогда, когда множество $\Gamma = \{-A - uB \mid u \geq 0\}$ порождает $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ как алгебру Ли, т.е. $\mathrm{Lie}(A, B) = \mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$. Алгебра Ли $\mathrm{Lie}(A, B)$ описана в следующем предложении.

Теорема 6.3. *Предположим, что все постоянные кривизны k_j, $j \neq i$, в равенствах (6.7), (6.8) отличны от нуля. Алгебра Ли, порожденная матрицами A и B, определенными в (6.6)–(6.9), равна $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ всегда, кроме одного случая. Исключительный случай имеет место, когда $n = 2m$, $i = m$, и $k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_{m+1} = \cdots = k_{n-1}$. Алгебра Ли в исключительном случае равна алгебре Ли унитарной группы $\mathrm{U}(2m;\mathbb{R})$.*

6.3. **Однородные пространства.**

6.3.1. *Сфера.* $(n-1)$-мерная сфера

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

является однородным пространством группы $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ вращений n-мерного пространства.

Пусть A, $B_1, \dots, B_m$ — кососимметрические $n \times n$–матрицы. Аффинная по управлению правоинвариантная система

$$\dot{X} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i)X, \quad X \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}),\ u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \tag{6.11}$$

индуцирует билинейную систему

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i)x, \quad x \in S^{n-1},\ u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{6.12}$$

можно представлять себе единичный вектор $x \in S^{n-1}$ как первый столбец ортогональной матрицы $X \in \mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$. Из теорем 6.1, 6.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть матрицы $A, B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$. Тогда система* (6.12) *глобально управляема на сфере S^{n-1}. Более того, существует $T > 0$ такое, что любые точки $x_0, x_1 \in S^{n-1}$ могут быть соединены траекторией системы* (6.12)*, соответствующей кусочно-постоянному управлению, за время не больше T.*

Замечание. Система (6.12) глобально управляема на сфере S^{n-1} тогда и только тогда, когда множество достижимости $\mathbb{A}$ системы (6.11), всегда являющееся подгруппой $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$, действует транзитивно на S^{n-1}.

Каждая из групп $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ и $\mathrm{U}(2m;\mathbb{R})$, $2m = n$, действует линейно на $\mathbb{R}^n$ умножением слева, и эти действия транзитивны на сферах в $\mathbb{R}^n$. Поэтому из теорем 6.1, 6.3 получаем следствие.

Следствие 6.2. *Пусть матрицы A и B заданы равенствами* (6.6)–(6.9)*. Если все кривизны k_j, $j \neq i$, отличны от нуля, то билинейная система*

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad x \in S^{n-1},\ u \geq 0$$

управляема на сфере S^{n-1}.

6.3.2. *Многообразия Грассмана.* Многообразие Грассмана $G(k,n)$ состоит из всех k-мерных линейных подпространств $\mathbb{R}^n$. Можно ввести структуру многообразия на $G(k,n)$, вкладывая его в *ортогональную группу*

$$\mathrm{O}(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}} = X^{-1}\}.$$

Любое k-мерное подпространство $S \in G(k,n)$ можно отождествить с ортогональным отражением $P_S \in \mathrm{O}(n;\mathbb{R})$, которое задается как $P_S(x) = x$ при $x \in S$ и $P_S(x) = -x$ при x в ортогональном дополнении к S. Требование гомеоморфности отображения $S \mapsto P_S$ превращает $G(k,n)$ в топологическое пространство. Так как $\{P_S \mid S \in G(k,n)\}$ является замкнутым подмножеством компактной группы Ли $\mathrm{O}(n;\mathbb{R})$, то $G(k,n)$ компактно.

Группа $\mathrm{O}(n;\mathbb{R})$ действует на $G(k,n)$ естественным образом: для любого $S \in G(k,n)$ и любого $R \in \mathrm{O}(n;\mathbb{R})$ пространство $RS = \{Rx \mid x \in S\}$ является элементом $G(k,n)$. Это действие транзитивно. В терминах соответствия $S \mapsto P_S$ оно принимает вид $RS \mapsto RP_SR^{\mathrm{T}}$, где R^{T} есть транспонированная матрица R. Группа изотропии есть $H = \mathrm{O}(n-k;\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(k;\mathbb{R})$, поэтому $\dim G(k,n) = \dim \mathrm{O}(n;\mathbb{R}) - \dim H = k(n-k)$.

Для любой кососимметрической матрицы A и любого S в $G(k,n)$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp tA)P_S(\exp -tA) = AP_S - P_SA = [A, P_S],$$

то есть $X_A(S) = [A, P_S]$ является инфинитезимальным генератором однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной A.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех векторных полей X_A на $G(k,n)$, где A принадлежит $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$. $\mathcal{P}$ является семейством векторных полей на $G(k,n)$, подчиненных действию группы $\mathrm{O}(n;\mathbb{R})$ на $G(k,n)$. Теоремы 3.1, 6.1 дают описание множества достижимости $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}$ любого подмножества $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$.

Теорема 6.4.

(a) *Множество достижимости $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$ семейства $\mathcal{F}$ из любой точки $x \in G(k,n)$ равно орбите $\mathcal{F}$ через точку x.*

(b) *Пусть Γ — множество всех матриц A таких, что X_A принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = Gx = \{gxg^{\mathrm{T}} \mid g \in G\}$, где G равно $\mathbb{A}_{\Gamma}$, т.е. подгруппе группы $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$, порожденной $\{\exp tA \mid A \in \Gamma, t \in \mathbb{R}\}$.*

(c) *$\mathcal{F}$ управляемо на $G(k,n)$ тогда и только тогда, когда G действует транзитивно на $G(k,n)$.*

6.4. **Примечания.** Результаты по управляемости в 6.1 и их приложения к случаю группы вращений в 6.2.1, 6.2.2 получены В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [99].

Реперы Серре-Френе (см. 6.2.3) изучались В. Джарджевичем [95]. Доказательство теоремы 6.3 об алгебрах Ли, возникающих в задаче управления на $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ с одной фиксированной кривизной, имеется в работе [90].

Приложения к многообразиям Грассмана (см. 6.3.2) также получены В. Джарджевичем [95].

Как следует из 6.2.1, теоремы 6.1 и 6.2 можно рассматривать как результаты о порождении компактных групп Ли. Результаты такого рода о порождении как компактных, так и некомпактных классических групп Ли имеются в 8.6, а также в работах П. Е. Крауча и Ф. Сильвы Лейте [55], Ф. Сильвы Лейте [111, 112, 113, 114], Х. Альбукерк и Ф. Сильвы Лейте [22].

7. Полупрямые произведения групп Ли

В этом параграфе рассматривается случай, когда группа Ли G является полупрямым произведением линейного пространства V и группы Ли K. Если K компактна, то имеется полное описание управляемости; в частности, если группа Ли K не имеет ненулевых неподвижных точек в пространстве K, то ранговое условие эквивалентно управляемости. Если K некомпактна, то условия управляемости получаются из рассмотрения компактных подгрупп группы K.

Пусть K и V — группы Ли, причем пусть K действует на V. Рассмотрим *полупрямое произведение* $G = V \ltimes K$. Многообразие G является декартовым произведением V и K, а умножение в группе G задается следующим образом:

$$(v_1, k_1)\cdot(v_2, k_2) = (v_1 + k_1v_2, k_1k_2), \quad v_1, v_2 \in V,\ k_1, k_2 \in K.$$

Алгебра Ли L группы G является *полупрямой суммой* $L(V) \leftthreetimes L(K)$, где $L(V)$ и $L(K)$ являются алгебрами Ли групп V и K соответственно. Линейное пространство L является прямой суммой линейных пространств $L(V)$ и $L(K)$, а произведение в алгебре Ли L определяется следующим образом:

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2] + b_1(a_2) - b_2(a_1), [b_1, b_2]), \ \ a_1, a_2 \in L(V), \ b_1, b_2 \in L(K).$$

Обозначим проекции из G на сомножители V и K соответственно через τ и π:

$$\begin{aligned} \tau &: G \to V, \quad \tau(v,k) = v, \qquad v \in V, \ k \in K, \\ \pi &: G \to K, \quad \pi(v,k) = k, \qquad v \in V, \ k \in K. \end{aligned}$$

Проекция π является гомоморфизмом групп Ли. Обозначим через $L(K)$ алгебру Ли группы Ли K. Дифференциал

$$\pi_* : L \to L(K)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли.

В данном параграфе предполагается, что V является векторной группой Ли, т.е. конечномерным линейным пространством, рассматриваемым как абелева группа Ли. Действие группы Ли K на линейном пространстве V предполагается линейным.

Определение 7.1. Точка $v \in V$ называется *неподвижной точкой* для действия группы K, если

$$Kv = \{gv \mid g \in K\} = \{v\}.$$

В этом случае будем писать $Kv = v$.

Начало координат $0 \in V$ является неподвижной точкой любого линейного действия на V.

7.1. K **компактна и не имеет ненулевых неподвижных точек в** V**.** Здесь мы докажем следующий результат, который можно рассматривать как обобщение критерия управляемости для компактных групп Ли (теорема 6.1).

Теорема 7.1. *Пусть компактная связная группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V, причем V не имеет ненулевых неподвижных точек относительно K. При этих условиях правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли $G = V \ltimes K$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$.

7.1.1. *Доказательство теоремы* 7.1 *в частных случаях.* Перед полным доказательством теоремы приведем более короткое доказательство в наиболее важных для приложений случаях $G = \mathrm{E}(n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n; \mathbb{R})$ и $G = \mathbb{R}^{2m} \ltimes \mathrm{U}(2m; \mathbb{R})$.

Доказательство. Ранговое условие $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$ необходимо для управляемости системы Γ по теореме 2.3.

Пусть $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. Тогда правоинвариантная система $\Gamma_K = \pi_*(\Gamma)$ управляема на K, т.к. эта группа Ли компактна и связна, см. теорему 6.1, то есть

$$\pi(\mathbb{A}) = K. \tag{7.1}$$

Согласно теореме 2.7, достаточно показать, что единичный элемент $e = (0, \mathrm{Id}) \in G$ принадлежит внутренности множества достижимости $\mathbb{A}$. Пусть (x, k) — точка из внутренности множества $\mathbb{A}$. В силу (7.1), существует точка $y \in V$ такая, что (y, k^{-1}) содержится в $\mathbb{A}$. Тогда $(x, k)(y, k^{-1}) = (x + ky, \mathrm{Id})$, и это произведение принадлежит внутренности множества $\mathbb{A}$.

Обозначим $x + ky$ через v. Пусть Ω — такая окрестность элемента Id в K, что $(v, \Omega) \subset \operatorname{int} \mathbb{A}$.

Для любых $h \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$ элемент $(v,h)^n = (v + hv + \cdots + h^{n-1}v, h^n)$ содержится во внутренности множества $\mathbb{A}$. Если $h^n = \mathrm{Id}$ и $v = hw - w$ для некоторого $w \in V$, то $v + hv + \cdots + h^{n-1}v = 0$, и $e = (0, \mathrm{Id})$ содержится во внутренности множества $\mathbb{A}$. Для завершения доказательства осталось показать, что в каждом из двух случаев ($K = \mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^n$ и $K = \mathrm{U}(2m;\mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^{2m}$) для любого $v \in V$ и любой окрестности Ω элемента Id в K существует такой элемент h в Ω, что $v \in \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id})$ и $h^m = \mathrm{Id}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Приведем эскиз доказательства в первом случае, во втором оно проводится аналогично. Пусть P — плоскость в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, содержащая данную точку $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любой окрестности Ω элемента Id в группе вращений плоскости P существует такое вращение $R \in \Omega$, что $R - \mathrm{Id}$ невырождено и $R^m = \mathrm{Id}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда R можно продолжить на $\mathbb{R}^n$, полагая его тождественным на ортогональном дополнении к плоскости P в $\mathbb{R}^n$. Поэтому $v \in \mathrm{Im}(R - \mathrm{Id})$ и $R^m = \mathrm{Id}$. □

7.1.2. *Доказательство теоремы* 7.1 *в общем случае.* Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений при условии $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Лемма 7.1. $\pi(\mathbb{A}) = K$.

Доказательство. Спроецированная система $\Gamma_K = \pi_*(\Gamma)$ является системой полного ранга на компактной связной группе Ли K, поэтому она управляема на K, см. теорему 6.1. □

В следующих трех леммах исследуется подмножество группы G:

$$T = \{(v, \mathrm{Id}) \mid (v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}\}. \tag{7.2}$$

Лемма 7.2. *Множество T непусто.*

Доказательство. По теореме 2.4, система Γ достижима, т.е. множество $\mathbb{A}$ имеет непустую внутренность. Возьмем любую точку $(w, g) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}$. Согласно лемме 7.1, существует такое $v \in V$, что $(v, g^{-1}) \in \mathbb{A}$. Тогда

$$(w, g) \cdot (v, g^{-1}) = (w + gv, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}.$$

Следовательно, множество T непусто. □

Лемма 7.3. *Для любого $(v, \mathrm{Id}) \in T$ существует такое целое число $N > 0$, что $(\lambda v, \mathrm{Id}) \in T$ для всех λ таких, что $\lambda > N$.*

Доказательство. Если $(v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $((1 + \lambda)v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}$ для всех λ таких, что $|\lambda| < \varepsilon$. Следовательно, $((1 + \lambda)v, \mathrm{Id})^n = (n(1 + \lambda)v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}$ для всех натуральных n. Пусть N — любое натуральное число такое, что $N(1 + \varepsilon) > 1$. Тогда замкнутый отрезок числовой прямой $[N, N + 1]$ имеет следующее свойство: $(\lambda v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\, \mathbb{A}$ для всех $\lambda \in [N, N + 1]$. Но $\mathbb{A}$ является полугруппой, поэтому и весь числовой луч $\{\lambda \mid \lambda > N\}$ обладает этим свойством. □

Лемма 7.4. *Для любого $(v, \mathrm{Id}) \in T$ и любого $g \in K$ существует такое натуральное число M, что $(Mgv, \mathrm{Id}) \in T$.*

Доказательство. Для всех $g \in K$, по лемме 7.1 существуют такие векторы $v_g, v_{g^{-1}} \in V$, что (v_g, g) и $(v_{g^{-1}}, g^{-1})$ принадлежат $\mathbb{A}$. Поэтому элемент $(v_{g^{-1}}, g^{-1}) \cdot (v_g, g) = (g^{-1}v_g + v_{g^{-1}}, \mathrm{Id})$ также принадлежит $\mathbb{A}$.

Пусть $(v, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int} \mathbb{A}$; возьмем любое натуральное M такое, что элемент

$$\left(v - M^{-1}\left(v_{g^{-1}} + g^{-1}v_g\right), \mathrm{Id}\right)$$

принадлежит $\operatorname{int} \mathbb{A}$. Тогда

$$\left(v - M^{-1}\left(v_{g^{-1}} + g^{-1}v_g\right), \mathrm{Id}\right)^M = \left(Mv - \left(v_{g^{-1}} + g^{-1}v_g\right), \mathrm{Id}\right) \in \operatorname{int} \mathbb{A}.$$

Следовательно, элемент

$$(v_g, g) \cdot \left(Mv - \left(v_{g^{-1}} + g^{-1}v_g\right), \mathrm{Id}\right) \cdot \left(v_{g^{-1}}, g^{-1}\right) = (Mgv, \mathrm{Id})$$

принадлежит $\operatorname{int} \mathbb{A}$. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы 7.1.

Доказательство. Условие полноты ранга $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ необходимо для управляемости по теореме 2.3. Для доказательства достаточности предположим, что $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

По лемме 7.2, существует вектор $v \in V$ такой, что $(v, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int} \mathbb{A}$. Пусть

$$\bar{v} = \int_K Kv \, d\mu,$$

где μ — мера Хаара на K, нормированная условием $\mu(K) = 1$. Тогда $K\bar{v} = \bar{v}$, и по условию теоремы $\bar{v} = 0$.

С другой стороны, среднее $\int_K Kv \, d\mu$ содержится в выпуклом конусе, порожденном множеством $\{gv \mid g \in K\}$, поэтому

$$0 = \bar{v} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j v \quad \text{для некоторых } g_1, \dots, g_p \in K, \quad \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0.$$

По лемме 7.4, существуют натуральные числа $M_1, \dots, M_p$, удовлетворяющие условию $(M_j \lambda_j g_j v, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int} \mathbb{A}$ для всех $j = 1, \dots, p$. Тогда для числа $M = \prod_{j=1}^{p} M_j$ имеем $(M\lambda_j g_j v, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int} \mathbb{A}$ при $j = 1, \dots, p$. Поэтому

$$e = (0, \mathrm{Id}) = (M\bar{v}, \mathrm{Id}) = \left(\sum_{j=1}^{p} M\lambda_j g_j v, \mathrm{Id}\right) = \prod_{j=1}^{p} (M\lambda_j g_j v, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int} \mathbb{A}.$$

По теореме 2.7, система Γ управляема на группе G. □

7.1.3. *Ранговое условие и неприводимые действия.* Один из случаев, к которым относится теорема 7.1, — это случай, когда группа K неприводимо действует на пространстве V. В следующей теореме исследуется этот случай; она дает критерий того, что $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ для данного подмножества Γ алгебры Ли L. С этой целью рассмотрим следующую конструкцию.

Так как группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V, то группа $G = V \ltimes K$ действует аффинно на V:

$$(v, k)x = kx + v, \qquad (v, k) \in G, \ x \in V.$$

Для любого $M = (v, A) \in L$ и любого $x \in V$ кривая $\{(\exp tM)x \mid t \in \mathbb{R}\}$ является однопараметрической группой в V, инфинитезимальным генератором которой является аффинное векторное поле $x \mapsto Ax + v$.

Определение 7.2. Для любого подмножества $\Gamma \subset L$ обозначим через $\mathcal{F}(\Gamma)$ множество аффинных векторных полей на V, индуцированных множеством Γ, т.е. $X \in \mathcal{F}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $X(x) = Ax + v$ для некоторого $(v, A) \in \Gamma$.

Обозначим через $\mathcal{F}_x(\Gamma)$ множество $\{X(x) \mid X \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$. Тогда имеем следующее утверждение.

Теорема 7.2. *Пусть K — связная компактная полупростая вещественная группа Ли, действующая линейно и неприводимо на линейном пространстве V. Пусть $G = V \ltimes K$ и $\Gamma \subset L$. Тогда ранговое условие $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ равносильно следующим условиям:*

(i) $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) = \mathrm{Lie}(\pi_*(\Gamma)) = L(K)$ *и*
(ii) $\mathcal{F}_x(\Gamma) \neq \{0\}$ *для всех* $x \in V$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{O}(\mathcal{F})(x)$ орбиту семейства $\mathcal{F}(\Gamma)$ через точку $x \in V$, т.е. орбиту действия группы, порожденной множеством $\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$. Пусть H обозначает орбиту $\mathcal{O}_\Gamma$, т.е. подгруппу группы G, порожденную множеством $\{\exp tA \mid t \in \mathbb{R}, A \in \Gamma\}$. Тогда $\mathcal{O}(\mathcal{F})(x) = Hx$.

Если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то $H = G$ в силу связности G. Поэтому орбита $\mathcal{F}(\Gamma)$ через любую точку $x \in V$ имеет вид Gx. Но $Gx \neq x$ для всех $x \in V$, поэтому для любой точки $x \in V$ существует элемент $X \in \mathcal{F}(\Gamma)$ такой, что $X(x) \neq 0$, то есть, условие (ii) выполняется. Но условие (i) также выполняется, поэтому необходимость доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что условия (i) и (ii) выполняются. Пусть π_Γ обозначает ограничение проекции π на $\mathrm{Lie}(\Gamma)$. Тогда $\pi_\Gamma : \mathrm{Lie}(\Gamma) \to L(K)$ есть гомоморфизм алгебр Ли. По условию (i) π_Γ сюръективно. В силу того, что $\ker \pi_\Gamma$ — идеал алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ и π_Γ сюръективно, получаем, что $\ker \pi_\Gamma$ является линейным подпространством пространства V, инвариантным относительно K. В силу условия неприводимости, либо $\ker \pi_\Gamma = V$, либо $\ker \pi_\Gamma = \{0\}$.

Если $\ker \pi_\Gamma = V$, то $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$. Для завершения доказательства покажем, что случай $\ker \pi_\Gamma = \{0\}$ невозможен. Если $\ker \pi_\Gamma = \{0\}$, то алгебра Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ изоморфна $L(K)$. Так как K полупроста и компактна, то интегральная группа H алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ компактна. Для любого $x \in V$ среднее $\bar{x} = \int_H hx\, d\mu$ является неподвижной точкой группы H (μ — нормализованная мера Хаара на H). Тогда $\mathcal{F}_{\bar{x}} = 0$, что противоречит условию (ii). Поэтому $\ker \pi_\Gamma \neq \{0\}$, и теорема полностью доказана. $\square$

7.2. K **компактна и имеет ненулевые неподвижные точки в** V**.** Если линейное действие компактной группы Ли K имеет ненулевые неподвижные точки в V, то ранговое условие больше не является достаточным для управляемости.

Пример 7.1. Пусть $K = \mathrm{SO}(1;\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ и $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Компактная связная группа Ли K естественно действует на линейном пространстве V:

$$(1, g)(x, y) = (x, gy), \quad (1, g) \in K, \ (x, y) \in V.$$

Для этого действия $Kv = v$ тогда и только тогда, когда $v = (x, 0)$.

Возьмем группу Ли $G = V \ltimes K$ и правоинвариантную систему на ней:

$$\Gamma = \{(v, A) \mid v = (x, y), \ x > 0, \ A \in L(K)\}.$$

Тогда:

(i) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ и

(ii) $\mathbb{A} = \{(v, g) \mid v = (x, y),\ x > 0,\ g \in K\}$.

Поэтому система Γ неуправляема, хотя и имеет полный ранг.

Теперь получим условия управляемости в случае, когда действие компактной связной группы K имеет ненулевые неподвижные точки в линейном пространстве V. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на V, инвариантное относительно K, а через d_V — соответствующую метрику на V. Пусть d_K — лево- и правоинвариантная метрика на K, обозначим тогда через d_G соответствующую метрику — прямое произведение на $G = V \ltimes K$:

$$d_G((v_1, g_1), (v_2, g_2)) = d_K(g_1, g_2) + d_V(v_1, v_2), \qquad (v_1, g_1), (v_2, g_2) \in G.$$

Если $(w, h) \in G$, то

$$\begin{aligned} d_G((w,h)(v_1, g_1), (w,h)(v_2, g_2)) &= d_G((w + hv_1, hg_1), (w + hv_2, hg_2)) \\ &= d_K(hg_1, hg_2) + d_V(hv_1, hv_2) = d_K(g_1, g_2) + d_V(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Поэтому метрика d_G левоинвариантна.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid Kv = v\}, \\ V_2 &= V_1^{\perp}. \end{aligned}$$

Из определения подпространства V_1 следует, что для любого $X \in L(K)$ и любого $v \in V_1$ имеем $Xv = 0$. Более того, если $X \in L(K)$ и $w \in V_2$, то

$$\langle v, Xw \rangle = -\langle Xv, w \rangle = 0 \qquad \text{для всех } v \in V_1.$$

Поэтому оба пространства V_1 и V_2 инвариантны относительно элементов $L(K)$. Обозначим через P ортогональную проекцию из V на V_1. Напомним, что τ — каноническая проекция из G на V, поэтому τ_* — проекция из L на V. Обозначим через Γ_V проекцию $\tau_*(\Gamma)$ правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$. Имеем следующее утверждение.

Теорема 7.3. *Пусть компактная связная группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли $G = V \ltimes K$ тогда и только тогда, когда:*

(i) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ *и*

(ii) *выпуклый конус, порожденный $P(\Gamma_V)$, совпадает с V_1.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Если $(a, A) \in \Gamma$, то $(a, A) = (a_1, 0) \oplus (a_2, A)$, где $a_1 = Pa$ и $a_2 = a - a_1$; знак $\oplus$ означает, что элементы $(a_1, 0)$ и (a_2, A) коммутируют. Поэтому

$$\exp t(a, A) = (a_1 t, \mathrm{Id})(a_2(t), \exp tA), \qquad \text{где } a_2(t) \in V_2 \text{ для всех } t,$$

так как $AV_2 \subset V_2$.

Теперь ясно, что если $Y = (b, B)$ — другой элемент Γ, то

$$\begin{aligned} &\exp t_2(b, B) \cdot \exp t_1(a_1, A) \\ &\qquad = (a_1 t_1 + b_1 t_2, \mathrm{Id})(b_2(t_2) + (\exp t_2 B) a_2(t), \exp t_2 B \cdot \exp t_1 A). \end{aligned}$$

Поэтому проекция $\mathbb{A}$ на V_1 совпадает с выпуклым конусом, порожденным $P(\Gamma_V)$. Если система Γ управляема, то этот конус должен равняться V_1.

Для доказательства достаточности предположим, что выполняются условия $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ и $\mathrm{co}(P(\Gamma_V)) = V_1$.

Пусть, как и ранее,

$$T_\Gamma = \{(v, \mathrm{Id}) \mid (v, \mathrm{Id}) \in \mathrm{int}\,\mathbb{A}\}.$$

По лемме 7.2 множество T_Γ непусто. Если $(z, \mathrm{Id}) \in T_\Gamma$, то положим $w = \int_K Kz\,d\mu$, где μ — нормализованная мера Хаара на K. Имеем $Kw = w$ в силу $w \in V_1$. Если $w = 0$, то, как и при доказательстве теоремы 7.1, получаем $(0, \mathrm{Id}) \in T_\Gamma$ и $\mathbb{A} = G$.

Если $w \neq 0$, то существует натуральное число N такое, что $(v, \mathrm{Id}) \in T_\Gamma$ для $v = Nw$. Действительно, w принадлежит выпуклому конусу, порожденному орбитой Kv. Поэтому $w = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j v$ для некоторых элементов $g_1 \ldots, g_p$ в K и положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. По лемме 7.4 существуют натуральные числа M_j такие, что $(M_j \lambda_j g_j v, \mathrm{Id}) \in T_\Gamma$. Теперь в качестве искомого натурального числа N можно взять произведение $\prod_{j=1}^p M_j$.

Теперь покажем, что существует $\lambda > 0$ такое, что как λv, так и $-\lambda v$ принадлежат $\mathrm{int}\,\mathbb{A}_{\mathrm{co}(\Gamma)}$. Так как $\mathrm{co}(P(\Gamma_V)) = V_1$, то существует элемент множества $\mathrm{co}(\Gamma)$ вида $X = (-v + u, A)$, где $u \in V_2$ и $A \in L(K)$,

$$\exp tX = \exp t(-v + u, A) = (-vt + u(t), \exp tA), \qquad \text{где } u(t) \in V_2 \text{ для всех } t.$$

Так как $(v, \mathrm{Id}) \in T_\Gamma \subset \mathrm{int}\,\mathbb{A}$, то существует шар $B((v, \mathrm{Id}), \varepsilon)$ радиуса ε с центром (v, Id), содержащийся в $\mathrm{int}\,\mathbb{A}$. Из левоинвариантности метрики d_G следует, что $B((\exp tX)(v, \mathrm{Id}), \varepsilon)$ содержится в $\mathrm{int}\,\mathbb{A}_{\mathrm{co}(\Gamma)}$. Но группа Ли K компактна, поэтому существует момент времени $t > 1$ такой, что $d_K(\exp tA, \mathrm{Id}) < \varepsilon$. Следовательно,

$$d_G(((1-t)v + u(t), \mathrm{Id}), ((1-t)v + u(t), \exp tA)) < \varepsilon.$$

Поэтому

$$(\exp tX)(v, \mathrm{Id}) = ((1-t)v + u(t), \mathrm{Id}) \in B((\exp tX)(v, \mathrm{Id}), \varepsilon)$$

и, значит,

$$((1-t)v + u(t), \mathrm{Id}) \in T_{\mathrm{co}(\Gamma)}.$$

Далее, $\int_K K((1-t)v + u(t))\,d\mu = (1-t)v$, и из вышеприведенного рассуждения следует, что $(M(1-t)v, \mathrm{Id}) \in T_{\mathrm{co}(\Gamma)}$ для некоторого натурального числа M. Из неравенства $M(1-t) < 0$ следует, в силу леммы 7.3, что для достаточно большого $\lambda > 0$ как λv, так и $-\lambda v$ принадлежат $T_{\mathrm{co}(\Gamma)}$. Так как $T_{\mathrm{co}(\Gamma)}$ полугруппа, то $(0, \mathrm{Id}) = (\lambda v, \mathrm{Id}) \cdot (-\lambda v, \mathrm{Id})$ принадлежит $T_{\mathrm{co}(\Gamma)}$. Поэтому множество $T_{\mathrm{co}(\Gamma)}$ содержит единичный элемент группы Ли G. Отсюда следует, что $\mathbb{A}_{\mathrm{co}(\Gamma)} = \Gamma$. Но $\mathbb{A}_{\mathrm{co}(\Gamma)} \subset \mathrm{cl}\,\mathbb{A}$, следовательно, $\mathrm{cl}\,\mathbb{A} = G$. Вместе с условием $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ это означает, что система Γ управляема, см. теорему 2.8. □

7.3. **Полупрямое произведение линейного пространства и произвольной группы Ли.**

Теорема 7.4. *Пусть H — связная группа Ли, линейно действующая на конечномерном вещественном линейном пространстве V, и пусть $G = V \ltimes H$. Предположим, что H содержит компактную группу K, не имеющую ненулевых неподвижных точек в V. При этих условиях правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на G тогда и только тогда, когда*:

(i) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ *и*

(ii) $\Gamma_H = \pi_*(\Gamma)$ *управляема на* H.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что условия (i) и (ii) выполняются. По теореме 2.4 система полного ранга Γ достижима, т.е. внутренность $\operatorname{int}\mathbb{A}$ непуста. Если $(v,g) \in \operatorname{int}\mathbb{A}$, то по условию (ii) существует $w \in V$ такое, что $(w, g^{-1}) \in \mathbb{A}$. Следовательно, $(v,g)\cdot(w,g^{-1}) = (v+gw, \mathrm{Id}) \in \operatorname{int}\mathbb{A}$. Поэтому множество T, определенное равенством (7.2), непусто. Если $(v, \mathrm{Id}) \in T$, то элемент $w = \int_K Kv\,d\mu$ инвариантен относительно K, поэтому $w = 0$. Доказательство завершается так же, как и для теоремы 7.1. Получаем $e = (0, \mathrm{Id}) \in T \subset \operatorname{int}\mathbb{A}$, поэтому $\mathbb{A} = G$ по теореме 2.7. $\square$

Следующий пример показывает, что без каких-либо условий на компактную подгруппу K условия (i) и (ii), вообще говоря, не обеспечивают управляемости.

Пример 7.2. Пусть $H = \mathrm{SO}_0(n,1)$ — связная компонента единицы группы Лоренца в $\mathbb{R}^n$. Эта группа линейно действует на $V = \mathbb{R}^{n+1}$ как подгруппа $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$. Рассмотрим группу Ли $G = V \ltimes H$. Пусть C — световой конус группы H в V и $\Gamma = C \curlywedge L(H)$. Тогда условия (i) и (ii) удовлетворяются, но множество достижимости имеет вид $\mathbb{A} = C \ltimes H \neq G$. В этом случае максимальная компактная подгруппа K группы H равна $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(1;\mathbb{R})$ и имеет много бесконечных точек в V.

7.4. **Однородные пространства.**

7.4.1. *Реперы Серре-Френе с трехмерном пространстве.* Система Серре-Френе, связанная с кривой $x(t)$ в $\mathbb{R}^3$ (см. 6.2.3), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = R(t)e_1, \qquad \frac{dR}{dt} = R(t)\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Если как кривизна k, так и кручение τ постоянны, то

$$\omega = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

есть ось вращения, задаваемого матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом $\exp tA$ есть поворот вокруг ω на угол $t\sqrt{\tau^2+k^2}$ и $x(t)$ — винтовая линия вдоль ω.

Теперь рассмотрим кривые с кривизной $k = \mathrm{const} \neq 0$ и кручением, принимающим два различных значения: τ_1 и τ_2. Такие кривые являются конкатенациями винтовых линий вдоль

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Соответствующее семейство левоинвариантных векторных полей на евклидовой группе $G = \mathrm{E}(3;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \ltimes \mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$ имеет вид $\Gamma = \{(e_1, A), (e_1, B)\} \subset$

$\mathfrak{e}(3;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \leftthreetimes \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau_1 \\ 0 & \tau_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau_2 \\ 0 & \tau_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathbb{R}^3 \leftthreetimes \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ в силу следующих вычислений:

$$(e_1, A) - (e_1, B) = (\tau_1 - \tau_2)(0, A_1)$$

и

$$[(e_1, A), (e_1, B)] = (\tau_1 - \tau_2)(0, A_2),$$

где использованы обозначения

$$A_1 = E_{32} - E_{23}, \quad A_2 = E_{13} - E_{31}, \quad A_3 = E_{21} - E_{12}.$$

Тогда $[(0, A_1), (0, A_2)] = (0, A_3)$, и поэтому $(0, \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})) \subset \mathrm{Lie}(\Gamma)$. Следовательно, $(e_1, 0) \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$, и $[(e_1, 0), (0, \mathfrak{so}(3;\mathbb{R}))] = (\mathbb{R}^3, 0) \subset \mathrm{Lie}(\Gamma)$. Итак, $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathbb{R}^3 \leftthreetimes \mathfrak{so}(3;\mathbb{R}) = \mathfrak{e}(3;\mathbb{R})$.

Согласно теореме 7.1, любая начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}^3$ и любой начальный репер в x_0 могут быть соединены с любой конечной точкой $x_1 \in \mathbb{R}^3$ и любым конечным репером в x_1 вдоль интегральных кривых левоинвариантного семейства Γ в $G = \mathrm{E}(3;\mathbb{R})$.

7.4.2. *Реперы Серре-Френе в n-мерном пространстве.* Результаты предыдущего пункта обобщаются для кривых в $\mathbb{R}^n$, все кривизны которых, кроме одной, фиксированы, а остающаяся свободная кривизна может принимать любые положительные значения. Действительно, согласно теореме 6.3, матрицы A и B в этом случае порождают $\mathfrak{so}(n;\mathbb{R})$ или $\mathfrak{u}(2m;\mathbb{R})$. Соответствующая управляемая система в G имеет вид

$$\Gamma = \{(e_1, A + uB) \mid u > 0\}.$$

Теперь мы покажем, что $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathbb{R}^n \leftthreetimes L(K)$, где $L(K)$ равно алгебре Ли либо группы $K = \mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$, либо группы $K = \mathrm{U}(2m;\mathbb{R})$. По теореме 6.3 проекция

$$\pi_\Gamma : \mathrm{Lie}(\Gamma) \to L(K), \qquad (a, A) \mapsto A,$$

является сюръекцией. С другой стороны, $\ker \pi_\Gamma$ не может равняться нулю, т.к. тогда $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ была бы изоморфна $L(K)$, что невозможно в силу того, что для системы Γ множество достижимости $\mathbb{A}$ не содержится ни в какой компактной подгруппе группы $G = \mathbb{R}^n \ltimes K$. Поэтому $(a, 0) \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Из закона умножения в $\mathbb{R}^n \leftthreetimes L(K)$

$$[(v, 0), (b, B)] = (-Bv, 0)$$

следует, что $\ker \pi_\Gamma$ является идеалом в L. Принимая во внимание, что $\mathrm{Im}\, \pi_\Gamma = L(K)$ и $L(K)a = \mathbb{R}^n$, получаем $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Следовательно, применима теорема 7.1, и соответствующие выводы об управляемости для кривых в $\mathbb{R}^n$ следуют, как в предыдущем пункте.

7.4.3. *Аффинные системы на $\mathbb{R}^n$.* Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + a + u(Bx + b), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in U \subset \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

где A, B — вещественные $n \times n$–матрицы, а a, b — векторы в $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (7.3) можно рассматривать как часть большей системы, которая определяется следующим образом. Обозначим через H орбиту правоинвариантной системы

$$\{A + uB \mid u \in U\} \subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \tag{7.4}$$

на $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Элементы $X = (a, A)$ и $Y = (b, B)$ принадлежат алгебре Ли $L = \mathbb{R}^n \leftthreetimes L(H) \subset \mathfrak{aff}(n; \mathbb{R})$ группы Ли $G = \mathbb{R}^n \ltimes H \subset \mathrm{Aff}(n; \mathbb{R})$; обозначим через $L(H)$ алгебру Ли группы H. Это подалгебра $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, порожденная множеством (7.4). Теперь

$$\Gamma = \{X + uY \mid u \in U\} \subset L$$

может рассматриваться как правоинвариантная управляемая система на G. Аффинная система (7.3) индуцирована системой Γ. Более того, аффинное действие группы Ли G транзитивно на $\mathbb{R}^n$, т.к. G содержит все трансляции. По Следствию 3.3 если правоинвариантная система Γ управляема на группе Ли G, то аффинная система (7.3) управляема на $\mathbb{R}^n$. По построению, для спроецированной системы $\Gamma_H = \pi_*(\Gamma)$ на H имеем $\mathrm{Lie}(\Gamma_H) = L(H)$. Поэтому по теореме 7.4 правоинвариантная система Γ (и, следовательно, аффинная система (7.3)) управляема при условиях:

(i) либо H компактна, либо Γ_H управляема на H, и
(ii) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

7.5. **Примечания.** Результаты в 7.1–7.3 получены Б. Боннаром, В. Джарджевичем, И. Купкой, и Г. Салле [40].

Доказательство теоремы 7.1 для частных случаев $G = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n; \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^{2m} \ltimes \mathrm{U}(2m; \mathbb{R})$ в 7.1.1 и приложения в 7.4 принадлежат В. Джарджевичу [95].

Один из ранних результатов по управляемости правоинвариантных систем на евклидовой группе был получен Г. Салле [40]. Это предложение очевидно следует из теоремы 7.1:

Теорема 7.5. *Пусть $X_1 = (a, A)$, $X_2 = (b, B) \in \mathbb{R}^n \leftthreetimes \mathfrak{so}(n; \mathbb{R})$ — правоинвариантные векторные поля на группе Ли $G = \mathrm{E}(n; \mathbb{R})$. Следующие условия достаточны для управляемости системы $\Gamma = \{X_1, X_2\}$ на G:*

(i) $\mathrm{Lie}(X_1, X_2) = L$ *и*
(ii) $a \in \operatorname{Im} A$ *и* $b \in \operatorname{Im} B$.

8. Полупростые группы Ли

Алгебра Ли L называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Группа Ли G называется *полупростой*, если ее алгебра Ли L полупроста. Алгебра Ли L называется *простой*, если она не содержит нетривиальных (т.е. отличных от $\{0\}$ и L) идеалов. Полупростая алгебра Ли является прямой суммой своих простых неабелевых идеалов.

В данном параграфе мы предполагаем, что L — вещественная конечномерная полупростая алгебра Ли.

8.1. **Вспомогательные факты.**

8.1.1. *Регулярные элементы.* Для любого элемента $B \in L$ определен присоединенный оператор

$$\operatorname{ad} B : L \to L, \quad \operatorname{ad} B(C) = [B, C], \ C \in L.$$

Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда *форма Киллинга*

$$\operatorname{Kil} : L \times L \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Kil}(A, B) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} A \circ \operatorname{ad} B)$$

невырождена.

Корни характеристического многочлена

$$P_B(t) = \det(\operatorname{ad} B - t \operatorname{Id}) = (-1)^n t^n + a_1(B) t^{n-1} + a_2(B) t^{n-2} + \cdots + a_n(B),$$
$$n = \dim L,$$

являются собственными значениями оператора $\operatorname{ad} B$, $B \in L$, а $a_1(B), \ldots, a_n(B)$ являются формами на L. Так как $\operatorname{ad} B(B) = 0$, то $a_n(B) \equiv 0$. Наименьшее число r такое, что

$$a_{n-r+1} \equiv 0, \ a_{n-r+2} \equiv 0, \ \ldots, \ a_n \equiv 0, \quad \text{но} \quad a_{n-r} \not\equiv 0,$$

называется *рангом* алгебры Ли L и обозначается $\operatorname{rk} L$. Элемент $B \in L$ называется *регулярным*, если

$$a_{n-r}(B) \neq 0, \quad r = \operatorname{rk} L.$$

Для регулярного элемента B нуль $0 \in \mathbb{C}$ является собственным значением присоединенного оператора $\operatorname{ad} B$ кратности r, поэтому

$$\dim(\ker \operatorname{ad} B) = \operatorname{rk} L.$$

Множество регулярных элементов открыто и всюду плотно в L.

8.1.2. *Базис Вейля и нормальная вещественная форма.* Пусть $\mathcal{L}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Пусть L_0 — *подалгебра Картана* алгебры Ли $\mathcal{L}$, т.е. нильпотентная подалгебра, являющаяся собственным нормализатором в $\mathcal{L}$. Обозначим через R множество ненулевых корней алгебры Ли $\mathcal{L}$ относительно L_0. Тогда имеется разложение $\mathcal{L}$ в прямую сумму

$$\mathcal{L} = L_0 \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{L_\alpha \mid \alpha \in R\},$$

где L_α, $\alpha \in R$, — одномерные корневые пространства.

Для любого $\alpha \in R$ существует единственный элемент $H_\alpha \in L_0$ такой, что

$$\operatorname{Kil}(H, H_\alpha) = \alpha(H) \text{ для всех } H \in L_0.$$

Определим подпространство пространства L_0:

$$L(0) = \sum\nolimits^{\oplus} \{\mathbb{R} H_\alpha \mid \alpha \in R\}.$$

Имеем

$$L_0 = L(0) \oplus i L(0).$$

Отождествим R с сопряженным пространством $L(0)^*$ пространства $L(0)$ и введем на корнях из R порядок, индуцированный каким-нибудь порядком на линейном пространстве $L(0)^*$. Положительный корень называется простым, если его нельзя представить в виде суммы двух положительных корней. Обозначим множество простых корней через Δ^+.

Для любого корня $\alpha \in R$ существует такой элемент $E_\alpha \in L_\alpha$, что выполнено равенство $\operatorname{Kil}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ и для всех $\alpha, \beta \in R$

$$
\begin{aligned}
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha,\\
&[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad \text{для всех } H \in L_0,\\
&[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha+\beta \notin R,\\ N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{при } \alpha+\beta \in R,\end{cases}
\end{aligned}
$$

где $N_{\alpha\beta}$ — некоторые вещественные числа. Система

$$H_\alpha,\ \alpha \in \Delta^+, \qquad E_\alpha,\ \alpha \in R$$

называется *базисом Вейля* алгебры Ли $\mathcal{L}$ относительно пространства L_0.

Подпространство

$$L = L(0) \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{\mathbb{R} E_\alpha \mid \alpha \in R\} \tag{8.1}$$

является *вещественной нормальной формой* комплексной алгебры Ли $\mathcal{L}$, единственной с точностью до изоморфизма.

8.1.3. *Строго регулярные элементы.* Любой элемент $A \in L$ имеет единственное разложение

$$A = A(0) + \sum \{k_\alpha E_\alpha \mid \alpha \in R\}, \tag{8.2}$$

где

$$A(0) \in L(0), \quad k_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Элемент $B \in L(0)$ регулярен тогда и только тогда, когда элементы $\alpha(B)$ отличны от нуля для всех $\alpha \in R$.

Следующие два свойства, близкие к регулярности, оказываются существенными в вопросах управляемости.

Определение 8.1. Элемент $B \in L$ называется *строго регулярным*, если:

(i) B регулярен и

(ii) все ненулевые собственные значения оператора $\operatorname{ad} B$ просты.

Определение 8.2. Пусть $A \in L$, $A \notin L(0)$ и $B \in L(0)$. Элемент B называется *A-строго регулярным*, если элементы $\alpha(B)$ отличны от нуля и различны для всех $\alpha \in R$ таких, что $k_\alpha \neq 0$ в разложении (8.2).

Замечание. Для сравнения свойств строгой регулярности и A-строгой регулярности, заметим, что элемент $B \in L(0)$ строго регулярен тогда и только тогда, когда элементы $\alpha(B)$ отличны от нуля и различны для *всех* корней $\alpha \in R$.

8.1.4. *Корневые разложения по собственным пространствам строго регулярного элемента.* Выберем и зафиксируем любой строго регулярный элемент $B \in L$.

Комплексификация $L_c = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ является комплексной полупростой алгеброй Ли. Присоединенный оператор в L_c определяется как

$$\operatorname{ad}_c B \,:\, L_c \to L_c, \quad \operatorname{ad}_c B(C) = [B, C],\ C \in L_c.$$

В силу строгой регулярности B, пространство

$$L_0 = \ker \operatorname{ad}_c B$$

является подалгеброй Картана алгебры Ли L_c. Обозначим через $\mathrm{Sp}(B)$ подмножество $\mathbb{C}$ всех *ненулевых* собственных значений оператора $\operatorname{ad} B$. Отметим, что имеется изоморфизм

$$R \to \mathrm{Sp}(B), \qquad \alpha \mapsto \alpha(B) \tag{8.3}$$

между $\mathrm{Sp}(B)$ и R — множеством корней алгебры Ли L_c относительно подалгебры Картана L_0. Поэтому можно обозначать корневые пространства

$$L_\alpha, \quad \alpha \in R,$$

как

$$L_a, \quad a = \alpha(B) \in \mathrm{Sp}(B).$$

Заметим, что $L_{\overline{a}} = \sigma(L_a)$, $a \in \mathrm{Sp}(B)$, где $\overline{a}$ — комплексное сопряжение собственного значения a, а σ — сопряжение в L_c относительно L.

Для $a \in \mathrm{Sp}(B)$ рассмотрим вещественное пространство

$$L(a) = (L_a + L_{\overline{a}}) \cap L.$$

Имеем

$$\dim L(a) = 1 \text{ при } a \in \mathbb{R},$$

в этом случае $L(a)$ является собственным пространством оператора $\operatorname{ad} B$, соответствующим собственному значению a, и

$$\dim L(a) = 2 \text{ при } a \notin \mathbb{R},$$

тогда $L(a)$ является инвариантным пространством для $\operatorname{ad} B$. Таким образом, получаем разложение в прямую сумму собственных пространств и инвариантных пространств:

$$\begin{aligned} L_c &= \ker \operatorname{ad}_c B \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{L_a \mid a \in \mathrm{Sp}(B)\}, \\ L &= \ker \operatorname{ad} B \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \{L(a) \mid a \in \mathrm{Sp}(B),\ \operatorname{Im} a \geq 0\}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Тогда любой элемент $A \in L_c$ имеет комплексное разложение

$$A = A_0 + \sum \{A_a \mid a \in \mathrm{Sp}(B)\}, \quad A_0 \in \ker \operatorname{ad}_c B,\ A_a \in L_a, \tag{8.5}$$

а любой элемент $A \in L$ — вещественное разложение

$$\begin{gathered} A = A(0) + \sum \{A(a) \mid a \in \mathrm{Sp}(B),\ \operatorname{Im} a \geq 0\}, \\ A(0) \in \ker \operatorname{ad} B,\ A(a) \in L(a). \end{gathered} \tag{8.6}$$

8.2. **Однородные системы.** Теперь рассмотрим условия управляемости правоинвариантных систем на полупростых группах Ли.

Прежде всего отметим, что в полупростых алгебрах Ли ранговое условие выполнено в случае общего положения.

Теорема 8.1. *Если алгебра Ли L полупроста, то множество S всех пар (A, B) в $L \times L$, для которых алгебра Ли, порожденная A, B, равна L, является открытым всюду плотным подмножеством $L \times L$.*

Доказательство. Если $\mathrm{Lie}(A, B) = L$, то однородная система $\{\pm A, \pm B\}$ управляема на G. Но правоинвариантные системы сохраняют управляемость при малых возмущениях (см. теорему 2.10), поэтому S открыто.

Чтобы показать, что S всюду плотно, возьмем любой строго регулярный элемент $B \in L$ и любой элемент A из L, для которого $A(a) \neq 0$ для $a \in \mathrm{Sp}(B)$

в разложении (8.6). Такие пары образуют всюду плотное подмножество $L \times L$, и каждая пара (A, B) принадлежит множеству S. □

В полупростом случае однородные системы естественно представляют собой более простую ситуацию так же, как и в общем случае (см. § 5).

Теорема 8.2. *Пусть G — полупростая связная группа Ли. Тогда для пары элементов общего положения A, B из L система $\Gamma = \{\pm A, \pm B\}$ управляема на G.*

Доказательство. Для пары элементов общего положения A, B в алгебре Ли группы Ли G элементы A, B порождают эту алгебру Ли, см. теорему 8.1. По теореме 5.2, однородная система Γ управляема. □

8.3. **Неоднородные системы с векторным управлением.** В случае неограниченного множества управления условие управляемости для неоднородных систем с векторным управлением легко следует из предложения предыдущего пункта об однородных системах.

Теорема 8.3. *Пусть G — полупростая связная группа Ли. Тогда для элементов общего положения A, B_1, ... , $B_m \in L$ система*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

управляема на G.

Доказательство. Линейное пространство $\operatorname{span}(B_1, \dots, B_m)$ содержится в лиевском насыщении $\operatorname{LS}(\Gamma)$. По теореме 8.1 множество всех наборов из m правоинвариантных векторных полей $(B_1, \dots, B_m)$, порождающих L, открыто и всюду плотно. Любая система Γ с такими $B_1, \dots, B_m$ управляема независимо от вектора сноса A. □

8.4. **Неоднородные системы со скалярным управлением.** Теперь рассмотрим гораздо более сложный случай систем вида $\Gamma = A + \mathbb{R}B$.

8.4.1. *Формулировки теорем.* Введем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ лексикографический порядок: $a > b$, если $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b$ или $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b$ и $\operatorname{Im} a > \operatorname{Im} b$.

Определение 8.3. Собственное значение $a \in \operatorname{Sp}(B)$ называется *максимальным* (соответственно *минимальным*), если для любых $b \in \operatorname{Sp}(B)$, $b > 0$ (соответственно $b < 0$), имеет место равенство $[L_a, L_b] = \{0\}$.

($[L_a, L_b]$ есть линейное пространство, порожденное коммутаторами $[X, Y]$, $X \in L_a$, $Y \in L_b$.)

Теорема 8.4. *Пусть G — полупростая связная группа Ли с конечным центром и алгеброй Ли L. Тогда при $A, B \in L$ система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на G, если выполнены следующие условия:*

(1) *B строго регулярен.*
(2) $\operatorname{Lie}(A, B) = L$.
(3) *Пусть $A = A_0 + \sum\{A_a \mid a \in \operatorname{Sp}(B)\}$ — разложение элемента A по собственным пространствам оператора $\operatorname{ad}_c B$, см. (8.5). Тогда $A_s \neq 0$, если s максимально или минимально.*

(4) *Если $s \in \mathrm{Sp}(B)$ максимально и вещественная часть $r = \mathrm{Re}\, s$ является ненулевым собственным значением оператора $\mathrm{ad}_c\, B$, то $\mathrm{Kil}\,(A_r, A_{-r}) < 0$ при условии, что L_r и L_s принадлежат одному простому идеалу алгебры Ли L_c.*

Замечание. Все условия (1)–(4) определяют полуалгебраические подмножества в $L \times L$. Более того, подмножества, определенные условиями (1)–(3), открыты и всюду плотны в $L \times L$.

Чтобы перейти к доказательству теоремы 8.4, рассмотрим системы $\Gamma \subset L$, удовлетворяющие следующим условиям:

A) Γ является клином, т.е. замкнутым выпуклым положительным конусом.

B) Максимальное линейное подпространство $E(\Gamma)$, содержащееся в Γ, называемое *гранью* Γ, является подалгеброй Ли в L.

C) Для любого $X \in E(\Gamma)$ и любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $\exp(t\, \mathrm{ad}\, X)$ отображает Γ в себя.

D) $E(\Gamma)$ содержит строго регулярный элемент B.

E) Если $s \in \mathrm{Sp}(B)$ и s максимально (соответственно минимально), то существует вектор X_+ (соответственно X_-) в Γ такой, что $X_+(s) \neq 0$ (соотв. $X_-(s) \neq 0$).

F) Если $r \in \mathrm{Sp}(B)$ — вещественная часть максимального собственного значения s и если L_r и L_s принадлежат одному простому идеалу алгебры Ли L_c, то существуют $X_+, X_- \in \Gamma$ такие, что $\mathrm{Kil}\,(X_+(r), X_-(-r)) < 0$.

Замечание. Свойства A), B), C) означают, что Γ является лиевским клином (см. § 4).

Теорема 8.5. *Если система $\Gamma \subset L$ удовлетворяет условиям* A) – F) *и выполнено равенство $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то Γ управляема на G.*

Имеет место следующий более общий результат.

Теорема 8.6. *Если система $\Gamma \subset L$ удовлетворяет условиям* D), E), F) *и выполнено равенство $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то Γ управляема на G.*

Доказательство. Лиевское насыщение $\mathrm{LS}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям теоремы 8.5. □

Основной результат по управляемости на полупростых группах Ли — теорема 8.4 — легко следует из теоремы 8.5.

Доказательство. Лиевское насыщение $\mathrm{LS}(\Gamma)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.5. Например, чтобы доказать что $\pm B \in \mathrm{E}(\mathrm{LS}(\Gamma))$, рассмотрим пределы

$$\lim_{u \to \pm\infty} (A + uB)/|u| = \pm B;$$

по свойству A) эти пределы принадлежат $\mathrm{LS}(\Gamma)$. □

8.4.2. *Доказательство теоремы* 8.5. Обозначим через $\mathrm{Sim}(L)$ (соответственно $\mathrm{Sim}(L_c)$) множество всех простых идеалов в L (соответственно L_c). Имеем разложение алгебр Ли в прямые суммы:

$$L = \sum\nolimits^{\oplus} \{\Sigma \mid \Sigma \in \mathrm{Sim}(L)\}, \qquad L_c = \sum\nolimits^{\oplus} \{S \mid S \in \mathrm{Sim}(L_c)\}.$$

Сопряжение $\sigma : L_c \to L_c$ переставляет элементы $\mathrm{Sim}(L_c)$. Имеется следующая связь между $\mathrm{Sim}(L)$ и $\mathrm{Sim}(L_c)$:

(1) $\mathrm{Sim}(L) = \{(S + \sigma S) \cap L \mid S \in \mathrm{Sim}(L_c)\}$.

(2) Если $\Sigma \in \mathrm{Sim}(L)$ и Σ_c обозначает его комплексификацию, то либо $\Sigma_c \in \mathrm{Sim}(L_c)$ (внутренний случай), либо $\Sigma_c = S_1 \oplus S_2$, $S_1, S_2 \in \mathrm{Sim}(L_c)$ (внешний случай). Во внешнем случае Σ индуцирует изоморфизм алгебр Ли $S_1 \to S_2$, и Σ можно отождествить с графиком σ в $S_1 \oplus S_2$, т.е. $\Sigma = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in S_1\}$.

Пусть $B \in L$ — строго регулярный элемент в L. Подалгебра Картана $L_0 = \ker \mathrm{ad}_c B$ of L_c расщепляется:

$$L_0 = \sum\nolimits^{\oplus} \{L_0 \cap S \mid S \in \mathrm{Sim}(L_c)\}.$$

Каждое пересечение $L_0 \cap S$ является подалгеброй Картана S. Система корней R алгебры Ли L_c является объединением систем корней R_S, $S \in \mathrm{Sim}(L_c)$.

В силу биекции (8.3), будем писать L_α и $L(\alpha)$ вместо $L_{\alpha(B)}$ и $L(\alpha(B))$. Сопряжение σ действует на R следующим образом: $\sigma(\alpha)(X) = \overline{\alpha(\sigma(X))}$, где $X \in L_c$.

Определение 8.4. Введем на множестве $R \cup \{0\}$ структуру полного порядка, перенесенную из $\mathrm{Sp}(B) \cup \{0\}$ биекцией $\alpha \in R \cup \{0\} \mapsto \alpha(B) \in \mathrm{Sp}(B) \cup \{0\}$.

Определение 8.5. Корень $\alpha \in R$ является *максимальным* (соответственно *минимальным*), если $\alpha(B) \in \mathbb{C}$ является максимальным (соответственно минимальным) в смысле Определения 8.3.

Это эквивалентно классическому определению: α максимален (соответственно минимален), если $\alpha + \beta \notin R$ при $\beta \in R$ и $\beta > 0$ (соответственно $\beta < 0$).

Пусть $S \in \mathrm{Sim}(L_c)$ — простая компонента L_c и s (соответственно $-s$) ее максимальный (соответственно минимальный) корень.

Определение 8.6. Обозначим через R'_S множество корней $\alpha \in R_S$ таких, что $\alpha + s$ или $\alpha - s$ является корнем. R''_S будет обозначать дополнение $R_S \setminus (R'_S \cup \{s, -s\})$.

Предложение 8.1. 1) *Если $\alpha, \beta \in R'_S$ одного знака и $\alpha + \beta \in R_S$, то $\alpha + \beta \in \{s, -s\}$.*

2) *Если $\alpha \in R'_S$, $\beta \in R''_S$ и $\alpha + \beta \in R_S$, то $\alpha + \beta \in R'_S$ и α, $\alpha + \beta$ одного знака.*

3) *Если $\alpha, \beta \in R''_S$ и $\alpha + \beta \in R_S$, то $\alpha + \beta \in R''_S$.*

Следствие 8.1. 1) *Если $\alpha, \beta \in R'_S$ одного знака, то для всех $\gamma \in R''_S$ таких, что $\alpha + \beta + \gamma \in R_S$ и либо $\alpha + \gamma$, либо $\beta + \gamma$ является корнем, то имеем $\alpha + \beta + \gamma \in \{s, -s\}$.*

2) *Если $\alpha \in R'_S$, $\beta, \gamma \in R''_S$, $\alpha + \beta + \gamma \in R_S$ и, по крайней мере, одна из линейных форм $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\alpha + \gamma$ является корнем, то $\alpha + \beta + \gamma \in R'_S$ и α, $\alpha + \beta + \gamma$ одного знака.*

Теперь объясним основную идею доказательства теоремы 8.5 в случае простой алгебры Ли L.

Обозначим через L' алгебру Ли, порожденную пространствами $\{L_\alpha \mid \alpha \in R'_S \cup \{\pm s\}\}$. Рассмотрим алгебру Ли I, порожденную элементами X из L' такими, что $\mathbb{R}X \subset \Gamma$.

Множество I непусто; если мы покажем, что оно является идеалом L, то получим $\Gamma = L$.

Для доказательства того, что I является идеалом, проверяем на генераторах $X(\alpha)$ алгебры Ли I и $Y(\beta)$ алгебры Ли L, что справедливо равенство $[X(\alpha), Y(\beta)] \in I$. Это в основном получается благодаря свойствам систем корней R'_S и R''_S, описанных в предложении 8.1 и следствии 8.1.

В случае полупростой алгебры Ли L идея доказательства теоремы 8.5 аналогична.

8.5. **Специальная линейная группа.** Группа Ли $G = \mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ проста и имеет тривиальный центр, поэтому к ней применимы результаты 8.4.

Возьмем любые $A, B \in \mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ и рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ на группе $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Собственные значения оператора $\operatorname{ad} B$ являются разностями собственных значений B. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (возможно комплексные) собственные значения B. Строго регулярные элементы в $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$ характеризуются неравенствами

$$\lambda_i - \lambda_j \neq \lambda_k - \lambda_l, \quad \{i,j\} \neq \{k,l\},\ i \neq j.$$

Собственное пространство L_a оператора $\operatorname{ad} B$, соответствующее вещественному собственному значению $a = \lambda_i - \lambda_j \in \mathrm{Sp}(B)$ состоит из всех матриц вида $b_i \otimes c_j$, где b_i и c_j — соответственно собственные значения матрицы B и ее транспонированной матрицы B^{T}, т.е. $Bb_i = \lambda_i b_i$ и $B^{\mathrm{T}} c_j = \lambda_j c_j$. Если собственное значение $a \in \mathrm{Sp}(B)$ комплексно, то $\overline{a}$ также является собственным значением, а L_a есть двумерное линейное пространство, порожденное матрицами $\mathrm{Re}(b_i \otimes c_j)$ и $\mathrm{Im}(b_i \otimes c_j)$. Собственное пространство L_0, соответствующее нулевому собственному значению, состоит из всех матриц, коммутирующих с B.

8.5.1. *Специальная линейная группа в размерности* 2. Рассмотрим два типичных примера для группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$.

Пример 8.1. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения B равны $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$, поэтому ненулевые собственные значения присоединенного оператора $\operatorname{ad} B$ есть $\mathrm{Sp}(B) = \{\pm i\}$. Единичные собственные векторы B равны $b_1 = (e_1 + ie_2)/\sqrt{2}$ и $b_2 = \overline{b}_1 = (e_1 - ie_2)/\sqrt{2}$, где $\{e_1, e_2\}$ — канонический базис $\mathbb{R}^2$. Так как $B^{\mathrm{T}} = -B$, то получаем $c_1 = b_2$ и $c_2 = b_1$. Поэтому

$$b_1 \otimes c_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \text{ и } b_2 \otimes c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

Линейная оболочка матриц

$$\mathrm{Re}(b_1 \otimes c_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{Im}(b_1 \otimes c_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является двумерным линейным пространством симметрических 2×2–матриц с нулевым следом. Поэтому разложение (8.4), порожденное матрицей B, есть классическое разложение матриц на симметрическую и кососимметрическую части.

Проверим условия теоремы 8.4. Матрица B является строго регулярным элементом алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$. Условие (3) означает, что матрица A имеет ненулевую симметрическую часть. При этом условии A и B порождают $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ как алгебру Ли. Наконец, условие (4) пусто. Следовательно, по теореме 8.4 система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, если матрица A не кососимметрична. Это условие также необходимо для управляемости: если $A^{\mathrm{T}} = -A$, то нарушается ранговое условие для Γ.

Пример 8.2. Теперь рассмотрим случай
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Собственные значения B равны ± 1, поэтому $\mathrm{Sp}(B) = \{\pm 2\}$. Соответствующие собственные пространства $\operatorname{ad} B$ одномерны и порождаются матрицами
$$e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } e_2 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Возьмем матрицы B, $e_1 \otimes e_2$, и $e_2 \otimes e_1$ в качестве базиса разложения (8.4) и запишем любую матрицу $A = (a_{ij})$ в виде $A = a_{11}B + a_{12}e_1 \otimes e_2 + a_{21}e_2 \otimes e_1$.

По теореме 8.4 система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, если $a_{12}a_{21} < 0$. С другой стороны, если $a_{12}a_{21} \geq 0$, то Γ неуправляема, т.к. в этом случае билинейная система, индуцированная системой Γ, имеет инвариантные квадранты в $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Предшествующие два примера являются исчерпывающими для группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, т.к. любая матрица $B \in \mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ с ненулевым спектром подобна одной из матриц
$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
С помощью замены управления $u \mapsto u/b$ любая система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ на $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ с $\det B \neq 0$ сводится к системам, рассмотренным в предшествующих двух примерах.

Теперь вернемся к общему случаю в $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$. Если строго регулярный элемент B имеет вещественный спектр, то B диагонализируем. Тогда собственные пространства оператора $\operatorname{ad} B$ одномерны и порождены матрицами $e_i \otimes e_j = E_{ij}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Максимальным собственным значением оператора $\operatorname{ad} B$ является наибольшая разность между диагональными элементами B, а минимальным собственным значением является противоположное по знаку число. Переставанливая векторы базиса e_i, можно упорядочить диагональные элементы B по возрастанию: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Тогда условие (4) теоремы 8.4 принимает вид $a_{1n}a_{n1} < 0$, где a_{ij} — общий элемент матрицы сноса A.

Это рассуждение приводит к следующему результату.

Теорема 8.7. *Пусть вещественные $n \times n$–матрицы с нулевым следом $A = (a_{ij})$ и B удовлетворяют условиям:*

(i) $a_{1n}a_{n1} < 0$,
(ii) $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$,
(iii) $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$,
(iv) $b_i - b_j \neq b_k - b_m$ *при* $(i,j) \neq (k,m)$.

При этих условиях система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на группе $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.

Напомним, что $n \times n$–матрица A называется *разложимой*, если существует матрица перестановки базиса P такая, что
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_3 — $k \times k$–матрица с $0 < k < n$. Далее, $n \times n$–матрица называется *неразложимой*, если она не является разложимой. Неразложимые матрицы — это в точности матрицы, не имеющие нетривиальных инвариантных координатных подпространств.

8.5.2. *Гипотеза Джарджевича-Купки.* В случае строго регулярных элементов B с вещественными собственными значениями теорема 8.4 покрывает случай кососимметрической матрицы сноса A. С этой точки зрения, случай, когда обе матрицы симметричны, находится на противоположном конце спектра, создаваемого теоремой 8.4.

Гипотеза 1. Если матрицы $A, B \in \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ симметричны, то правоинвариантная система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ не является управляемой ни на $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$, ни на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

В размерностях $n = 2, 3$ эта гипотеза легко доказывается построением инвариантных квадрантов или октантов для индуцированной билинейной системы

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{8.7}$$

При $n > 3$ вопрос остается открытым. Частичное подтверждение этой гипотезы для произвольных размерностей при некоторых дополнительных условиях получается с помощью нахождения всех инвариантных ортантов билинейных систем в $\mathbb{R}^n$.

8.5.3. *Инвариантные ортанты билинейных систем.* Пусть $A, B_1, \dots, B_m$ — произвольные вещественные $n \times n$–матрицы. Здесь мы приведем критерий того, что билинейная система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R} \tag{8.8}$$

имеет инвариантные ортанты. Этот результат дает частичное подтверждение гипотезы 1.

Сначала введем необходимые обозначения и определения. Набор индексов

$$\Sigma_n = \{\, \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i = \pm 1 \ \forall i = 1, \dots, n \,\}$$

будет использоваться для параметризации *ортантов*, т.е. множеств вида

$$\mathbb{R}^n_\sigma = \{\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \sigma_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n \,\}.$$

Подмножество пространства состояний называется *положительно* (*отрицательно*) *инвариантным* для векторного поля или управляемой системы, если все траектории поля или системы, начинающиеся в этом множестве (соответственно, его дополнении), не выходят из него (соответственно, его дополнения) во все положительные моменты времени.

Замечание. Система глобально управляема тогда и только тогда, когда у нее нет ни положительно, ни отрицательно инвариантных множеств (кроме тривиальных — всего пространства состояний и пустого множества). Поэтому условия существования инвариантных множеств являются достаточными условиями глобальной неуправляемости.

Определение 8.7. Матрица $A = (a_{ij})$ порядка $n \times n$ называется *знакосимметрической*, если $a_{ij} a_{ji} \geq 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$.

Конструкция 8.1. Для любой знакосимметрической $n \times n$–матрицы A построим *граф* $H(A)$ по следующему правилу. Граф $H(A)$ имеет n вершин 1, 2, ..., n. Его вершины i, j, $i \neq j$, соединены ребром (i,j) тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел a_{ij}, a_{ji} отлично от нуля. Мы рассматриваем лишь ребра, соединяющие *разные* вершины графа $H(A)$; таким образом, петли исключаются из рассмотрения. Каждое ребро (i,j) помечается знаком "+" или "−" : если $a_{ij} \geq 0$ и $a_{ji} \geq 0$, то ставится знак $+$, а если $a_{ij} \leq 0$ и $a_{ji} \leq 0$, то ставится знак $-$ (других комбинаций знаков быть не может в силу знакосимметричности A). Помеченные ребра называются *положительными* или *отрицательными* в зависимости от знака $+$ или $-$. Для графа $H(A)$ определим следующую функцию $s(i,j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$: $s(i,j) = 0$, если вершины i, j не соединены ребром в $H(A)$, $s(i,j) = 1$ для положительного и $s(i,j) = -1$ для отрицательного ребра (i,j) в графе $H(A)$. Цикл (т.е. замкнутый путь, составленный из ребер) графа называется *четным* (*нечетным*), если он содержит четное (соответственно нечетное) количество отрицательных ребер.

Замечание. Если все циклы графа H четны, то существует подмножество V множества его вершин такое, что:

a) любое отрицательное ребро графа H имеет ровно одну вершину в V;
b) любое положительное ребро графа H имеет либо 0, либо 2 вершины в V.

Иными словами, такой граф H является *бихроматическим*: его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы отрицательные ребра соединяли вершины разного цвета, а положительные ребра — вершины одного цвета; первый цвет соответствует множеству V, а второй — его дополнению.

Конструкция 8.2. Предположим, что все циклы графа H четны и V — любое подмножество множества его вершин, удовлетворяющее указанным выше условиям a), b). Тогда *индексом графа* H, соответствующим множеству V, называется множество $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_n$, определяемое следующим образом: $\sigma_i = +1$ при $i \notin V$ и $\sigma_i = -1$ при $i \in V$.

Теорема 8.8. *Пусть* $A, B_1, \ldots, B_m$ — $n \times n$*–матрицы. Билинейная система* (8.8) *имеет положительно* (*отрицательно*) *инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *матрица* A *знакосимметрична;*
2. *матрицы* $B_1, \ldots, B_m$ *диагональны;*
3. *все циклы графа* $H(A)$ (*соответственно* $H(-A)$) *четны.*

Тогда положительно (*отрицательно*) *инвариантными ортантами являются ортанты* $\mathbb{R}^n_\sigma$, *где* σ — *любой индекс графа* $H(A)$ (*соответственно* $H(-A)$), *а их количество равно* 2^c, *где* c — *количество компонент связности графа* $H(A)$.

Если система (8.8) *не имеет инвариантных координатных подпространств* (*в частности, если эта система имеет полный ранг всюду в* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), *то она имеет* 0 *или* 2 *инвариантных ортанта.*

Доказательство. Идея доказательства теоремы 8.8 состоит в следующем. Система (8.8) имеет инвариантные ортанты тогда и только тогда, когда матрицы B_i, $i = 1, \ldots, m$, диагональны и линейное векторное поле Ax имеет инвариантные ортанты. Поиск этих ортантов основывается на двух фактах. Во-первых, известно, что положительный ортант

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \,\}$$

положительно инвариантен для поля Ax тогда и только тогда, когда все внедиагональные элементы матрицы A неотрицательны. Во-вторых, если поле Ax имеет инвариантный ортант, то последовательными заменами координат $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$ можно перевести этот ортант в $\mathbb{R}^n_+$. При этих заменах можно следить за знаками элементов a_{ij} матрицы A и получить условия существования инвариантных ортантов в терминах комбинаций знаков a_{ij}. Эти условия удобно выражаются в терминах графа $H(A)$, соответствующего матрице A, как это и сделано в теореме 8.8. $\square$

Теорема 8.8 имеет отношение к гипотезе 1, т.к. ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$ диагонализирует симметрическую матрицу B; при этом симметрическая матрица A переходит в симметрическую. Поэтому можно считать, что B диагональна, а A симметрична.

Из теоремы 8.8 следует, что гипотеза 1 справедлива в размерностях 2 и 3: для этих размерностей, если A знакосимметрична и B диагональна, то система (8.7) имеет положительно или отрицательно инвариантный ортант. Уже при $n = 4$ существуют симметрические матрицы A, для которых поле Ax и система (8.7) не имеют инвариантных ортантов (см. пример ниже). Тогда вопрос о глобальной управляемости, т.е. отсутствия *любых* инвариантных множеств остается открытым. Но для симметрических матриц A, для которых по крайней мере, один из графов $H(A)$, $H(-A)$ имеет все четные циклы, гипотеза 1 справедлива. Впрочем, в этих случаях существенна не симметричность, а знакосимметричность матрицы A.

Пример 8.3. Пусть $A = (a_{ij})$ — любая 4×4–матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & + \\ + & * & + & 0 \\ 0 & + & * & - \\ + & 0 & - & * \end{pmatrix},$$

т.е. $a_{12}, a_{21}, a_{14}, a_{41}, a_{23}, a_{32} > 0$, $a_{34}, a_{43} < 0$, $a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} = 0$, а диагональные элементы произвольны. Соответствующий граф $H(A)$ приведен на рис. 1.

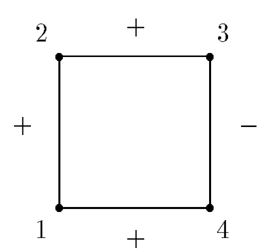

Рис. 1. Граф $H(A)$.

Единственный цикл $(1, 2, 3, 4)$ нечетен в обоих графах $H(A)$ и $H(-A)$.

Поэтому при любой диагональной 4×4–матрице B система (8.7) не имеет инвариантных ортантов. Но вопрос глобальной управляемости (для системы полного ранга) кажется открытым. Эти утверждения сохраняют силу при малых возмущениях матрицы A.

8.6. **Классические группы Ли.**

8.6.1. *Комплексные простые алгебры Ли.* Обозначим через $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ множество всех комплексных $n\times n$–матриц, через $\mathfrak{d}(n;\mathbb{C})$ — подмножество всех диагональных матриц в $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ есть линейное пространство $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ с матричным коммутатором $[A,B]=AB-BA$ в качестве скобки Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ есть подалгебра $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$, состоящая из всех матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})=\{A\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})\mid \operatorname{tr}A=0\}.$$

Подалгебра

$$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})\cap\mathfrak{d}(n;\mathbb{C})=\{\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)\mid a_1+\dots+a_n=0\}$$

является подалгеброй Картана в $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ называется алгеброй типа A_l, $l=n-1$.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathbb{C}^n$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$ состоит из всех линейных операторов A на $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$(Ax,y)+(x,Ay)=0,\qquad x,y\in\mathbb{C}^n.$$

Предположим, что форма $(\cdot,\cdot)$ задается $n\times n$–матрицей I вида

$$\begin{pmatrix}0&\mathrm{Id}_l\\ \mathrm{Id}_l&0\end{pmatrix}\quad\text{при } n=2l\quad\text{или}\quad\begin{pmatrix}0&\mathrm{Id}_l&0\\ \mathrm{Id}_l&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{при } n=2l+1,$$

где Id_l — единичная $l\times l$–матрица. Тогда

$$\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})=\{A\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})\mid IA^{\mathrm{T}}+AI=0\}.$$

В этом случае в качестве подалгебры Картана можно выбрать подпространство $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$, состоящее из матриц вида

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_l,-a_1,\dots,-a_l)\quad\text{при } n=2l,\\ &\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_l,-a_1,\dots,-a_l,0)\quad\text{при } n=2l+1.\end{aligned}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$ называется алгеброй типа B_l при $n=2l+1$ и алгеброй типа D_l при $n=2l$.

Пусть теперь $(\cdot,\cdot)$ является невырожденной кососимметрической билинейной формой на $\mathbb{C}^n$. Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$ определяется как множество всех линейных операторов A в $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$(Ax,y)+(x,Ay)=0,\qquad x,y\in\mathbb{C}^n.$$

Если форма $(\cdot,\cdot)$ задается матрицей

$$J=\begin{pmatrix}0&\mathrm{Id}_l\\ -\mathrm{Id}_l&0\end{pmatrix},$$

то

$$\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})=\{A\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})\mid JA^{\mathrm{T}}+AJ=0\}.$$

Множество всех матриц в $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$ вида

$$\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_l,-a_1,\dots,-a_l)$$

является подалгеброй Картана в $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$. Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$ называется алгеброй типа C_n.

В 8.6.2, 8.6.3, и 8.6.4 будем предполагать, что подалгебры Картана L_0 в алгебрах Ли A_l, B_l, C_l, и D_l выбраны, как указано выше. В частности, из условия $B \in L(0)$ будет следовать, что матрица B диагональна.

Алгебры A_l, B_l, C_l, и D_l называются *классическими комплексными алгебрами Ли*. Кроме них, существуют пять особых алгебр Ли, которые обозначаются G_2, F_4, E_6, E_7, и E_8.

Классический результат о классификации комплексных простых алгебр Ли утверждает, что все алгебры Ли

$$A_l,\ l \geq 1, \quad B_l,\ l \geq 2, \quad C_l,\ l \geq 3, \quad D_l,\ l \geq 4,$$

и

$$G_2, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8$$

просты и любая простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ изоморфна в точности одной из этих алгебр Ли.

8.6.2. *Порождение классических алгебр Ли.* Здесь важнейшую роль в получении условий управляемости играет следующее утверждение, описывающее пары элементов, которые порождают классические алгебры Ли.

Теорема 8.9. *Пусть L — нормальная вещественная форма комплексной алгебры Ли типа A_l, B_l, C_l или D_l. Пусть элементы $A, B \in L$ — таковы, что $B \in L(0)$ является A-строго регулярным. При этих условиях* $\mathrm{Lie}(A, B) = L$ *тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.*

Замечание. Нетривиальная часть этой теоремы — достаточность: если B диагональна и A разложима, то легко видеть, что $\mathrm{Lie}(A, B)$ состоит из разложимых матриц.

8.6.3. *Однородные системы.*

Теорема 8.10. *Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли L, являющейся нормальной вещественной формой комплексной алгебры Ли типа A_l, B_l, C_l или D_l. Пусть элементы $A, B \in L$ таковы, что $B \in L(0)$ является A-строго регулярным. При этих условиях система $\Gamma = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ управляема на G тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.*

Доказательство. Для однородных систем управляемость равносильна ранговому условию. Поэтому утверждение следует из теоремы 8.9. □

8.6.4. *Неоднородные системы.*

Теорема 8.11. *Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли L, являющейся нормальной вещественной формой комплексной алгебры Ли $\mathcal{L}$ типа A_l или D_l. Пусть элементы $A, B \in L$ таковы, что:*

(i) *$B \in L(0)$ является A-строго регулярным.*

(ii) *Пусть $A = A(0) + \sum\{A(\alpha) \mid \alpha \in R\}$ есть разложение A вдоль корневых пространств алгебры Ли $\mathcal{L}$ относительно L_0, см.* (8.2). *Тогда для максимального корня s выполнено неравенство* $\mathrm{Kil}\,(A(s), A(-s)) < 0$.

При этих условиях система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема на G тогда и только тогда, когда матрица A разложима.

Теорема доказывается с помощью рассуждения, аналогичного использованному при доказательстве теоремы 8.5 в Пункте 8.4.2. Единственное существенное отличие состоит в том, что ранговое условие следует из теоремы 8.9.

8.7. **Примечания.** Условия управляемости в 8.4 получены Р. Эль Ассуди, Ж. П. Готье, и И. Купкой [26]. Они являются кульминацией серии работ по управляемости на полупростых группах Ли В. Джарджевича и И. Купки [96, 97], Ж. П. Готье и Г. Борнара [60], Ж. П. Готье, И. Купки, и Г. Салле [61], Р. Эль Ассуди и Ж. П. Готье [24, 25], Ф. Сильвы Лейте и П. Е. Крауча [115], Р. Эль Ассуди [23]. В частности, теорема 8.7 была получена Ж. П. Готье и Г. Борнаром [60]. В этой работе приводится также простой алгоритм проверки квадратной матрицы на разложимость.

Предложение 8.1 принадлежит А. Джозефу [89].

Гипотеза 1 о неуправляемости билинейной системы со скалярным управлением с симметрическими матрицами в правой части была высказана В. Джарджевичем и И. Купкой [96].

Инвариантные ортанты билинейных систем описаны Ю. Л. Сачковым [137] с помощью приложения бихроматических графов к изучению инвариантных множеств динамических систем; эта идея принадлежит М. Хиршу [76].

Результаты 8.6 получены Ф. Сильвой Лейте и П. Е. Краучем [115]. Кроме теоремы 8.9, имеются другие результаты о порождении классических алгебр Ли и групп Ли, см. работы Ф. Сильвы Лейте и П. Е. Крауча [55], Ф. Сильвы Лейте [111, 112, 113, 114], Х. Альбукерк и Ф. Сильвы Лейте [22].

Результаты, относящиеся к подполугруппам полупростых групп Ли имеются в работах Л. Сан Мартина [145] и Л. Сан Мартина и П. Тонелли [146].

9. Нильпотентные группы Ли

Алгебра Ли L называется *нильпотентной*, если ее убывающий центральный ряд

$$L_{(1)} = [L, L],\ L_{(2)} = [L, L_{(1)}],\ \dots,\ L_{(i)} = [L, L_{(i-1)}],\ \dots, \quad i \in \mathbb{N},$$

стабилизируется на нуле:

$$L \supset L_{(1)} \supset L_{(2)} \supset \cdots \supset L_{(N)} = \{0\}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Любая нильпотентная алгебра Ли разрешима, т.к. $L_{(i)} \supset L^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, где $L^{(i)}$ обозначает элемент производного ряда

$$L^{(1)} = [L, L],\ L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}],\ \dots,\ L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}],\ \dots, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Другая эквивалентная характеристика нильпотентности L состоит в том, что все присоединенные операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентны и потому имеют нулевой спектр.

9.1. **Произвольные системы.** Управляемость правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$ на нильпотентной группе Ли G может быть полностью описана в терминах клина, т.е. топологически замкнутого выпуклого положительного конуса, порожденного системой Γ:

$$W(\Gamma) = \operatorname{cl}(\operatorname{co}(\Gamma)) \subset L.$$

Так как $\Gamma \subset W(\Gamma) \subset \operatorname{LS}(\Gamma)$, то очевидно, что Γ и $W(\Gamma)$ управляемы или неуправляемы одновременно.

Теорема 9.1. *Пусть G — нильпотентная связная группа Ли с алгеброй Ли L и $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система на G, порождающая L как алгебру Ли. Система Γ управляема на G тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) $(\mathrm{int}_{W-W} W) \cap L^{(1)} \neq \emptyset$ *или*

(ii) $\mathrm{int}\,\mathrm{cl}(L^{(1)} + W) \cap \exp^{-1}(e) \neq \emptyset$,

где $W = W(\Gamma)$ есть клин, порожденный системой Γ.

Замечание. Выше $\mathrm{int}_{W-W} W$ обозначает внутренность клина W относительно линейного пространства $W - W$, порожденного W, а e — единицу группы Ли G.

Достаточность в теореме 9.1 следует из описания максимальных открытых подполугрупп S нильпотентных групп в терминах их касательных конусов

$$L(S) = \{\, x \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ x) \subset \mathrm{cl}(S) \,\}.$$

Открытая подполугруппа S группы Ли G является собственной, т.е. $S \neq G$, тогда и только тогда, когда $e \notin S$. Поэтому множество всех открытых подполугрупп в G индуктивно, и любая собственная подполугруппа содержится в *максимальной*.

Теорема 9.2. *Пусть G — нильпотентная связная группа Ли, а S — максимальная открытая собственная подполугруппа в G. Тогда $L(S)$ является полупространством, ограниченным подалгеброй коразмерности один в L.*

Доказательство необходимости в теореме 9.1 основано на том, что по теореме Хана-Банаха множество $W + L^{(1)}$ содержится в полупространстве в L; тогда $\exp\left(\mathrm{int}\left(W + L^{(1)}\right)\right)$ является собственной открытой полугруппой в G, откуда следует, что $\exp(W)$ содержится в собственной подполугруппе G.

Критерий управляемости в теореме 9.1 существенно связан с нильпотентностью группы. Этот результат перестает быть справедливым для группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Он также нарушается в следующем разрешимом ненильпотентном примере.

Пример 9.1. Пусть G — (единственная) двумерная связная односвязная неабелева группа Ли; она может быть представлена матрицами:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Группа Ли G разрешима, но не нильпотентна. Ее алгебра Ли имеет вид

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Рассмотрим следующий клин в L:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ b \geq 0 \right\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\exp(\mathbb{R}_+ W) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x > 0,\ y \geq 0 \right\},$$

это собственная подполугруппа G, поэтому W неуправляем на G. С другой стороны, легко видеть, что оба условия (i), (ii) теоремы 9.1 выполняются для клина W из этого примера.

9.2. **Абелевы группы.** Пусть G — (связная) *абелева* группа Ли. Тогда $G = \mathbb{R}^{n-k} \times T^k$ для некоторого $k \leq n$, где $n = \dim G$ и $T^k = S^1 \times \cdots \times S^1$ — k-мерный тор.

Для таких групп Ли теорема 9.1 утверждает следующее.

Следствие 9.1. *Пусть G — абелева связная группа Ли с алгеброй Ли L и $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система на G. Γ управляема на G тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{co}(\Gamma))) \cap \exp^{-1}(e) \neq \emptyset.$$

Если G односвязна, то Γ управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{co}(\Gamma))) \ni e.$$

9.3. **Факторсистемы.** Пусть G — произвольная группа Ли с алгеброй Ли L. Пусть h — идеал L и H — соответствующая связная подгруппа G. Предположим, что H замкнута, поэтому G/H является группой Ли. Обозначим проекцию из G на G/H через π, а ее дифференциал через π_*. Проекция системы Γ на G/H корректно определена:

$$\pi_*(\Gamma) = \{\, \pi_* v \mid v \in \Gamma \,\} \subset L/h.$$

Заметим, что из управляемости системы Γ на G следует управляемость ее проекции $\pi_*(\Gamma)$ на G/H.

Производная подалгебра $L^{(1)}$ является идеалом L, и для односвязной группы G ее производная подгруппа $G^{(1)} = [G, G]$ замкнута. Более того, факторгруппа $G/G^{(1)}$ абелева. Поэтому вышеприведенная конструкция и следствие 9.1 позволяют дать следующее общее необходимое условие управляемости для систем, аффинных по управлению

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m \right\} \subset L \tag{9.1}$$

на односвязных группах Ли.

Введем обозначение для алгебры Ли, порожденной векторными полями в Γ при управлениях

$$L_0 = \operatorname{Lie}(B_1, \dots, B_m).$$

Теорема 9.3. *Пусть связная группа Ли G односвязна. Если аффинная по управлению правоинвариантная система* (9.1) *управляема, то выполнены условия:*

(1) $\pi_*(L_0) = L/L^{(1)}$,
(2) $m \geq \dim L - \dim L^{(1)}$.

Доказательство. (1) Если Γ управляема на G, то $\pi_*(\Gamma)$ управляема на абелевой односвязной группе Ли $G/G^{(1)}$. Из следствия 9.1 вытекает, что $\pi_*(L_0) = L/L^{(1)}$.

(2) Алгебра Ли $\pi_*(L_0)$ абелева и порождена векторами $\pi_* B_1, \dots, \pi_* B_m$. Поэтому

$$m \geq \dim(\pi_*(L_0)) = \dim(L/L^{(1)}) = \dim L - \dim L^{(1)}.$$

□

Замечание. Из этой теоремы следует, что правоинвариантные системы на односвязных группах Ли с нетривиальным фактором $G/G^{(1)}$ существенно отличаются от правоинвариантных систем на полупростых группах Ли (заметим, что если G полупроста, то $G^{(1)} = G$). Для полупростых групп Ли условие $m = 2$ достаточно для управляемости аффинной по управлению правоинвариантной системы общего положения, см. теорему 8.3. Но теорема 9.3 дает оценку снизу

$$m \geq \dim G/G^{(1)}$$

для количества векторных полей при управлениях $B_1, \ldots, B_m$, необходимого для управляемости на односвязной группе G.

9.4. **Аффинные по управлению системы.** Для аффинных по управлению правоинвариантных систем (9.1) на односвязных нильпотентных группах Ли имеется простой критерий управляемости в терминах подалгебры Ли L_0.

Теорема 9.4. *Пусть G — нильпотентная связная односвязная группа Ли. Система* (9.1) *управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.*

Условие $L_0 = L$ достаточно для управляемости системы Γ на произвольной группе Ли G: это следует из включения $L_0 \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому существенной частью теоремы является необходимость. Здесь ключевую роль играют необходимые условия управляемости в терминах понятия *симплектического вектора*.

Рассмотрим коприсоединенное представление ρ^* группы G в сопряженном пространстве L^* к L. Для любого ковектора $\lambda \in L^*$ коприсоединенная орбита $\theta_\lambda = \rho^*_G(\lambda)$ ковектора λ для действия ρ^* является гладким подмногообразием L^*, диффеоморфным однородному пространству G/E_λ, где E_λ — подгруппа изотропии λ, $E_\lambda = \{\, g \in G \mid \rho^*_g(\lambda) = \lambda \,\}$. Далее, систему Γ можно спроецировать с G на однородное пространство $G/E_\lambda \simeq \theta_\lambda$, и управляемость Γ на G очевидно влечет управляемость ее проекции Γ_λ на G/E_λ. Это приводит к необходимым условиям управляемости в терминах коприсоединенного представления.

Определение 9.1. Ковектор $\lambda \in L^*$ называется *симплектическим вектором* для $w \in L$, если коприсоединенная орбита θ_λ нетривиальна и $\langle w, \beta \rangle > 0$ для всех $\beta \in \theta_\lambda$.

(Мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ спаривание вектора и ковектора.)

Теорема 9.5. *Если существует векторное поле $\xi \in L$, принадлежащее централизатору подалгебры L_0, такое, что ненулевое векторное поле $[A, \xi]$ имеет симплектический вектор, то система* (9.1) *не является управляемой на G.*

Действительно, из существования такого векторного поля $\xi \in L$ следует, что функция

$$f_\xi \ : \ \theta_\lambda \to \mathbb{R}, \qquad \beta \mapsto f_\xi(\beta) = -\langle \xi, \beta \rangle$$

строго возрастает на траекториях проекции системы Γ на коприсоединенную орбиту θ_λ. В самом деле, решение задачи Коши $\dot g(t) = A(g(t))$, $g(0) = g_0$ имеет вид $g(t) = \exp(tA)g_0$. Далее, функция

$$h(t) = \mathrm{Ad}\left(g(t)^{-1}\right) = \mathrm{Ad}\left(g_0^{-1}\right) \circ \exp(-t \,\mathrm{ad}\, A)$$

имеет производную

$$\dot h(t) = \mathrm{Ad}\left(g_0^{-1}\right) \circ \exp(-t \,\mathrm{ad}\, A) \circ (-\,\mathrm{ad}\, A) = -\,\mathrm{Ad}\left(g(t)^{-1}\right) \circ \mathrm{ad}\, A.$$

Теперь для $\lambda \in L^*$ коприсоединенное действие ρ^* элемента $g \in G$ определяется равенством

$$\rho_g^*(\lambda) = \mathrm{Ad}^*\left(g^{-1}\right)\lambda.$$

Следовательно, для любых $\xi \in L$, $\lambda \in L^*$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f_\xi(\rho^*_{g(t)}(\lambda)) &= -\frac{d}{dt}\langle \xi, \rho^*_{g(t)}(\lambda)\rangle = -\frac{d}{dt}\langle \xi, \mathrm{Ad}^*\left(g(t)^{-1}\right)\lambda\rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}\left(g(t)^{-1}\right)\xi, \lambda\rangle = \langle \mathrm{Ad}\left(g(t)^{-1}\right) \circ \mathrm{ad}\, A(\xi), \lambda\rangle \\
&= \langle [A, \xi], \rho^*_{g(t)}(\lambda)\rangle.
\end{aligned}$$

Поэтому если λ является симплектическим вектором для $[A, \xi]$, то f_ξ возрастает вдоль коприсоединенных орбит траекторий поля A. Если, вдобавок, $\mathrm{ad}\,\xi$ обращается в нуль на подалгебре L_0, то это имеет место и для траекторий всей системы Γ, что невозможно для управляемой системы.

Другой факт, существенный для необходимости в теореме 9.4, дается следующим утверждением, относящимся к *гиперповерхностным системам*, т.е. аффинным по управлению системам (9.1), у которых L_0 является подалгеброй L коразмерности один.

Обозначим через G_0 связную подгруппу группы G, соответствующую подалгебре L_0.

Теорема 9.6. *Пусть $\Gamma \subset L$ — аффинная по управлению система* (9.1) *на связной группе Ли G такая, что L_0 является* идеалом L *коразмерности один.*

1. *Если G_0 замкнута в G, то Γ управляема тогда и только тогда, когда $A \notin L_0$ и $G/G_0 \simeq S^1$.*
2. *Если G_0 незамкнута в G, то Γ управляема тогда и только тогда, когда $A \notin L_0$.*

Замечание. Вышеприведенная теорема справедлива без предположения о том, что L_0 является идеалом; это существенно для обобщения теоремы 9.4 для подкласса разрешимых групп Ли, содержащего нильпотентные группы Ли (см. § 13 ниже).

Теперь приведем эскиз доказательства необходимости в теореме 9.4. Пусть система Γ управляема на группе G. Из теории симплектического вектора следует, что подалгебра L_0 является идеалом L. Ранговое условие для Γ выполняется: $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(A, L_0) = L$, поэтому L_0 имеет коразмерность 0 или 1 в L. Но случай коразмерности 1 невозможен, т.к. тогда из теоремы 9.6 следует $G/G_0 \simeq S^1$, что противоречит односвязности G. Поэтому $L_0 = L$, и необходимость в теореме 9.4 доказана.

Пример 9.2. Пусть G — группа Гейзенберга размерности $2p+1$. Она может быть представлена как подгруппа группы $\mathrm{GL}(p+2; \mathbb{R})$, порожденная матрицами

$$\mathrm{Id} + X_i,\ \mathrm{Id} + Y_i,\ Z, \quad i = 1, \ldots, p,$$

где

$$X_i = E_{1,i+1},\ Y_i = E_{i+1,p+2}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Алгебра Ли L группы G порождена как линейное пространство матрицами

$$X_i,\ Y_i,\ Z, \quad i = 1, \ldots, p,$$

с ненулевыми коммутаторами

$$[X_i, Y_i] = Z, \quad i = 1, \dots, p.$$

Группа Гейзенберга G односвязна и нильпотентна, поэтому теорема 9.4 описывает все управляемые системы на G.

9.5. **Примечания.** Критерий управляемости для произвольных правоинвариантных систем и описание максимальных подполугрупп в нильпотентных группах Ли (см. 9.1) получены Дж. Хильгертом, К. Х. Хофманном, и Дж. Д. Лоусоном [73].

Результат для факторсистем (см. 9.3) получен Ю. Л. Сачковым [134].

Критерий управляемости для аффинных по управлению систем (см. 9.4) принадлежит В. Аяла, а понятие симплектического вектора использовалось В. Аяла и Л. Вергара [29].

Управляемость проекций правоинвариантных систем на нильпотентные и разрешимые многообразия можно исследовать с использованием теории потоков на этих многообразиях, см., например, книгу Л. Ауслендера, Л. Грина, и Ф. Хана [27]. Это может оказаться существенным при исследовании локальной управляемости нелинейных систем с помощью нильпотентных аппроксимаций (П. Крауч и К. Бирнс [56]).

10. Произведения групп Ли

В этом параграфе мы рассмотрим условия управляемости на произведениях векторных групп и нильпотентных групп Ли. Результаты для таких произведений можно рассматривать как обобщение результатов для нильпотентных групп Ли, см. Подраздел 9.1.

Теорема 10.1. *Пусть G — связная группа Ли, C — связная компактная подгруппа G и N — нильпотентная нормальная подгруппа G такая, что $G = C \cdot \mathrm{cl}(N)$. Если W — клин в L, порождающий L как алгебру Ли, то W управляем тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{int}_{W-W}(W) \cap (L(C) + L^{(1)}) \neq \emptyset.$$

Предыдущее утверждение об управляемости доказывается с помощью следующего описания всех максимальных открытых полугрупп в произведениях компактных и нильпотентных групп.

Теорема 10.2. *Пусть G — связная группа Ли, C — связная компактная подгруппа G и N — нильпотентная нормальная подгруппа G такая, что $G = C \cdot \mathrm{cl}(N)$. Если S — максимальная открытая подполугруппа группы G, то ее касательный клин*

$$L(S) = \{X \in L \mid \exp(tX) \in \mathrm{cl}(S) \ \forall t \geq 0\}$$

является полупространством, ограниченным идеалом в L.

10.1. **Примечания.** Результаты этого параграфа получены Дж. Хильгертом [71].

Другим важным (и более общим) результатом о максимальных полугруппах, связанным с управляемостью, является описание максимальных подполугрупп в группах Ли с кокомпактным радикалом, принадлежащее Дж. Д. Лоусону, см. § 11.

11. Группы Ли с кокомпактным радикалом

Обозначим через $\operatorname{Rad} G$ *радикал* группы Ли G, т.е. максимальную разрешимую нормальную подгруппу группы G. В этом параграфе будем предполагать, что группа Ли G имеет *кокомпактный радикал*, то есть факторгруппа $K = G/\operatorname{Rad} G$ компактна. Этот широкий класс групп Ли содержит:

- разрешимые группы Ли ($K = \{e\}$),
- компактные группы Ли,
- полупрямые произведения векторных пространств V с компактными группами Ли ($V \subset \operatorname{Rad} G$).

11.1. **Условия управляемости и максимальные подполугруппы.** Следующая теорема дает характеризацию управляемости на группах Ли с кокомпактным радикалом в терминах теории алгебр Ли; эта характеризация полна в случае односвязных групп Ли.

Теорема 11.1. *Пусть фактор $G/\operatorname{Rad} G$ компактен и $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система полного ранга: $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. Если Γ не содержится ни в каком полупространстве L, ограниченном подалгеброй, то Γ управляема на связной группе Ли G. Обратное верно, если G односвязна.*

Этот результат является следствием следующей классификации максимальных подполугрупп в группах Ли с кокомпактным радикалом.

Теорема 11.2. *Максимальные подполугруппы M с непустой внутренностью в связной односвязной группе Ли G с компактным фактором $G/\operatorname{Rad} G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с их касательными объектами*

$$L(M) = \{A \in L \mid \exp(tA) \in \operatorname{cl}(M)\ \forall t \geq 0\},$$

а последние в точности являются полупространствами, ограниченными подалгеброй. Более того, полугруппа M порождена множеством $\exp(L(M))$.

Теорема 11.1 следует из теоремы 11.2, так как множество достижимости любой неуправляемой правоинвариантной системы $\Gamma \subset L$, $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$, является собственной подполугруппой G, содержащейся в некоторой максимальной подполугруппе с непустой внутренностью.

11.2. **Редуктивные группы Ли.** Алгебра Ли L называется *редуктивной*, если ее радикал, т.е. максимальный разрешимый идеал, совпадает с ее центром. L редуктивна тогда и только тогда, когда производная подалгебра $L^{(1)}$ полупроста. В этом случае L является прямой суммой своего центра и $L^{(1)}$. Группа Ли называется *редуктивной*, если ее алгебра Ли редуктивна.

В этом пункте мы рассмотрим описание управляемых систем Γ на редуктивной группе G при условиях, что Γ является замкнутым выпуклым конусом в L, конус Γ точечный, т.е. имеет нулевую грань: $\Gamma \cap -\Gamma = \{0\}$, и инвариантен относительно присоединенного действия группы K, где NAK — разложение Ивасавы группы G.

Напомним, что (см. § 4):

(1) правоинвариантная система Γ управляема тогда и только тогда, когда управляем замкнутый выпуклый конус $\operatorname{cl}(\operatorname{co}(\Gamma))$, порожденный системой Γ;

(2) система Γ управляема, т.е. $\mathbb{A} = G$, тогда и только тогда, когда замыкание $\mathrm{cl}(\mathbb{A})$ совпадает с G при условии, что Γ удовлетворяет ранговому условию $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Пусть $G = NAK$ — разложение Ивасавы группы Ли G, где N, A, и K — соответственно максимальная нильпотентная подгруппа, главная векторная подгруппа, и максимальная компактная подгруппа G. Обозначим через $L(N)$ и $L(K)$ алгебры Ли групп Ли N и K соответственно, а через $L^{(1)}(K)$ — производную подалгебру группы Ли K.

Теорема 11.3. *Пусть G — связная односвязная редуктивная группа Ли с разложением Ивасавы NAK. Пусть Γ является $\mathrm{Ad}(K)$-инвариантным выпуклым конусом в L, удовлетворяющим условиям $\Gamma \cap -\Gamma = \{0\}$ и $\mathrm{int}\,\Gamma \neq \emptyset$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если $(\mathrm{int}\,\Gamma) \cap (L(N) + L^{(1)}(K)) \neq \emptyset$, то Γ управляема.*

(ii) *Если $\Gamma \cap (L(N) + L^{(1)}(K)) = \{0\}$, то*

$$\Gamma = \mathrm{LS}(\Gamma) = \{X \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ X) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{A})\}$$

и Γ неуправляема.

(iii) *Если $\emptyset \neq (\Gamma \cap (L(N) + L^{(1)}(K))) \setminus \{0\} \subset \partial\Gamma$, то Γ неуправляема.*

Основная идея, используемая при доказательстве этой теоремы, состоит в представлении редуктивной группы как однородного пространства группы с кокомпактным радикалом и последующем использовании характеризации максимальных подполугрупп в таких группах, представленной в теореме 11.2.

11.3. **Примечания.** Описание максимальных подполугрупп в группах Ли с кокомпактным радикалом и условия управляемости на таких группах Ли в п. 11.1 получены Дж. Д. Лоусоном [110].

Условие управляемости на редуктивных группах Ли в п. 11.2 принадлежит Дж. Хильгерту [72].

11.3.1. *Ранговое условие и гиперповерхностный принцип.* Для доказательства неуправляемости системы обычно либо показывают, что ранговое условие нарушено (см. теорему 2.3), либо строят (не обязательно гладкую) гиперповерхность в пространстве состояний, пересекаемую всеми траекториями лишь в одном направлении (см., например, гиперповерхностный принцип в теореме 12.2). Согласно теореме 11.1, для правоинвариантных систем на односвязных группах Ли с кокомпактным радикалом такую гиперповерхность всегда можно отыскать среди подгрупп коразмерности один. Интересный вопрос состоит в том, для любой ли неуправляемой правоинвариантной системы полного ранга существует такая подгруппа коразмерности один? Положительный ответ может дать новый способ получения достаточных условий управляемости, а отрицательный даст пример сложного препятствия к управляемости.

12. Гиперповерхностные системы

Класс управляемых систем в n-мерном пространстве с $(n-1)$ независимым управлением имеет особенности, облегчающие их исследование, особенно в случае неограниченных управлений. Это тем более справедливо для правоинвариантных систем.

Определение 12.1. Аффинная по управлению правоинвариантная система

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m \right\} \subset L \tag{12.1}$$

называется *гиперповерхностной*, если алгебра Ли L_0, порожденная векторными полями $B_1, \dots, B_m$, является подалгеброй коразмерности один в L:

$$\dim L_0 = \dim \operatorname{Lie}(B_1, \dots, B_m) = \dim L - 1.$$

Обозначим через G_0 связную подгруппу группы G, соответствующую подалгебре L_0.

Управляемость гиперповерхностных правоинвариантных систем полностью характеризуется следующим утверждением.

Теорема 12.1. *Пусть* Γ *— аффинная по управлению гиперповерхностная система* (12.1) *на связной группе Ли* G*.*

(1) *Если* G_0 *замкнута в* G*, то* Γ *управляема тогда и только тогда, когда* $A \notin L_0$ *и* $G/G_0 \simeq S^1$*.*
(2) *Если* G_0 *незамкнута в* G*, то* Γ *управляема тогда и только тогда, когда* $A \notin L_0$*.*

Доказательство. Условие $A \notin L_0$ необходимо для управляемости в обоих случаях (1), (2), т.к. оно эквивалентно ранговому условию $\operatorname{Lie}(\Gamma) = \operatorname{Lie}(A, L_0) = L$. Также заметим, что $L_0 \subset \operatorname{LS}(\Gamma)$, поэтому Γ управляема тогда и только тогда, когда расширенная система $\tilde{\Gamma} = \operatorname{cl}(\operatorname{co}(\Gamma)) = \mathbb{R}_+ A + L_0$ управляема.

(1) Если $\operatorname{cl}(G_0) = G_0$, то пространство правых смежных классов G/G_0 является гладким одномерным многообразием, т.е. прямой $\mathbb{R}$ или окружностью S^1. Так как для всех $x \in G$ любая точка правого смежного класса $G_0 x$ достижима из x для системы $\tilde{\Gamma}$, то можно спроецировать $\tilde{\Gamma}$ на G/G_0. Легко видеть, что спроецированная система управляема при $G/G_0 = S^1$ и неуправляема при $G/G_0 = \mathbb{R}$.

(2) Если подгруппа коразмерности один G_0 незамкнута в G, то она всюду плотна в G, поэтому множество достижимости $\mathbb{A}$ также всюду плотно в G. Если $A \notin L_0$, то система Γ имеет полный ранг и потому управляема по теореме 2.8. □

Замечание. Теорема 12.1 обобщает аналогичный критерий теоремы 9.6, имеющей дополнительное предположение о том, что L_0 является идеалом алгебры Ли L.

Следствие 12.1. *Гиперповерхностная система не может быть управляемой на односвязной группе Ли.*

Доказательство. Если G односвязна, то ее подгруппа коразмерности один G_0 замкнута. Далее, G односвязна, поэтому G/G_0 также односвязна. Следовательно, $G/G_0 = \mathbb{R}$, и из теоремы 12.1 следует, что Γ неуправляема. □

Из вышеприведенных утверждений вытекает следующий *гиперповерхностный принцип* — общее необходимое условие управляемости на односвязных группах Ли.

Теорема 12.2. *Пусть* $\Gamma \subset L$ *— аффинная по управлению система* (12.1) *на связной односвязной группе Ли* G*. Пусть существует подалгебра коразмерности один* l *алгебры Ли* L*, содержащая* L_0*. Тогда* Γ *неуправляема.*

Доказательство. Система Γ может быть расширена до аффинной по управлению системы вида

$$\Gamma_1 = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i + \sum_{i=m+1}^{k} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, k \right\},$$

где $B_{m+1}, \dots, B_k$ дополняют $B_1, \dots, B_m$ до базиса подалгебры l. Согласно следствию 12.1, система Γ_1 неуправляема, поэтому Γ также неуправляема. □

Смысл этого утверждения в том, что если существует подалгебра коразмерности один $l \supset L_0$, то множество достижимости системы Γ находится "с одной стороны" от связной подгруппы G коразмерности один, соответствующей подалгебре l: в силу односвязности G, эта подгруппа коразмерности один разделяет G на две части.

12.1. **Примечания.** Общие гиперповерхностные нелинейные системы исследовал К. Хант [83, 84].

Результаты этого раздела получены Ю. Л. Сачковым [134].

Гиперповерхностный принцип, сформулированный в теореме 12.2, является необходимым условием управляемости на произвольной односвязной группе Ли. По теореме 11.1 Дж. Лоусона, если односвязная группа Ли имеет кокомпактный радикал, то этот принцип достаточен для управляемости. Было бы интересно расширить класс односвязных групп Ли с кокомпактным радикалом так, чтобы гиперповерхностный принцип оставался критерием управляемости.

13. Вполне разрешимые группы Ли

В этом параграфе будем предполагать, что Γ является аффинной по управлению системой вида (12.1), и рассмотрим условия управляемости для следующего подкласса класса разрешимых групп Ли.

Определение 13.1. Разрешимая алгебра Ли L называется *вполне разрешимой*, если все присоединенные операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, имеют вещественный спектр. Группа Ли называется *вполне разрешимой*, если она имеет вполне разрешимую алгебру Ли.

Треугольная группа $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ (см. пример 13.1 ниже) вполне разрешима, так же как и любая из ее подгрупп. Нильпотентные группы Ли вполне разрешимы, т.к. присоединенные операторы в нильпотентных алгебрах Ли имеют нулевой спектр. С другой стороны, группа движений плоскости $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ является разрешимой, но не вполне разрешимой (группа $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ и ее односвязная накрывающая $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ рассматриваются в § 15).

Вполне разрешимые алгебры Ли имеют много подалгебр коразмерности один (это имеет решающее значение для критерия управляемости на вполне разрешимых группах Ли).

Лемма 13.1. *Если L — вполне разрешимая алгебра Ли, то для любой подалгебры $l_1 \subset L$, $l_1 \neq L$, существует подалгебра $l_2 \subset L$ такая, что $l_1 \subset l_2$ и $\dim l_2 = \dim l_1 + 1$.*

Оказывается, что критерий управляемости аффинных по управлению систем на нильпотентных группах Ли (теорема 9.4) справедлив и для вполне разрешимых групп Ли.

Теорема 13.1. *Пусть G — связная односвязная вполне разрешимая группа Ли. Система (12.1) управляема на G тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.*

Доказательство. Достаточность. Если $L_0 = L$, то $\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \mathrm{LS}(L_0) = L$. По теореме 4.3, система Γ управляема.

Необходимость следует из теоремы 12.2 и леммы 13.1. □

Пример 13.1. Пусть $G = \mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ — группа всех верхнетреугольных $n \times n$–матриц с положительными диагональными элементами. Группа Ли $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ связна, односвязна и вполне разрешима. Ее алгебра Ли $L = \mathfrak{t}(n;\mathbb{R})$ состоит из всех верхнетреугольных $n\times n$–матриц. Производная подалгебра $L^{(1)}$ состоит из всех строго верхнетреугольных матриц, а $L/L^{(1)}$ есть n-мерная абелева алгебра Ли всех диагональных $n \times n$–матриц.

По теореме 13.1 аффинная по управлению система Γ управляема на $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $L_0 = L$.

По теореме 9.3 управляемость системы Γ на $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$ достигается с не менее чем $n = \dim L/L^{(1)}$ управлениями. Эта нижняя оценка точна. Например, система $\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^n u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$, где $B_i = E_{ii} + E_{i,i+1}$ при $i = 1, \dots, n-1$ и $B_n = E_{nn}$ управляема на $\mathrm{T}(n;\mathbb{R})$. Действительно, легко видеть, что $\mathrm{Lie}(B_1, \dots, B_n) = \mathfrak{t}(n;\mathbb{R})$.

Пример 13.2. Пусть $G = \mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ — евклидова группа движений двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Группа Ли $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ связна, но не односвязна. Она может быть представлена 3×3–матрицами вида

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & b_1 \\ c_{21} & c_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij}) \in \mathrm{SO}(2;\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

где C — матрица вращения и b — вектор трансляции. Соответствующая матричная алгебра Ли $L = \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ порождена как линейное пространство матрицами $A_1 = E_{13}$, $A_2 = E_{23}$, и $A_3 = E_{21} - E_{12}$. Имеем $L^{(1)} = \mathrm{span}(A_1, A_2)$ и $L^{(2)} = \{0\}$; поэтому L разрешима.

Рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = \left\{ A_1 + uA_3 \mid u \in \mathbb{R} \right\}$. Покажем с помощью техники лиевского насыщения, что система Γ управляема на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$.

Имеем $A_1, \pm A_3 \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому $\exp(s \operatorname{ad} A_3) A_1 \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Но $\exp(s \operatorname{ad} A_3) A_1 = (\cos s) A_1 + (\sin s) A_2$. Следовательно, $\mathrm{span}(A_1, A_2) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$; поэтому $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$. Итак, система Γ управляема на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$.

Очевидно, Γ может также рассматриваться как правоинвариантная система на односвязной накрывающей $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Вышеприведенное доказательство управляемости системы Γ на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ чисто алгебраическое, т.е. оно не использует никаких глобальных геометрических свойств группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Поэтому Γ управляема и на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$.

Спектр оператора $\operatorname{ad} A_3$ состоит из $\pm i$ и 0. Следовательно, этот пример показывает, что условие полной разрешимости алгебры L, т.е. вещественности спектра присоединенных операторов в теореме 13.1 существенно. Подробные условия управляемости правоинвариантных систем на группе $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ и ее односвязной накрывающей $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ приведены в примере 15.2.

13.1. **Примечания.** Результаты этого раздела были получены Ю. Л. Сачковым [134].

Вполне разрешимые алгебры Ли (группы Ли) называются также *треугольными над* $\mathbb{R}$ или алгебрами (соответственно группами), *типа* (R) (см., например, обзор Э. Б. Винберга, В. В. Горбацевича, и А. Л. Онищика [6]).

13.1.1. *Алгебры Ли, сложные для управления.* Для любой группы Ли G и любой аффинной по управлению системы

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

на G группе управляемость однородной части

$$\Gamma_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

достаточна для управляемости системы Γ на G. Назовем алгебру Ли L *сложной для управления*, если любая аффинная по управлению система $\Gamma \subset L$ и ее однородная часть Γ_0 одновременно управляемы или неуправляемы (на связной односвязной группе Ли L, соответствующей G). В алгебре Ли L сложной для управления вектор сноса A в аффинной по управлению системе $\Gamma \subset L$ не помогает управлению, что не имеет места в произвольных алгебрах Ли.

Имеется расширяющаяся цепочка классов алгебр Ли сложных для управления:

$$\text{абелевы} \subset \text{нильпотентные} \subset \text{вполне разрешимые}. \tag{13.1}$$

Абелев случай рассмотрен в следствии 9.1, нильпотентный — в теореме 9.4, а вполне разрешимый — в теореме 13.1.

С другой стороны, алгебра Ли группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ движений плоскости разрешима, не вполне разрешима и не является сложной для управления (см. пример 15.2).

Согласно гиперповерхностному принципу (теорема 12.2), все алгебры Ли, удовлетворяющие следующему свойству:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{любая подалгебра } l \subset L,\ l \neq L, \text{ содержится} \\ \text{в подалгебре коразмерности один алгебры } L \end{array} \right\}, \tag{13.2}$$

являются сложными для управления. Автору неизвестно, является ли это включение строгим. По лемме 13.1, вполне разрешимые алгебры Ли удовлетворяют свойству (13.2). Естественный вопрос заключается в том, существуют ли алгебры Ли, сложные для управления и не содержащиеся в цепочке (13.1)? Если да, то можно ли эту цепочку продолжить до какого-нибудь разумного класса алгебр Ли? Для ответа на этот вопрос может оказаться важной теория подалгебр коразмерности один в алгебрах Ли, созданная К. Х. Хофманном [78, 79, 81].

13.1.2. *Подалгебры коразмерности один и два.* Решение задачи управляемости для вполне разрешимых алгебр Ли (см. § 13) основано на следующем факте: любая собственная подалгебра вещественной *вполне разрешимой* алгебры Ли содержится в подалгебре коразмерности один. С другой стороны, любая собственная подалгебра вещественной *разрешимой* алгебры Ли содержится в некоторой подалгебре коразмерности один или два.

Можно поэтому предложить следующий подход к исследованию управляемости на разрешимых группах Ли. Спроецируем систему вдоль связной подгруппы, соответствующей указанной подалгебре коразмерности один или два.

Затем: 1) если эта группа замкнута и нормальна, то получаем правоинвариантную систему на одно- или двумерной группе Ли (такие системы просты для исследования); 2) если эта подгруппа замкнута, то получаем нелинейную систему на одно- или двумерном гладком многообразии (такие системы можно исследовать методами нелинейной теории управляемости); 3) наконец, если эта подгруппа незамкнута, то можно пробовать применять теорию управляемых систем на слоениях.

14. Группы Ли, отличные от своих производных подгрупп

Алгебры Ли L, удовлетворяющие условию $L \neq L^{(1)}$, образуют широкий класс, содержащий класс разрешимых алгебры Ли, но не совпадающий с ним: например, $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ не является разрешимой и имеет производную подалгебру $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$. С другой стороны, если алгебра Ли L полупроста, то $L = L^{(1)}$. Обратное неверно: алгебра Ли инфинитезимальных движений трехмерного пространства $\mathfrak{e}(2;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \leftthreetimes \mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ не является полупростой, хотя и совпадает со своей производной подалгеброй.

В этом параграфе мы рассмотрим условия управляемости для систем со скалярным управлением

$$\Gamma = \{\, A + uB \mid u \in \mathbb{R} \,\} = A + \mathbb{R}B \subset L \tag{14.1}$$

на группе Ли G, не совпадающей со своей производной подгруппой $G^{(1)}$. Следовательно, будем предполагать, что $L \neq L^{(1)}$.

14.1. **Обозначения и определения.** Сначала введем обозначения, связанные с собственными значениями и собственными пространствами присоединенного оператора $\operatorname{ad} B$ в алгебре Ли L.

Производная подалгебра и вторая производная подалгебра:

$$L^{(1)} = [L, L], \qquad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}];$$

комплексификация L и $L^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$L_c = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad L_c^{(i)} = L^{(i)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C};$$

присоединенные представления и операторы:

$$\operatorname{ad} : L \to \operatorname{End}(L), \qquad (\operatorname{ad} B)X = [B, X] \quad \forall X \in L,$$
$$\operatorname{ad}_c : L_c \to \operatorname{End}(L_c), \qquad (\operatorname{ad}_c B)X = [B, X] \quad \forall X \in L_c;$$

спектр операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$\operatorname{Sp}^{(i)} = \left\{\, a \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}\left(\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(i)}} - a \operatorname{Id}\right) \neq \{0\} \,\right\};$$

вещественный и комплексный спектры операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$\operatorname{Sp}_r^{(i)} = \operatorname{Sp}^{(i)} \cap \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Sp}_c^{(i)} = \operatorname{Sp}^{(i)} \setminus \mathbb{R};$$

комплексные собственные пространства $\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}}$:

$$L_c(a) = \operatorname{Ker}\left(\operatorname{ad}_c B|_{L_c^{(1)}} - a \operatorname{Id}\right);$$

вещественные инвариантные подпространства оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$, одномерные при вещественных $a \in \operatorname{Sp}_r^{(1)}$ и двумерные при комплексных $a \in \operatorname{Sp}_c^{(1)}$:

$$L(a) = (L_c(a) + L_c(\overline{a})) \cap L;$$

комплексные корневые пространства операторов $\mathrm{ad}_c B|_{L_c^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$L_c^{(i)}(a) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathrm{Ker}\left(\mathrm{ad}_c B|_{L_c^{(i)}} - a\,\mathrm{Id}\right)^N;$$

вещественные инвариантные подпространства операторов $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$, вещественные аналоги комплексных корневых подпространств:

$$L^{(i)}(a) = \left(L_c^{(i)}(a) + L_c^{(i)}(\overline{a})\right) \bigcap L;$$

компоненты пространств $L^{(i)}$, соответствующие вещественным собственным значениям операторов $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$:

$$L_r^{(i)} = \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(i)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}_r^{(i)} \right\}.$$

Подалгебры $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ являются идеалами алгебры L, поэтому они $(\mathrm{ad}\, B)$-инвариантны, и ограничения $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ и $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(2)}}$ определены.

В следующей лемме приведены простые утверждения о разложении подалгебр $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ в суммы инвариантных подпространств присоединенного оператора $\mathrm{ad}\, B$.

Лемма 14.1. (1) $L^{(i)} = \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(i)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(i)},\ \mathrm{Im}\, a \geq 0 \right\}$, $i = 1, 2$,
(2) $\mathrm{Sp}^{(2)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)}$, $\mathrm{Sp}_r^{(2)} \subset \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,
(3) $L^{(2)}(a) \subset L^{(1)}(a)$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(2)}$,
(4) $L_r^{(2)} \subset L_r^{(1)}$,
(5) $\mathrm{Sp}^{(2)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$.

Доказательство. Доказательство проводится с помощью стандартных рассуждений из линейной алгебры. Кроме этого, в пункте (5) используется тождество Якоби. □

Рассмотрим фактор оператор

$$\widetilde{\mathrm{ad}}\, B \ :\ L^{(1)}/L^{(2)} \to L^{(1)}/L^{(2)},$$

определенный следующим образом:

$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}\, B\right)\left(X + L^{(2)}\right) = (\mathrm{ad}\, B)X + L^{(2)} \quad \forall X \in L^{(1)}.$$

Аналогично при $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ определяем фактор оператор в факторе корневого пространства:

$$\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a) \ :\ L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a) \to L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a),$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a)\right)\left(X + L^{(2)}(a)\right) = (\mathrm{ad}\, B)X + L^{(2)}(a) \quad \forall X \in L^{(1)}(a),$$

и его комплексификацию:

$$\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a) \ :\ L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a) \to L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a),$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a)\right)\left(X + L_c^{(2)}(a)\right) = (\mathrm{ad}_c\, B)\, X + L_c^{(2)}(a) \quad \forall X \in L_c^{(1)}(a).$$

Определение 14.1. Пусть $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Будем обозначать через $\mathrm{j}(a)$ геометрическую кратность собственного значения a оператора $\widetilde{\mathrm{ad}_c}\, B(a)$ в линейном пространстве $L_c^{(1)}(a)/L_c^{(2)}(a)$.

Замечания.

(a) Для $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ число $\mathrm{j}(a)$ равно количеству жордановых блоков оператора $\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a)$ в пространстве $L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)$.

(b) Если собственное значение $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ простое, то $\mathrm{j}(a) = 0$ при $a \in \mathrm{Sp}^{(2)}$ и $\mathrm{j}(a) = 1$ при $a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)}$.

Предположим, что $L = L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B$ для некоторого B из L (это предположение оправдано теоремой 14.1 ниже). Тогда по лемме 14.1

$$L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)} = \mathbb{R}B \oplus \sum\nolimits^{\oplus} \left\{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, \mathrm{Im}\, a \geq 0 \right\}, \tag{14.2}$$

то есть любой элемент $X \in L$ может быть единственным образом представлен в следующем виде:

$$X = X_B + \sum \left\{ X(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, \mathrm{Im}\, a \geq 0 \right\}, \quad X_B \in \mathbb{R}B,\ X(a) \in L^{(1)}(a).$$

Рассмотрим такое разложение для неуправляемого векторного поля A системы Γ:

$$A = A_B + \sum \left\{ A(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\, \mathrm{Im}\, a \geq 0 \right\}.$$

Будем обозначать через $\widetilde{A}(a)$ каноническую проекцию вектора $A(a) \in L^{(1)}(a)$ на фактор пространство $L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)$.

Определение 14.2. Пусть $L = L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B$, $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$, и $\mathrm{j}(a) = 1$. Будем говорить, что вектор $A \in L$ *имеет нулевую a-верхушку*, если

$$\widetilde{A}(a) \in \left(\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a) - a\, \mathrm{Id}\right) \left(L^{(1)}(a)/L^{(2)}(a)\right).$$

В противном случае будем говорить, что A *имеет нулевую a-верхушку.* В этих случаях будем использовать соответствующие обозначения: $\mathrm{top}\,(A, a) = 0$ или $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$.

Замечание. Геометрически, если вектор A имеет ненулевую a-верхушку, то вектор $\widetilde{A}(a)$ имеет ненулевую составляющую, соответствующую старшему присоединенному вектору в (единственной) жордановой цепочке оператора $\widetilde{\mathrm{ad}}\, B(a)$. Из-за неединственности жорданового базиса эта компонента не определена однозначно, но ее свойство равняться нулю не зависит от базиса.

Определение 14.3. Пара комплексных чисел (α, β), $\mathrm{Re}\,\alpha \leq \mathrm{Re}\,\beta$, называется *$N$-парой собственных значений оператора* $\mathrm{ad}\, B$, если выполняются следующие условия:

(1) $\alpha, \beta \in \mathrm{Sp}^{(1)}$,

(2) $L^{(2)}(\alpha) \not\subset \sum \left\{ [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \ \mathrm{Re}\, a,\ \mathrm{Re}\, b \notin [\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta] \right\}$,

(3) $L^{(2)}(\beta) \not\subset \sum \left\{ [L^{(1)}(a), L^{(1)}(b)] \mid a, b \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \ \mathrm{Re}\, a,\ \mathrm{Re}\, b \notin [\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta] \right\}$.

Замечание. Иными словами, для порождения обоих корневых пространств $L^{(2)}(\alpha)$ и $L^{(2)}(\beta)$ для N-пары (α, β) требуется по меньшей мере одно корневое пространство $L^{(1)}(\gamma)$ с $\mathrm{Re}\,\gamma \in [\alpha, \beta]$. В теореме 14.2 ниже N-пары являются сильнейшим препятствием к управляемости при выполнении необходимых условий теоремы 14.1. В некоторых случаях общего положения свойство отсутствия вещественных N-пар может быть проверено с помощью леммы 14.5.

14.2. **Необходимые условия управляемости.**

14.2.1. *Формулировки результатов.* Управляемость на односвязных группах Ли G при $G \neq G^{(1)}$ оказывается очень сильным свойством: оно налагает существенные ограничения как на группу G, так и на систему Γ.

Теорема 14.1. *Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли L, удовлетворяющей условию $L \neq L^{(1)}$. Если правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема, то*:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,
(2) $B \notin L^{(1)}$,
(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,
(4) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,
(5) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$,
(6) $\mathrm{j}(a) \leq 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$,
(7) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ *таких, что* $\mathrm{j}(a) = 1$.

Обозначения $\mathrm{j}(a)$ и $\mathrm{top}\,(A, a)$, используемые в теореме 14.1, введены в определениях 14.1 и 14.2.

Замечания.

(a) Первое условие характеризует пространство состояний G, а не систему Γ. Оно означает, что никакая система со скалярным управлением $\Gamma = \{ A + uB \}$ не может быть управляемой на односвязной группе Ли G с $\dim G^{(1)} < \dim G - 1$. То есть для управляемости на такой группе необходимо увеличить количество управлений. Это согласуется с общей оценкой снизу $m > \dim G - \dim G^{(1)}$ для количества векторных полей при управлениях, необходимого для управляемости системы с векторным управлением $\Gamma = \{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \}$ на односвязной группе Ли G (см. теорему 9.3).
(b) Условия (3)–(7) нетривиальны только для алгебр Ли L с $L^{(2)} \neq L^{(1)}$ (в частности, для разрешимых некоммутативных L). Если $L^{(2)} = L^{(1)}$, то эти условия очевидно удовлетворяются.
(c) Третье условие означает, что $\mathrm{j}(a) = 0$ для всех $a \in \mathrm{Sp}_r^{(1)}$, то есть условие (6) нетривиально только при $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$.
(d) По той же причине, в условии (7) включение $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ можно заменить на $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$. Заметим, что если $\mathrm{j}(a) = 0$, то по формальному определению 14.2 вектор A имеет нулевую a-верхушку.
(e) Четвертое и пятое условия следуют из третьего, но проще для проверки. Простое (и сильное) "арифметическое" необходимое условие управляемости (5) может быть проверено по картине расположения собственных значений оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$.
(f) Для разрешимых L при условиях (1), (2) спектр $\mathrm{Sp}^{(1)} = \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}})$ с точностью до гомотетий один и тот же для всех $B \notin L^{(1)}$. Тогда условия (4), (5) зависят от L, а не от B.
(g) В случае простого спектра оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ необходимые условия управляемости принимают соответственно более простую форму:

Следствие 14.1. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, а ее алгебра Ли удовлетворяет условию $L \neq L^{(1)}$. Предположим, что спектр $\mathrm{Sp}^{(1)}$ прост. Если правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема, то*:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,
(2) $B \notin L^{(1)}$,
(3) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,
(4) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} \subset \mathrm{Sp}^{(1)} + \mathrm{Sp}^{(1)}$,
(5) $A(a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}^{(1)} \setminus \mathrm{Sp}^{(2)}$.

14.2.2. *Набросок доказательства теоремы* 14.1. Основными средствами при доказательстве необходимых условий управляемости теоремы 14.1 служат ранговое условие управляемости (теорема 2.3) и гиперповерхностный принцип (теорема 12.2).

Сначала доказываются вспомогательные предложения.

Лемма 14.2. *Пусть L — алгебра Ли такая, что $L \neq L^{(1)}$, и пусть $B \in L$. Предположим, что*:
(1) $\dim L^{(1)} < \dim L - 1$ *или*
(2) $B \in L^{(1)}$ *или*
(3) $L^{(1)} \oplus \mathbb{R}B = L$ *и* $L_r^{(2)} \neq L_r^{(1)}$.
Тогда существует подалгебра коразмерности один алгебры L, содержащая B.

Лемма 14.3. *Пусть L — алгебра Ли и $A, B \in L$. Пусть $L = \mathbb{R}B \oplus L^{(1)}$. Предположим, что существует собственное значение $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$ такое, что* :
(1) $\mathrm{j}(a) > 1$ *или*
(2) $\mathrm{j}(a) = 1$ *и* $\mathrm{top}\,(A, a) = 0$.
Тогда $\mathrm{Lie}(A, B) \neq L$.

Теорема 14.1 доказывается следующим образом. Если одно из условий (1)–(5) нарушается, то по лемме 14.2 и теореме 12.2 множество достижимости $\mathbb{A}$ содержится в замкнутой полугруппе группы Ли G, ограниченной подгруппой коразмерности один в G. А если не выполняется одно из условий (6), (7), то по лемме 14.3 и теореме 2.3 множество достижимости $\mathbb{A}$ лежит в собственной связной подгруппе группы G с алгеброй Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$.

14.3. **Достаточные условия управляемости.**

14.3.1. *Формулировки результатов.* При выполнении необходимых условий теоремы 14.1 существуют широкие достаточные условия управляемости. Отметим, что теперь условие односвязности может быть исключено. Так что нижеприводимые достаточные условия имеют полностью алгебраический характер, т.е. локальны; это отличает их от достаточных условий управляемости для полупростых групп Ли G (см. § 8), включающих глобальное условие (конечность центра группы G).

Теорема 14.2. *Пусть $\Gamma \subset L$ — правоинвариантная система на связной группе Ли G. Предположим, что выполняются следующие условия*:
(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,
(2) $B \notin L^{(1)}$,
(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,
(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,
(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,
(6) *оператор* $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ *не имеет N-пар вещественных собственных значений.*

Тогда система Γ *управляема на группе Ли* G.

Обозначение $\mathrm{top}\,(A, a)$ и понятие N-пары, используемые в теореме 14.2, введены в определениях 14.2 и 14.3.

Замечания.

(a) Условия (1)–(3) необходимы для управляемости в случае односвязных групп $G \neq G^{(1)}$ (см. теорему 14.1).

(b) Условия (4) и (5) близки к необходимым условиям управляемости (6) и (7) теоремы 14.1 соответственно. Заметим, что четвертое условие означает, что все комплексные собственные значения оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ геометрически просты.

(c) Условия (2) и (5) открыты, т.е. сохраняются при малых возмущениях A и B.

(d) Наиболее ограничительным из условий (1)–(6) является последнее. Можно показать, что наименьшая размерность подалгебры $L^{(1)}$, в которой это условие выполняется и сохраняется при малых возмущениях спектра оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ для разрешимых L, равна 6. Это может быть использовано для получения классификации управляемых систем Γ на маломерных односвязных разрешимых группах Ли G (см. § 16).

(e) Технически сложное условие (6) может быть заменено более простым и более ограничительным условием, и тогда достаточные условия записываются как в следствии 14.2 ниже.

(f) При дополнительном предположении о простоте спектра $\mathrm{Sp}^{(1)}$ достаточные условия еще более упрощаются и представляются в следствии 14.3 ниже.

Следствие 14.2. *Пусть следующие условия выполняются для системы* $\Gamma \subset L$ *на группе Ли* G:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) $L_r^{(2)} = L_r^{(1)}$,

(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(6) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Тогда система Γ *управляема на* G.

Следствие 14.3. *Пусть следующие условия выполняются для системы* $\Gamma \subset L$ *на группе Ли* G:

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,

(2) $B \notin L^{(1)}$,

(3) *спектр* $\mathrm{Sp}^{(1)}$ *прост*,

(4) $\mathrm{Sp}_r^{(2)} = \mathrm{Sp}_r^{(1)}$,

(5) $A(a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,

(6) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *или* $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Тогда система Γ *управляема на* G.

14.3.2. *Набросок доказательства теоремы* 14.2. Эта теорема доказывается с помощью техники лиевского насыщения (см. § 4): показывается, что возрастающая цепочка нижних оценок касательного конуса $\mathrm{LS}(\Gamma)$ к замыканию множества достижимости $\mathbb{A}$ в единице e стабилизируется на всей алгебре Ли L.

Центральную роль в доказательстве играет следующее утверждение.

Лемма 14.4. *Пусть* $C \in \mathrm{LS}(\Gamma) \cap L^{(1)}$. *Предположим, что для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ *выполняются следующие условия*:

(1) $\dim L_c(a) = 1$ *и*

(2) $\mathrm{top}\,(C, a) \neq 0$ *или* $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Пусть, вдобавок, для числа

$$r = \max\{\, \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ C(a) \neq 0 \,\}$$
$$(\text{или } r = \min\{\, \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ C(a) \neq 0 \,\})$$

имеем $r \notin \mathrm{Sp}^{(1)}$ *или* $C(r) = 0$. *Тогда*

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \supset \sum \left\{ L^{(1)}(a) \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ \mathrm{Re}\, a = r,\ a \neq r \right\}.$$

Теперь идея доказательства теоремы 14.2 может быть представлена следующим образом. В силу (14.2), алгебра Ли L представляется в виде прямой суммы прямой $\mathbb{R}B$ и корневых пространств $L^{(1)}(a)$, $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Далее показываем, что лиевское насыщение $\mathrm{LS}(\Gamma)$ совпадает с L. Во первых, легко видеть, что $\mathbb{R}B \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Затем доказываем от противного, что $L^{(1)}(a) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $a \in \mathrm{Sp}^{(1)}$. Действительно, предположим, что существуют числа

$$n = \min \left\{ \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \right\},$$
$$m = \max \left\{ \mathrm{Re}\, a \mid a \in \mathrm{Sp}^{(1)},\ L^{(1)}(a) \not\subset \mathrm{LS}(\Gamma) \right\}$$

и рассмотрим отрезок $[n, m] \subset \mathbb{R}$. Тогда из леммы 14.4 следует, что n, m является N-парой вещественных собственных значений оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$, что противоречит условию (6) теоремы 14.2. Теорема доказана.

Следствия 14.2 и 14.3 вытекают из теоремы 14.2 и нижеследующего утверждения, дающего простые достаточные условия несуществования вещественных N-пар собственных значений.

Лемма 14.5. *Пусть* $B \notin L^{(1)}$ *и* $L_r^{(1)} = L_r^{(2)}$. *Тогда любое из нижеследующих условий достаточно для того, чтобы оператор* $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}}$ *не имел вещественных N-пар собственных значений*:

(1) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$ *или*

(2) $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *или*

(3) $\mathrm{Sp}^{(1)} \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Условия управляемости теорем 14.1 и 14.2 для групп Ли $G \neq G^{(1)}$ дают полное описание управляемости для нескольких классов групп Ли: метабелевых, некоторых подгрупп группы аффинных отображений n-мерного пространства, и маломерных односвязных групп Ли. Эти результаты представлены в §§ 15 и 16.

14.4. **Примечания.** Результаты этого параграфа получены Ю. Л. Сачковым [136].

Результаты К. Х. Хофманна [80] о компактных элементах в разрешимых алгебрах Ли могут быть полезны для понимания управляемости на разрешимых группах Ли без предположения односвязности, существенного для необходимых условий управляемости в этом параграфе.

15. Метабелевы группы Ли

Алгебры Ли L, имеющие производный ряд длины 2:

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} = \{0\},$$

называются *метабелевыми*. Группа Ли с метабелевой алгеброй Ли также называется *метабелевой*.

Метабелева алгебра Ли, очевидно, разрешима. Поэтому результаты предыдущего параграфа дают условия управляемости для метабелевых групп Ли.

Теорема 15.1. *Пусть G — метабелева связная группа Ли. Тогда следующие условия достаточны для управляемости системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ на G:*

(1) $\dim L^{(1)} = \dim L - 1$,
(2) $B \notin L^{(1)}$,
(3) $\mathrm{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$,
(4) $\dim L_c(a) = 1$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$,
(5) $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$ *для всех* $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$.

Если группа G односвязна, то условия (1)–(5) также необходимы для управляемости системы Γ на G.

Обозначение $\mathrm{top}\,(A, a)$ введено в определении 14.2.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 14.2.

Для доказательства необходимости для односвязной группы G предположим, что Γ управляема. Тогда (1) и (2) следуют из (1) и (2) теоремы 14.1.

Условие (3) следует из теоремы 14.1 и метабелевости группы G:

$$L_r^{(1)} = L_r^{(2)} \subset L^{(2)} = \{0\}.$$

Условие (4). Для любых $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ имеем $L^{(2)}(a) = \{0\}$, поэтому $\mathrm{j}(a)$ равно геометрической кратности собственного значения a оператора $\mathrm{ad}\, B|_{L^{(1)}(a)}$, т.е. $\dim L_c(a)$. Согласно (6) теоремы 14.1, имеем $\mathrm{j}(a) = 1$, поэтому $\dim L_c(a) = 1$.

Условие (5). Для любых $a \in \mathrm{Sp}_c^{(1)}$ имеем $\mathrm{j}(a) = 1$, тогда согласно (7) теоремы 14.1 имеем $\mathrm{top}\,(A, a) \neq 0$. $\square$

Пример 15.1. Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство и $l \subset \mathfrak{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли. Рассмотрим их полупрямую сумму $L = V \rtimes l$. Она является подалгеброй алгебры Ли группы аффинных преобразований пространства V, так как $L \subset V \rtimes \mathfrak{gl}(V)$. Если l абелева, то L метабелева:

$$L^{(1)} = lV \rtimes \{0\}, \quad L^{(2)} = \{0\}.$$

В следующем пункте подробно рассматривается частный случай, когда l одномерна.

15.1. **Полупрямые произведения.** Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство, $\dim V = n$, и M — ненулевой линейный оператор в V. Рассмотрим метабелеву алгебру Ли $L(M)$, являющуюся полупрямой суммой абелевой алгебры Ли V и одномерной алгебры $\mathbb{R}M$. Эта алгебра может быть представлена $(n+1)\times(n+1)$–матрицами:

$$L(M) = \left\{ \begin{pmatrix} Mt & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathfrak{gl}(n+1;\mathbb{R}). \tag{15.1}$$

Обозначим через $G(M)$ связную подгруппу Ли группы $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$, соответствующую алгебре $L(M)$. Она является полупрямым произведением векторной группы Ли $\mathbb{R}^n$ с одномерной группой $G_1 = \{\exp(Mt) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Элементами группы $G(M)$ являются матрицы

$$\begin{pmatrix} \exp(Mt) & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому группу $G(M)$ можно рассматривать как подгруппу группы $\mathrm{Aff}(n;\mathbb{R})$ аффинных преобразований n-мерного пространства, порожденную однопараметрической группой автоморфизмов G_1 и всеми трансляциями $p \in \mathbb{R}^n$. Группа $G(M)$ неодносвязна тогда и только тогда, когда однопараметрическая подгруппа G_1 периодична, что очевидно имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{ll} \text{матрица } M \text{ диагонализируема,} & \\ \mathrm{Sp}(M) = ir\cdot(k_1,\dots,k_n) & \text{для некоторых} \\ & r \in \mathbb{R},\ (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n. \end{array}\right\} \tag{15.2}$$

Замечание. Если условия (15.2) выполняются, то по теореме 7.1 (о полупрямых произведениях линейных пространств и компактных групп Ли) система $\Gamma \subset L(M)$ управляема на $G(M)$ тогда и только тогда, когда она имеет полный ранг: $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L(M)$.

С другой стороны, из критерия управляемости для односвязных метабелевых групп Ли (теорема 15.1) вытекают следующие условия управляемости для односвязной накрывающей $\tilde{G}(M)$ и для самой группы $G(M)$.

Теорема 15.2. *Пусть M — ненулевая $n \times n$–матрица, $G = \tilde{G}(M)$, $L = L(M)$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема на G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) *матрица M имеет чисто комплексный спектр,*
(2) *$B \notin L^{(1)}$,*
(3) $\mathrm{span}(B, A, (\mathrm{ad}\,B)A, \dots, (\mathrm{ad}\,B)^{n-1}A) = L.$

Для группы $G(M)$ условия (1)–(3) достаточны для управляемости. Если условия (15.2) нарушаются, то условия (1)–(3) эквивалентны управляемости на $G(M)$.

Пример 15.2. Пусть $G = \mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ — евклидова группа движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Ее алгебра Ли $L = \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ порождена как линейное пространство матрицами $A_1 = E_{13}$, $A_2 = E_{23}$, $A_3 = E_{21} - E_{12}$ и имеет форму (15.1):

$$L = L(M), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она разрешима (даже метабелева):

$$L^{(1)} = \mathrm{span}(A_1, A_2) \supset L^{(2)} = \{0\},$$

но не вполне разрешима:
$$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A_3) = \{\pm i,\ 0\}.$$
Группа Ли $\mathrm{E}(2;\mathbb{R}) = G(M)$ связна, но неодносвязна, это видно и из условий (15.2).

Рассмотрим систему $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ — односвязной накрывающей группы $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$. Полная характеризация управляемости системы Γ на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ выводится из теоремы 15.2.

Теорема 15.3. *Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ управляема на $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда векторы A, B линейно независимы и $B \notin \operatorname{span}(A_1, A_2)$.*

Можно сравнить условия управляемости для $\tilde{\mathrm{E}}(2;\mathbb{R})$ со следующими условиями для $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$, полученными из теоремы 7.1.

Теорема 15.4. *Система $\Gamma = A+\mathbb{R}B \subset \mathfrak{e}(2;\mathbb{R})$ управляема на $\mathrm{E}(2;\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда векторы A, B линейно независимы и $\{A, B\} \not\subset \operatorname{span}(A_1, A_2)$.*

15.2. **Аффинные системы.** Возьмем произвольные матрицу $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ и вектор $b \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим аффинную систему
$$\dot{x} = uAx + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{Σ}$$
Согласно п. 3.3, эта система подчинена линейному действию группы $G(A) \subset \operatorname{Aff}(n;\mathbb{R})$, описанной в предыдущем пункте.

Это наблюдение в сочетании с условиями управляемости правоинвариантных систем на группах Ли вида $G(A)$ приводит к полным условиям управляемости для аффинных систем Σ.

Теорема 15.5. *Система Σ глобально управляема на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(1) *матрица A имеет чисто комплексный спектр и*
(2) $\operatorname{span}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = \overline{A} + \mathbb{R}\overline{B} \subset L(A)$ на группе Ли $G(A)$, где матрицы $\overline{A}, \overline{B} \in L(A)$ имеют вид
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Аффинная система Σ индуцирована правоинвариантной системой Γ. С другой стороны, группа аффинных преобразований $G(A) \subset \operatorname{Aff}(n;\mathbb{R})$ транзитивно действует на $\mathbb{R}^n$, т.к. содержит все трансляции. По следствию 3.3, если правоинвариантная система Γ управляема на $G(A)$, то аффинная система Σ управляема на $\mathbb{R}^n$. По теореме 15.2, система Γ управляема на $G(A)$, поэтому достаточность доказана.

Необходимость. Если одно из условий (1), (2) теоремы 15.5 нарушается, то система Σ имеет инвариантные подпространства коразмерности 1 или 2 в $\mathbb{R}^n$. $\square$

15.3. **Примечания.** Результаты этого параграфа получены Ю. Л. Сачковым [136].

16. Односвязные разрешимые группы Ли малой размерности

Возьмем алгебру Ли L и рассмотрим "наибольшую" связную группу Ли G с алгеброй Ли L — односвязную группу Ли. Все остальные связные группы Ли с алгеброй Ли L "меньше" чем G в том смысле, что они являются фактор-группами G/C, где C — некоторая дискретная подгруппа центра группы G. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ может поэтому рассматриваться на любой из этих групп, и односвязная группа G наиболее трудна из всех этих групп для управления. Поэтому если дана правоинвариантная система Γ на группе Ли (или однородном пространстве группы Ли) H, то естественно сначала изучить ее управляемость на односвязной накрывающей $\widetilde{H}$ группы H. Если Γ управляема на $\widetilde{H}$, то она очевидно управляема и на H (и всех ее однородных пространствах); в противном случае необходимо использовать специфические геометрические свойства группы H (например, существование периодических однопараметрических подгрупп) для проверки управляемости системы Γ на H. Очевидно и замечательно, что условия управляемости на односвязной группе Ли G должны иметь алгебраическую форму: они полностью определяются алгеброй Ли L и ее подмножеством Γ (см., например, теоремы 9.4, 13.1, 14.1, 15.1, 15.2).

Это обосновывает следующее определение.

Определение 16.1. Система $\Gamma \subset L$ называется *управляемой*, если она управляема на (единственной) связной односвязной группе Ли с алгеброй Ли L.

А следующее определение осмысленно, по крайней мере, для разрешимых алгебр Ли малой размерности.

Определение 16.2. Алгебра Ли L называется *управляемой*, если существуют $A, B \in L$ такие, что система $\Gamma = A + \mathbb{R}B$ управляема.

Действительно, оказывается, что из условий управляемости на разрешимых группах Ли (§§ 11 и 14) следует, что для разрешимых алгебр Ли L малой размерности:

- существование управляемой системы со скалярным управлением $\Gamma \subset L$, т.е. управляемость алгебры L, является сильным ограничением на L;
- если L управляема, то почти все пары $(A, B) \in L \times L$ порождают управляемые системы $\Gamma = A + \mathbb{R}B$;
- управляемость системы $\Gamma \subset L$ зависит в основном от L, а не от Γ.

Более того, из этих результатов следует полное описание управляемости в разрешимых алгебрах Ли малой размерности; это описание представлено в следующих пунктах.

До размерности 6 включительно описаны все разрешимые алгебры Ли L, являющиеся управляемыми, и даны критерии управляемости для систем со скалярным управлением $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ (единственный зазор в этой картине представляет класс $L_{6,IV}$ шестимерных алгебр Ли, изученный не полностью).

Общая картина управляемых разрешимых алгебры Ли "с высоты птичьего полета" такова:

$\dim L = 1$**:** (единственная) алгебра Ли управляема;
$\dim L = 2$**:** обе алгебры Ли неуправляемы;
$\dim L = 3$**:** имеется одно семейство управляемых алгебр Ли: $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$;
$\dim L = 4$**:** имеется одно семейство управляемых алгебр Ли: $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$;

$\dim L = 5$**:** имеется два семейства управляемых алгебр Ли:

1. $L_{5,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$,
2. $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$;

$\dim L = 6$**:** имеется пять семейств управляемых алгебр Ли:

1. $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$,
2. $L_{6,II}(\lambda,\mu,k)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
3. $L_{6,III}(\lambda,k,l)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l \in \mathbb{R}$, $k^2+l^2 \neq 0$,
4. $L_{6,IV}(\lambda,k,l)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l \in \mathbb{R}$, $k^2+l^2 \neq 0$,
5. $L_{6,V}(\lambda,k,l)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l \in \mathbb{R}$, $k^2+l^2 \neq 0$,

и один исключительный класс $L_{6,IV}(bi)$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, содержащий как управляемые, так и неуправляемые алгебры Ли.

Каждая управляемая алгебра Ли L изображена схемой на комплексной плоскости, содержащей собственные значения присоединенного оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$, $B \in L\setminus L^{(1)}$, и стрелки между собственными значениями, описывающие скобки Ли между собственными векторами оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ (эти схемы приведены в самом конце данного параграфа). Заметим, что для разрешимых алгебр Ли L с производной подалгеброй $L^{(1)}$ коразмерности один (а только такие разрешимые алгебры Ли могут быть управляемыми, см, условие (1) теоремы 14.1) спектры всех присоединенных операторов $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$, $B \in L\setminus L^{(1)}$ гомотетичны относительно начала координат $0 \in \mathbb{C}$, и классы эквивалентности спектров $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$, $B \in L\setminus L^{(1)}$ при гомотетиях определяются не элементами $B \in L\setminus L^{(1)}$, а самой алгеброй Ли L (с точностью до изоморфизма алгебр Ли).

Теперь представим классификацию управляемых систем в разрешимых алгебрах Ли малой размерности. Эти результаты получены с помощью условий управляемости §§ 11, 12 и 14. Приведены наброски доказательств вплоть до первой нетривиальной размерности 3: для размерностей 4–6 идея доказательства та же, что и в трехмерном случае, но рассуждения становятся намного длиннее.

16.1. **Одномерные группы Ли.** Единственная одномерная алгебра Ли абелева и изоморфна $\mathbb{R}$.

Теорема 16.1. *Одномерная алгебра Ли $\mathbb{R}$ управляема.*
Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathbb{R}$ управляема тогда и только тогда, когда $B \neq 0$.

Доказательство. См. следствие 9.1. □

16.2. **Двумерные группы Ли.** Имеются две неизоморфные двумерные алгебры Ли: абелева $\mathbb{R}^2$ и разрешимая неабелева $S_2 = \operatorname{span}(x,y)$, $[x,y] = y$.

Теорема 16.2. *Обе двумерные алгебры Ли $\mathbb{R}^2$ и S_2 неуправляемы.*

Доказательство. Как $\mathbb{R}^2$, так и S_2 вполне разрешимы, поэтому все следует из теоремы 13.1. □

16.3. **Трехмерные группы Ли.**

Конструкция 16.1. Алгебра Ли $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (рис. 2):

$$L_3(\lambda) = \operatorname{span}(x,y,z),$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi.$$

Алгебра Ли $L_3(\lambda)$ представлена схемой на рис. 2 с помощью собственных значений $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ и овеществлений собственных векторов $y, z \in L_3(\lambda)$ присоединенного оператора $\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z)}$.

Теорема 16.3. *Пусть $L = L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, и $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *$B \notin L^{(1)}$,*
(2) *векторы A и B линейно независимы.*

Доказательство. Достаточность. Покажем, что все условия следствия 14.3 выполняются.

Условия (1) и (2) очевидно удовлетворяются.

Условие (3). Рассмотрим разложение $B = B_x x + B_y y + B_z z$. Имеем

$$\operatorname{Sp}^{(1)} = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} x|_{L^{(1)}}) = B_x \cdot \{\lambda, \bar{\lambda}\}.$$

$B \notin L^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $B_x \neq 0$, поэтому спектр $\operatorname{Sp}^{(1)}$ прост.

Условие (4): $\operatorname{Sp}_r^{(2)} = \operatorname{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$.

Условие (5), $A(a) \neq 0$ для всех $a \in \operatorname{Sp}_c^{(1)}$ означает, что вектор A имеет ненулевую проекцию на $L^{(1)}$ вдоль прямой $\mathbb{R}B$, т.е. что A и B линейно независимы.

Условие (6): $\operatorname{Sp}_r^{(1)} = \emptyset$.

Теперь из следствия 14.3 вытекает, что система Γ управляема.

Необходимость вытекает из следствия 14.1. □

Теорема 16.4. *Трехмерная разрешимая алгебра Ли управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $L_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Доказательство. Достаточность. Множество систем Γ, удовлетворяющих условиям (1) и (2) теоремы 16.3, непусто.

Необходимость. Пусть $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ — управляемая система. По теореме 14.1 имеем $\dim L^{(1)} = 2$ и $B \notin L^{(1)}$. Производная подалгебра $L^{(1)}$ нильпотентна и двумерна, поэтому абелева. Следовательно, $\operatorname{Sp}_r^{(2)} \subset \operatorname{Sp}^{(2)} = \emptyset$. Имеем

$$\operatorname{Sp}^{(1)} = \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}, \quad \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Тогда существует базис y, z плоскости $L^{(1)}$ такой, что

$$[B, y] = \alpha y + \beta z, \quad [B, z] = -\beta y + \alpha z.$$

Учитывая, что $L^{(1)}$ абелева, получаем $L \simeq L_3(\lambda)$. □

16.4. **Четырехмерные группы Ли.**

Конструкция 16.2. Алгебра Ли $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (рис. 3):

$$L_4(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, w),$$
$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,w)} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi,$$
$$[y, z] = w.$$

Стрелки на схеме алгебры Ли $L_4(\lambda)$ на рис. 3 означают, что скобка Ли векторов y и z дает вектор w.

Теорема 16.5. *Пусть $L = L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, и $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда удовлетворяются следующие условия:*

1. $B \notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda) \neq 0$.

Теорема 16.6. *Четырехмерная разрешимая алгебра Ли управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $L_4(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

16.5. **Пятимерные группы Ли.**

Конструкция 16.3. Алгебра Ли $L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (рис. 4):

$$L_{5,I}(\lambda, \mu) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v),$$

$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi, \ \mu = c + di.$$

Конструкция 16.4. Алгебра Ли $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (рис. 5):

$$L_{5,II}(\lambda) = \operatorname{span}(x, y, z, u, v),$$

$$\operatorname{ad} x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & -b \\ 0 & 1 & b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + bi.$$

Кружки вокруг собственных значений λ, $\bar{\lambda}$ на рис. 5 означают алгебраическую кратность два. (Отметим, что, как видно из вышеприведенной матрицы, их геометрическая кратность равна единице.)

Теорема 16.7. *Пусть $L = L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, и $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. $B \notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda) \neq 0$ *и* $A(\mu) \neq 0$.

Теорема 16.8. *Пусть $L = L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $A, B \in L$. Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. $B \notin L^{(1)}$,
2. $\operatorname{top}(A, \lambda) \neq 0$.

Замечание. Обозначение $\operatorname{top}(A, \lambda) \neq 0$ в теореме 16.8 (и в теореме 16.14 ниже) означает, что вектор A имеет ненулевую компоненту, соответствующую старшему корневому пространству оператора $\operatorname{ad} B|_{L^{(1)}}$ для его собственного вектора λ.

Теорема 16.9. *Пятимерная разрешимая алгебра Ли управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $L_{5,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, или $L_{5,II}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

16.6. **Шестимерные группы Ли.**

Конструкция 16.5. Алгебра Ли $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (рис. 6):

$$
\begin{aligned}
&L_{6,I}(\lambda,\mu)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w),\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & -d & 0\\ 0 & 0 & d & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix},\quad \lambda=a+bi,\ \mu=c+di,\\
&[y,z]=w.
\end{aligned}
$$

Конструкция 16.6. Алгебра Ли $L_{6,II}(\lambda,\mu,k)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (рис. 7):

$$
\begin{aligned}
&L_{6,II}(\lambda,\mu,k)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w),\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & -d & 0\\ 0 & 0 & d & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix},\quad \lambda=a+bi,\ \mu=a+di,\\
&[y,z]=w,\quad [u,v]=kw.
\end{aligned}
$$

Конструкция 16.7. Алгебра Ли $L_{6,III}(\lambda,k,l)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\,\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ (рис. 8):

$$
\begin{aligned}
&L_{6,III}(\lambda,k,l)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w),\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3a & -b & 0\\ 0 & 0 & b & 3a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix},\quad \lambda=a+bi,\\
&[w,y]=ku+lv,\quad [w,z]=-lu+kz.
\end{aligned}
$$

Конструкция 16.8. Алгебра Ли $L_{6,IV}(\lambda,k,l)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\,\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ (рис. 9):

$$
\begin{aligned}
&L_{6,IV}(\lambda,k,l)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w),\\
&\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a & -b & 0\\ 0 & 0 & b & -a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \lambda=a+bi,\\
&[y,v]=-[z,u]=kw,\quad [y,u]=[z,v]=lw.
\end{aligned}
$$

Конструкция 16.9. Алгебра Ли $L_{6,V}(\lambda,k,l)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ (рис. 10):

$$L_{6,V}(\lambda,k,l)=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w),$$
$$\operatorname{ad}x|_{\operatorname{span}(y,z,u,v,w)}=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & a & -b & 0\\ 0 & 1 & b & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a\end{pmatrix},\quad \lambda=a+bi,$$
$$[y,z]=kw,\quad [y,u]=[z,v]=lw.$$

Конструкция 16.10. Класс алгебр Ли $L_{6,VI}(bi)$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (рис. 11):
Алгебра Ли L принадлежит классу $L_{6,VI}(bi)$, если:

$L=\operatorname{span}(x,y,z,u,v,w)$,
$L^{(1)}=\operatorname{span}(y,z,u,v,w)$,
$\operatorname{Sp}(\operatorname{ad}x|_{L^{(1)}})=\{\pm bi,0\}$,
оба собственных значения $\pm bi$ имеют двойную алгебраическую кратность,
$w\in L^{(2)}$.

Класс $L_{6,VI}$ содержит множество неизоморфных алгебр Ли, умножение в которых мы не можем описать подробно, как для алгебр Ли $L_{6,I}$–$L_{6,V}$.

Теорема 16.10. *Пусть $L=L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda\neq\mu,\bar\mu$, и $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1. $B\notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda)\neq 0$ *и* $A(\mu)\neq 0$.

Теорема 16.11. *Пусть $L=L_{6,II}(\lambda,\mu,k)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu$, $\lambda\neq\mu,\bar\mu$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1. $B\notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda)\neq 0$ *и* $A(\mu)\neq 0$.

Теорема 16.12. *Пусть $L=L_{6,III}(\lambda,k,l)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ и $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1. $B\notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda)\neq 0$.

Теорема 16.13. *Пусть $L=L_{6,IV}(\lambda,k,l)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ и $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1. $B\notin L^{(1)}$,
2. $A(\lambda)\neq 0$ *и* $A(-\lambda)\neq 0$.

Теорема 16.14. *Пусть $L=L_{6,V}(\lambda,k,l)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, $k,l\in\mathbb{R}$, $k^2+l^2\neq 0$ и $A,B\in L$. Система $\Gamma=A+\mathbb{R}B\subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1. $B\notin L^{(1)}$,

2. $\mathrm{top}(A, \lambda) \neq 0$.

Замечание. Класс $L_{6,VI}(bi)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, содержит как управляемые, так и неуправляемые алгебры Ли

Теорема 16.15. *Пусть шестимерная разрешимая алгебра Ли L не принадлежит классу $L_{6,VI}(bi)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Алгебра Ли L управляема тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих алгебр:*

1. $L_{6,I}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$;
2. $L_{6,II}(\lambda, \mu, k)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\mu$, $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
3. $L_{6,III}(\lambda, k, l)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$, $k, l \in \mathbb{R}$, $k^2 + l^2 \neq 0$;
4. $L_{6,IV}(\lambda, k, l)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$, $k, l \in \mathbb{R}$, $k^2 + l^2 \neq 0$;
5. $L_{6,V}(\lambda, k, l)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$, $k, l \in \mathbb{R}$, $k^2 + l^2 \neq 0$.

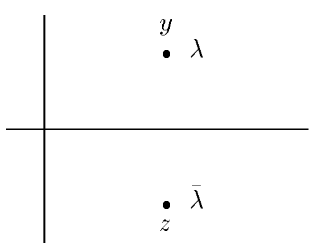

Рис. 2. $L_3(\lambda)$.

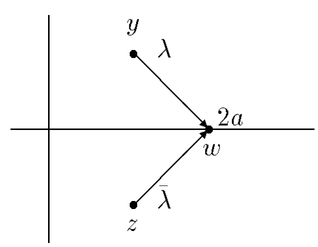

Рис. 3. $L_4(\lambda)$, $\mathrm{Re}\,\lambda = a$.

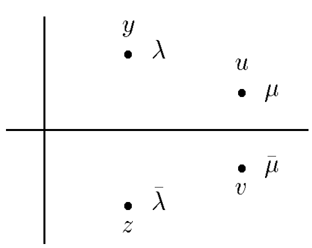

Рис. 4. $L_{5,I}(\lambda, \mu)$.

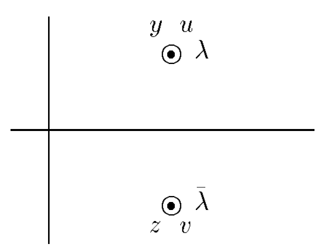

Рис. 5. $L_{5,II}(\lambda)$.

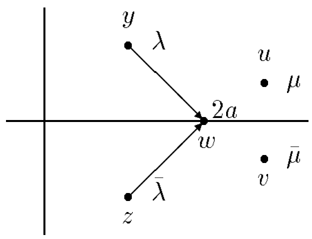

Рис. 6. $L_{6,I}(\lambda,\mu)$, $\operatorname{Re}\lambda=a$.

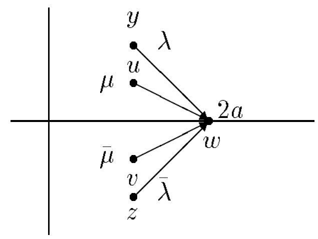

Рис. 6. $L_{6,II}(\lambda,\mu,k)$, $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu=a$.

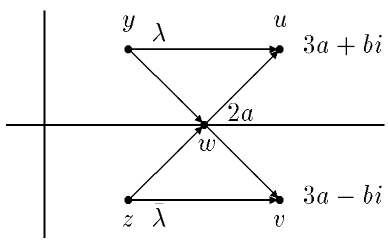

Рис. 8. $L_{6,III}(\lambda,k,l)$, $\lambda=a+bi$.

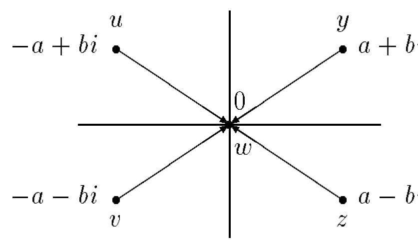

Рис. 9. $L_{6,IV}(\lambda,k,l)$, $\lambda=a+bi$.

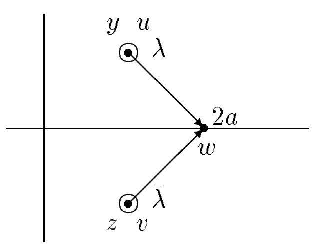

Рис. 10. $L_{6,V}(\lambda,\mu)$, $\operatorname{Re}\lambda=a$.

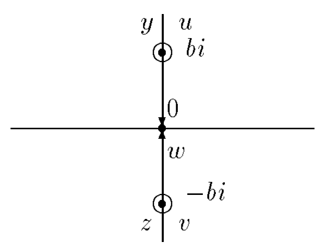

Рис. 11. $L_{6,VI}(bi)$.

16.7. **Примечания.** Классификация управляемых разрешимых алгебр Ли малой размерности получена Ю. Л. Сачковым [138, 139].

Естественным следующим шагом была бы полная и наглядная классификация управляемых систем в общих алгебрах Ли малой размерности с помощью синтеза “полупростой” и “разрешимой” теории с помощью разложения Ли (И. Купка [108]).

17. Заключительные замечания

В этом параграфе приведены ссылки на работы, близкие к теме данного обзора:

Обзоры и справочные статьи по управляемости правоинвариантных систем на группах Ли: И. Чонг и Дж. Д. Лоусон [54], И. Купка [108], Ю. Л. Сачков [138], Г. Салле [141, 142, 143].

Книги и обзоры по геометрической теории управления: А. А. Аграчев, С. В. Вахрамеев, и Р. В. Гамкрелидзе [1], Ю. Н .Андреев [2], Р. В. Брокетт [49], С. А. Вахрамеев [3, 4], Ж. П. Готье [59], В. Джарджевич [95], А. Исидори [86], Дж. Касти [52], Х. Дж. Суссманн [152].

Книги и обзоры по группам и алгебрам Ли: Н. Бурбаки [46, 47], В. С. Варадараян [154], Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик [5], Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, и А. Л. Онищик [6].

Книги по теории полугрупп Ли: К. Х. Хофманн и Дж. Д. Лоусон [82], Дж. Хильгерт и К.-Х. Ниб [75], Дж. Хильгерт, К. Х. Хофманн, и Дж. Д. Лоусон [74].

Управляемость нелинейных систем: А. А. Аграчев [21], А. Баччиотти и Ж. Стефани [35], Х. Басто Гонсалвес [62, 63, 64, 65], Р. М. Бианчини и Ж. Стефани [36], Р. Херманн [66], Х. Хермс [67, 68, 69], Х. Хермс и М. Кавски [70], М. Кавски [100], А. Кренер [102], Н. Левитт и Х. Дж. Суссманн [120], К. Лобри [121, 122], Ж. Стефани [148], Х. Дж. Суссманн [153], Х. Дж. Суссманн и В. Джарджевич [150], А. И. Третьяк [15].

Управляемость билинейных и аффинных систем: Ф. Адда [19], Ф. Адда и Г. Салле [20], А. Баччиотти [34], Б. Боннар [37, 38], В. Бутби [42], Р. В. Брокетт [50], К. Бруни, Дж. Ди Пилло, и Дж. Коч [51], Д. Е. Кодичек и К. С. Нарендра [101], Д. Эллиотт и Т. Тарн [57], Н. Имберт, М. Клик, и А.-Дж. Фоссар [85], И. Жоо и Н. М. Туан [88], В. Джарджевич и Г. Салле [98], Ж. Кучера [105, 106, 107], Н. Л. Лепе [10], К. Лобри [123], У. Пиечоттка [131], У. Пиечоттка и П. М. Франк [132], Р. Е. Ринк и Р. Р. Молер [133], Ю. Л. Сачков [11, 12, 13, 14, 135].

Линейные и билинейные системы на группах Ли: В. Аяла и Х. Тирао [31], В. Аяла, О. Ройо, и Р. Сото [33], В. Аяла и И. Жирон [30], В. Аяла и А. Хакибероглы [32], Л. Маркус [124].

Конструктивная управляемость и синтез управления на группах Ли и пространствах их представлений: М. И. Зеликин [7, 8, 9, 156], П. С. Кришнапрасад и Д. П. Тсакирис [103, 104], Н. Э. Леонард [116], Н. Э. Леонард и П. С. Кришнапрасад [117, 118], А. Сарти, Г. Уолш, и Ш. Састри [147], Г. Уолш, Р. Монтгомери, и Ш. Састри [155].

Задачи управления на группах Ли: Б. Боннар [39], Д. Чен, В. П. Даяванса, и К. Ф. Мартин [53], М. Дж. Энос [58], Р. Хирсчорн [77], В. Джарджевич [91, 92, 93, 94], М. Ловрич [119], Д. Миттенхубер [125, 127], Ф. Монрой-Перес [128], Х. Дж. Суссманн [149], Г. Н. Яковенко [16, 17], В. А. Яценко [18].

Автор благодарит А. А. Аграчева за предложенную тему правоинвариантных систем на группах Ли в качестве предмета исследования, а также В. Аялу, Б. Боннара, Ж. П. Готье, В. Джарджевича, М. И. Зеликина, Ф. Колониуса, Дж. Д. Лоусона, Д. Миттенхубера, Л. Сан Мартина, Ф. Сильва Лейте, Дж. Хильгерта, К. Х. Хофманна за полезные обсуждения предмета данной работы и предоставление их статей.

Литература

[1] Аграчев А. А., Вахрамеев С. В., Гамкрелидзе Р. В. *Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления* // Итоги науки и техники // Пробл. геометрии. – 1983. – **14**. – С. 3–56 (РЖМат, 1983, 5Б609)

[2] Андреев Ю.Н. *Дифференциально–геометрические методы в теории управления* // Автомат. телемех. – 1982. – N 10. – С. 5–46 (РЖМат, 1983, 2Б706)

[3] Вахрамеев С.А. *Геометрические и топологические методы в теории управления* // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. и ее приложения. Темат. обзоры. Сер. Анализ – 5 / ВИНИТИ, 1993. – **9** (в печати)

[4] Вахрамеев С.А., Сарычев А.В. *Геометрическая теория управления* // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. // ВИНИТИ, 1985. – **23**. – С. 197–280 (РЖМат, 1986, 4Б735)

[5] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. *Семинар по группам Ли и алгебраические группы* – М.: Наука, 1988. – 343 с. (РЖМат, 1988, 9А454к)

[6] Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л. *Строение групп и алгебр Ли* // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления / ВИНИТИ, 1989. – **41**. – С. 5–258 (РЖМат, 1990, 7А483)

[7] Зеликин М. И. *Синтез оптимальных траекторий на пространствах представлений групп Ли* // Мат. сб. 1987. – **132(174)** N 4. – С. 541–555 (РЖМат, 1988, 9Б740)

[8] Зеликин М. И. *Групповая симметрия в вырожденных экстремальных задачах* // Успехи мат. наук. – 1988. – **43**. – С. 139–140 (РЖМат, 1988, 9Б688)

[9] Зеликин М. И. *Оптимальное управление вращением твердого тела* // Докл. АН СССР. – 1996. – **346**. – С. 334–336

[10] Лепе Н. Л. *Геометрические методы исследования управляемости билинейных систем второго порядка* // Автомат. и телемех. – 1984. – N 11. – С. 19–25 (РЖМат, 1985, 3Б774)

[11] Сачков Ю. Л. *Управляемость трехмерных билинейных систем* // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. – 1991, – N 3. – С. 26–30 (РЖМат, 1991, 9Б851)

[12] Сачков Ю. Л. *Инвариантные области трехмерных билинейных систем* // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. – 1991, – N 4. – С. 23–26 (РЖМат, 1991, 11Б199)

[13] Сачков Ю. Л. *Управляемость двумерных и трехмерных билинейных систем в положительном ортанте* // Дифференц. уравнения. – 1993, – **29**, N 2. – С. 361–363 (РЖМат, 1994, 2Б513)

[14] Сачков Ю. Л. *Управляемость билинейных систем со скалярным управлением в положительном ортанте* // Мат. заметки. – 1995. – **85**. – С. 419–424

[15] Третьяк А. И. *Достаточные условия локальной управляемости и условия оптимальности высокого порядка. Дифференциально–геометрический подход* // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее приложения. Темат. обзоры. Сер. Динамические системы–4. – 1995. – **24** (в печати)

[16] Яковенко Г. Н. *Синтез оптимального управления на группе Ли третьего порядка* // Кибернет. и вычисл. техн. – Киев. – 1981. – **51**. – С. 17–22 (РЖМат, 1981, 11Б761)

[17] Яковенко Г. Н. *Управление на группах Ли: первые интегралы, сингулярные управления* // Кибернетика и вычислит. техника (Киев) Кибернет. и вычисл. техн. – Киев. – 1984. – **62**. – С. 10–20 (РЖМат, 1985, 2Б758)

[18] Яценко В. А. *Уравнение Эйлера на группах Ли и оптимальное управление билинейными системами* // Кибернет. и вычисл. техн. – Киев. – 1983. – **58**. – С. 78–80 (РЖМат, 1984, 1Б824)

[19] Adda Ph. *Contrôllabilité des Systèmes Bilinéaires Generaux et Homogenes dans* $\mathbb{R}^2$ // In: Lect. Notes in Contr. and Inform. Sci., INRIA. – 1988. – **111**. – С. 205–214

[20] Adda Ph., Sallet G. *Determination Algorothmique de la Contrôllabilité pour des Familles Finies de Champs de Vecteurs Lineaires sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ // R.A.I.R.O. APII – 1990. – **24**. – С. 1377–390

[21] Agrachev A. A. *Local Controllability and Semigroups of Diffeomorphisms* // Acta Appl. Math. – 1993. – **32**. – С. 1–57 (РЖМат, 1994, 3Б527)

[22] Albuquerque H., Leite Silva F. *On the Generators of Semisimple Lie Algebras* // Linear Algebra and its Appl. – 1989. – **119**. – С. 151–56 (РЖМат, 1990, 5А473)

[23] El Assoudi R. *Accessibilité par des champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie* // Thèse de doctorat de l'Univ. Joseph Fourier, Grenoble, 1991

[24] El Assoudi R., Gauthier J. P. *Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups of Type F_4, G_2, C_n, and B_n* // Math. Contr. Signals Syst. – 1988. – **1**. – C. 293–301

[25] El Assoudi R., Gauthier J. P. *Controllability of Right-Invariant Systems on Semi-simple Lie Groups* // New trends in nonlinear control theory, Springer–Verlag – 1989. – **122**. – C. 54–64

[26] El Assoudi R., Gauthier J. P., Kupka I. *On Subsemigroups of Semisimple Lie Groups* // Ann. Inst. H. Poincaré – 1996. – **13**, N 1. – C. 117–133

[27] Auslander L., Green L., Hahn F. *Flows on Homogeneous Spaces* // Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963. – N 53

[28] Ayala Bravo V. *Controllability of nilpotent systems* // In: Geometry in nonlinear control and differential inclusions // Banach Center Publ. Warszawa, – 1995. – **32**. – C. 35–46

[29] Ayala Bravo V., Vergara L. *Co-adjoint Representation and Controllability* // Proyecciones – 1992. – **11**. – C. 37–48

[30] Ayala Bravo V., Jiron I. *Observabilidad del Producto Directo de Sistemas Bilineales* // Revista Cubo – 1993. – **9**. –C. 35–46

[31] Ayala Bravo V., Tirao J. *Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups* // Intern. Centre for Theor. Phys. Preprint IC/94/310, Trieste, Italy, 1994

[32] Ayala Bravo V., Hacibekiroglu A. *Observability of Linear Systems on Lie Groups* // Intern. Centre for Theor. Phys. Preprint IC/95/2, Trieste, Italy, 1995

[33] Ayala Bravo V., Rojo O., Soto R. *Observability of the Direct Product of Bilinear Systems on Lie Groups* // Comput. Math. Appl. – 1998. – **36**. – N 3. – C. 107–112

[34] Bacciotti A. *On the Positive Orthant Controllability of Two-dimensional Bilinear Systems* // Syst. & Cont. Lett. – 1983. – **3**. – C. 53–55

[35] Bacciotti A., Stefani G. *On the Relationship Between Global and Local Controllability* // Math. Syst. Theory – 1983. – **16**. – C. 79–91 (РЖМат, 1983, 7Б603)

[36] Bianchini R. M., Stefani G. *Sufficient Conditions of Local Controllability* // Proc. 25th IEEE Conf. on Decision and Contr. Athens, 1986

[37] Bonnard B. *Contrôllabilité des Systèmes Bilinéaires* // Math. Syst. Theory – 1981. – **15**, N 1. – C. 79–92 (РЖМат, 1982, 6Б694)

[38] Bonnard B. *Contrôllabilité des Systèmes Bilinéaires* // Qutils et modeles math. autom. Anal. syst. et trait signal. Paris, 1, 1981, – C. 229–243 (РЖМат, 1982, 2Б667)

[39] Bonnard B. *Controllabilité de Systèmes Mecaniques sur les Groupes de Lie* // SIAM J. Control Optimiz. – 1984. – **22**. – C. 711–722 (РЖМат, 1985, 5Б623)

[40] Bonnard B., Jurdjevic V., Kupka I., Sallet G. *Transitivity of Families of Invariant Vector Fields on the Semidirect Products of Lie Groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – **271**, N 2. – C. 525–535 (РЖМат, 1983, 1А491)

[41] Boothby W. *A Transitivity Problem from Control Theory* // J. Different. Equat. – 1975. – **17**, N 2. – C. 296–307 (РЖМат, 1975, 10Б580)

[42] Boothby W., *Some Comments on Positive Orthant Controllability of Bilinear Systems* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1982. – **20**, N 5. – C. 634–644 (РЖМат, 1983, 2Б701)

[43] Boothby W., Wilson E. N. *Determination of the Transitivity of Bilinear Systems* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1979. – **17**, N 2. – C. 212–221 (РЖМат, 1979, 10Б681)

[44] Borel A. *Some Remarks about Transformation Groups Transitive on Spheres and Tori* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**. – C. 580–586

[45] Borel A. *Le Plan Projectif des Octaves et les Sphères comme Espaces Homogènes* // C. r. Acad. sci. Paris – 1950. – **230**. – C. 1378–1380

[46] Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie*. Chapit. 1. Algèbres de Lie, Actual scient. et industr. – Hermann, Paris, 1960. – N. 1280, – 144 c. (РЖМат, 1961, 11А24К)

[47] Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie*. Chapit. 2. Algèbres de Lie Libres. Chapit. 3. Groupes de Lie. – Hermann, Paris, 1972

[48] Brockett R. W. *System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces* // SIAM J. Contr. – 1972. – **10**, N 2. – C. 265–284 (РЖМат, 1973, 2Б303)

[49] Brockett R. W. *Lie Algebras and Lie Groups in Control Theory* // Geometr. meth. in syst. theory, D. Q. Mayne and R. W. Brockett (Eds.). Proc. of the NATO Adv. study inst. London, August 27 – September 7, 1983, Dordrecht – Boston, D. Reidel Publ. Company, 1973, C. 43–82 (РЖМат, 1974, 10Б523)

[50] Brockett R.W. *On the Reachable Set for Bilinear Systems* // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. – 1975. – **111**. – С. 54–63

[51] Bruni C., Di Pillo G., Koch G. *Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1974. – **19**. – С. 334–348 (РЖМат, 1975, 3Б265)

[52] Casti J.L. *Recent developments and future perspectives in nonlinear systems theory* // SIAM Rev. – 1982. – **24**, N 3. – С. 301–331 (РЖМат, 1983, 1Б667)

[53] Cheng D., Dayawansa W.P., Martin C.F. *Observability of Systems on Lie Groups and Coset Spaces* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1990. – **28**. – С. 570–581

[54] Chong I., Lawson J.D. *Problems on Semigroup and Control* // Semigroup Forum – 1990. – **41**. – С. 245–252

[55] Crouch P.E. Silva Leite F. *On the Uniform Finite Generation of* $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ // Systems & Control Letters – 1983. – **2**. – С. 341–347

[56] Crouch P.E., Byrnes C.I. *Symmetries and Local Controllability* // Algebraic and Geometr. Meth. in Nonlinear Contr. Theory, Dordrecht, M. Fliess and M. Hazewinkel eds., Reidel Publishing Company, Holland. – 1986. – С. 55–75 (РЖМат, 1983, 9Б725)

[57] Elliott D., Tarn T. *Controllability and Observability for Bilinear Systems* // SIAM Nat. Meeting, Seattle, Washington, 1971

[58] Enos M.J. *Controllability of a System of Two Symmetric Rigid Bodies in Three Space* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1994. – **32**. – С. 1170–1185

[59] Gauthier J.P. *Structures des systèmes nonlineaires* // Paris: CNRS. – 1984. – 307 с. (РЖМат, 1984, 12Б898)

[60] Gauthier J.P., Bornard G. *Contrôlabilité des systèmes bilinèaires* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1982. – **20**, N 3. – С. 377–384

[61] Gauthier J.P., Kupka I., Sallet G. *Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups* // Systems & Contr. Lett. – 1984. – **5**. – С. 187–190

[62] Gonçalves Basto J. *Sufficient Conditions for Local Controllability with Unbounded Controls* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1987. – **16**. – С. 1371–1378

[63] Gonçalves Basto J. *Controllability in Codimension One* // J. Different. Equat. – 1987. – **68**. – С. 1–9

[64] Gonçalves Basto J. *Local Controllability in 3–manifolds* // Systems & Contr. Letters – 1990. – **14**. – С. 45–49

[65] Gonçalves Basto J. *Local Controllability of Scalar Input Systems on 3–manifolds* // Systems & Contr. Letters – 1991. – **16**. – С. 349–355

[66] Hermann R. *On the Accessibility Problem in Control Theory* // Int. Sympos. on Nonlinear Different. Equat. and Nonlinear Mech. Acad. Press, New York. – 1963. – С. 325–332 (РЖМат, 1965, 2Б483)

[67] Hermes H. *On Local and Global Controllability* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1974. – **12**. – С. 252–261 (РЖМат, 1975, 4Б658)

[68] Hermes H. *Controlled Stability* // Annali di Matematica Pura ed Applicata – 1977. **114**. – С. 103–119 (РЖМат, 1978, 6Б504)

[69] Hermes H. *On Local Controllability* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1982. – **20**. – С. 211–220 (РЖМат, 1982, 9Б547)

[70] Hermes H., Kawski M. *Local Controllability of a Single-Input, Affine System* // Proc. 7th Int. Conf. Nonlinear Anal., Dallas, 1986

[71] Hilgert J. *Maximal Semigroups and Controllability in Products of Lie Groups* // Arch. Math. – 1987. – **49**. – С. 189–195 (РЖМат, 1988, 4А380)

[72] Hilgert J. *Controllability on Real Reductive Lie Groups* // Math. Zeitschrift – 1992. – **209**. – С. 463–466

[73] Hilgert J. Hofmann K.H., Lawson J.D. *Controllability of Systems on a Nilpotent Lie Group* // Beitr. zur Algebra und Geometrie – 1985. – **37**. – С. 185–190 (РЖМат, 1987, 3А498)

[74] Hilgert J. Hofmann K.H., Lawson J.D. *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups* – Oxford Univ. Press, 1989

[75] Hilgert J., Neeb K.H. *Lie Semigroups and their Applications* // Lect. Notes Math. – 1993. – **1552**

[76] Hirsch M.W. *Convergence in neural nets* // Proc. Int. Conf. on Neural Networks. Vol. II. – 1987. – С. 115–125, IEEE, USA

[77] Hirschorn R.M *Invertibility of Control Systems on Lie Groups* // SIAM Journ. Contr. Optimiz. – 1977. – **15**, N 6. – С. 1034–1049 (РЖМат, 1978, 5Б409)

[78] Hoffmann K.H. *Lie Algebras with Subalgebras of Codimension One* // Ill. J. Math. – 1965. – **9**. – С. 636–643 (РЖМат, 1966, 7А215)

[79] Hoffmann K.H. *Hyperplane Subalgebras of Real Lie Algebras* // Geometr. Dedic. – 1990. – **36**. – С. 207–224 (РЖМат, 1991, 4А258)

[80] Hoffmann K.H. *Compact Elements in Solvable Real Lie Algebras* // Seminar Sophus Lie (now: J. of Lie theory) – 1992. – **2**. – С. 41–55

[81] Hoffmann K.H. *Memo to Yurii Sachkov on Hyperplane Subalgebras of Lie Algebras*, E-mail message, March 1996

[82] Hoffmann K.H. Lawson J.D. *Foundations of Lie Semigroups* // Lect. Notes Math. – 1983. – **998**. – С. 128–201 (РЖМат, 1984, 3А224)

[83] Hunt K.R. *Controllability of Nonlinear Hypersurface Systems* // – In: C.I. Byrnes and C.F. Martin (Eds.) // Algebraic and Geometr. Meth. in Linear Syst. Theory, AMS, Providence, Rhode Island, 1980

[84] Hunt K.R. *n–Dimensional Controllability with $(n-1)$ Controls* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1982. – **27**. – С. 113–117 (РЖМат, 1982, 9Б548)

[85] Imbert N., Clique M., Fossard A.-J. *Un Critère de Gouvernabilite des Systèmes Bilinéaires* // Rev. franc. automat., inform. rech. oper. – 1975. – **3**, N 3. – С. 55–64 (РЖМат, 1976, 7Б515)

[86] Isidori A. *Nonlinear control systems. An introduction.* – Berlin, Springer, 1989

[87] Jacobson N. *Lie Algebras* // Interscience Publ., New York and London, 1962. – 331 с. (РЖМат, 1963, 5А298К)

[88] Joo I., Tuan N.M. *On Controllability of Some Bilinear Systems* // Compt. Rend. de l'Acad. des Sci. Série I. – 1992. – **315**. – С. 1393–1398

[89] Joseph A. *The Minimal Orbit in a Simple Lie Algebra and its Associated Maximal Ideal* // Ann. Sc. de l'École Normale Sup., 4^e série. – 1976. – **9**, N 1. – С. 1–29

[90] Jurdjevic V. *On the Reachability Properties of Curves in $\mathbb{R}^n$ with Prescribed Curvatures* // Univ. of Bordeaux Publ. 1, 1980. – N 8009

[91] Jurdjevic V. *Optimal Control Problems on Lie Groups* // Anal. Contr. Dynam. Syst. Proc. Confer., Lyon, France. B. Bonnard, B. Bride, J.P. Gauthier, I. Kupka (Eds.) 1990. – С. 274–284

[92] Jurdjevic V. *The Geometry of Plate-Ball Problem* // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1993. – **124**. – С. 305–328

[93] Jurdjevic V. *Optimal Control Problems on Lie Groups: Crossroads between Geometry and Mechanics* // Geometry of Feedback and Optim. Contr. B. Jukubczyk and W. Respondek (Eds.) New York: Marcel Dekker, 1993

[94] Jurdjevic V. *Non-Eucledean Elastica* // Amer. J. Math. – 1995. – **117**. – С. 93–124

[95] Jurdjevic V. *Geometric Control Theory.* – Cambridge Univ. Press, 1997

[96] Jurdjevic V., Kupka I. *Control Systems Subordinated to a Group Action: Accessibility* // J. Different. Equat. – 1981. – **39**. – С. 186–211

[97] Jurdjevic V., Kupka I. *Control Systems on Semi-simple Lie Groups and their Homogeneous Spaces* // Ann. Inst. Fourier, Grenoble – 1981. – **31**, N 4. – С. 151–179 (РЖМат, 1982, 7А546)

[98] Jurdjevic V., Sallet G. *Controllability Properties of Affine Systems* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1984. – **22**, N 2. – С. 501–508 (РЖМат, 1984, 11Б751)

[99] Jurdjevic V., Sussmann H. *Control Systems on Lie Groups* // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, N 2. – С. 313–329 (РЖМат, 1973, 4А580)

[100] Kawski M. *Nilpotent Lie Algebras of Vector Fields and Local Controllability of Nonlinear Systems* // Ph.D. Dissertation, Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1986

[101] Koditschek D.E., Narendra K.S. *The Controllability of Planar Bilinear Systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1985. – **30**. – С. 87–89 (РЖМат, 1985, 9Б644)

[102] Krener A. *A Generalization of Chow's Theorem and the Bang-Bang Theorem to Non-Linear Control Porblems* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1974. – **12**. – С. 43–51.

[103] Krishnaprasad P.S., Tsakiris D.P. *G-Snakes: Nonholonomic Kinematic Chains on Lie Groups* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decis. and Contr., Lake Buena Vista, FLa., Dec. 14–16, 1994. Vol. 3. Piscataway (N.J.) – С. 2955–2960 (РЖМат, 1996, 2Б471)

[104] Krishnaprasad P. S., Tsakiris D. P. *Oscillations,* $SE(2)$*-Snakes and Motion Control* // Proc. 34th IEEE Conf. on Decis. and Contr., New Orleans, Louisiana, December 1995

[105] Kučera J. *Solution in Large of Control System* $\dot{x} = (A(1-u) + Bu)x$ // Czech. Math. J. – 1966. – **16**. – С. 600–623 (РЖМат, 1968, 5Б261)

[106] Kučera J. *Solution in Large of Control System* $\dot{x} = (Au + Bv)x$ // Czech. Math. J. – 1967. – **17**. – С. 91–96 (РЖМат, 1968, 5Б262)

[107] Kučera J. *On the Accessibility of Bilinear System* // Czech. Math. J. – 1970. – **20**. – С. 160–168 (РЖМат, 1970, 12Б303)

[108] Kupka I. *Applications of Semigroups to Geometric Control Theory* // The analytical and topological theory of semigroups — Trends and developments, K. H. Hofmann, J. D. Lawson and J. S. Pym (Eds.), de Gruyter Expositions in Math. – 1990. – **1**. – С. 337–345

[109] Kuranishi M. *On Everywhere Dense Imbedding of Free Groups in Lie Groups* // Nagoya Math. J. – 1951. – **2**. – С. 63–71

[110] Lawson J.D. *Maximal Subsemigroups of Lie Groups that are Total* // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1985. – **30**. – С. 479–501

[111] Leite Silva F. *Uniform Controllable Sets of Left-Invariant Vector Fields on Compact Lie Groups* // Syst. & Contr. Lett. – 1986. – **6**. – С. 329–335

[112] Leite Silva F. *Uniform Controllable Sets of Left-Invariant Vector Fields on Noncompact Lie Groups* // Systems & Contr. Lett. – 1986. – **7**. – С. 213–216

[113] Leite Silva F. *Pairs of Generators for Compact Real Forms of the Classical Lie Algebras* // Linear Algebra and its Appl. – 1989. – **121**. – С. 123–133

[114] Leite Silva F. *Bounds on the Order of Generation of* $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R})$ *by One-Parameter Subgroups* // Rocky Mountain J. Math. – 1991. – **21**. – С. 879–911

[115] Leite Silva F. Crouch P. C. *Controllability on Classical Lie Groups* // Math. Contr. Signals and Systems – 1988. – **1**, N 1. – С. 31–42 (РЖМат, 1988, 10Б819)

[116] Leonard N.E. *Averaging and Motion Control of Systems on Lie Groups* // Ph.D. dissertation, Univ. Maryland, College Park, MD, 1994

[117] Leonard N. E., Krishnaprasad P. S. *Control of Switched Electrical Networks Using Averaging on Lie Groups* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decis. and Contr., Lake Buena Vista, FLa., Dec. 14–16, 1994. Vol. 2. Piscataway (N.J.) – С. 1919–1924 (РЖМат, 1995, 10Б405)

[118] Leonard N. E., Krishnaprasad P. S. *Motion Control of Drift-Free, Left-Invariant Systems on Lie Groups* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1995. – **40**. – С. 1539–1554

[119] Lovric M. *Left-Invariant Control Systems on Lie Groups* // Preprint F193–CT03, January 1993, The Fields Inst. for Res. in Math. Sci., Canada

[120] Levitt N., Sussmann H. J. *On Controllability by Means of Two Vector Fields* // SIAM J. Contr., – 1975. – **13**. – С. 1271–1281

[121] Lobry C. *Contrôllabilité des Systèmes non Linéaires* // SIAM J. Contr., – 1970. – **8**, N 4. – С. 573–605 (РЖМат, 1971, 7Б594)

[122] Lobry C. *Controllability of Non Linear Systems on Compact Manifolds* // SIAM J. Contr., – 1974. – **12**. – С. 1–4

[123] Lobry C. *Critères de Gouvernabilite des Asservissements non Linéaires* // R.A.I.R.O. – 1976. – **10**. – С. 41–54

[124] Markus L. *Controllability of Multi-Trajectories on Lie Groups* // Proc. of Sympos. on Dynam. Syst. and Turbulence, Warwick 1980, Lect. Notes Math. – 1981. – **898**. – С. 250–256

[125] Mittenhuber D. *Kontrolltheorie auf Lie-Gruppen* // Semin. Sophus Lie – 1991. – **1**. – С. 185–191

[126] Mittenhuber D. *Semigroups in the Simply Connected Covering of* $\mathrm{SL}(2)$ // Semigroup Forum – 1993. – **46**. – С. 379–387

[127] Mittenhuber D. *Control Theory on Lie Groups, Lie semigroups and the globality of Lie wedges* // Ph. D. Dissertation, TH Darmstadt, 1994

[128] Monroy-Pérez F. *Non-Euclidean Dubins' Problem* // J. of Dynam. and Contr. Syst. – 1998. – **4**. – С. 249–272

[129] Montgomery D., Samelson H. *Transformation Groups of Spheres* // Ann. Math. – 1943. – **44**. – С. 454–470

[130] Neeb K.-H. *Semigroups in the Universal Covering of* $\mathrm{SL}(2)$ // Semigroup Forum – 1990. – **40**. – С. 33–43

[131] Piechottka U. *Comments on "The Controllability of Planar Bilinear Systems"* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1990. – **35**. – C. 767–768

[132] Piechottka U., Frank P. M. *Controllability of Bilinear Systems: A Survey and Some New Results* // Nonlinear Contr. Syst. Design, ed. A. Isidori, Pergamon Press, 1990. – C. 12–28

[133] Rink R.E., Möhler R.R. *Completely Controllable Bilinear Systems* // SIAM J. Contr., – 1968. – **6**, N 3. – C. 477–486 (РЖМат, 1969, 5Б567)

[134] Sachkov Yu.L. *Controllability of Hypersurface and Solvable Invariant Systems* // J. of Dynam. and Control Syst. – 1996. – **2**, N 1. – C. 55–67 (РЖМат, 1996, 10Б476)

[135] Sachkov Yu.L. *On Positive Orthant Controllability of Bilinear Systems in Small Codimensions* // SIAM Journ. Contr. and Optimiz. – 1997. – **35**. – C. 29–35

[136] Sachkov Yu.L. *Controllability of Right-Invariant Systems on Solvable Lie Groups* // J. of Dynam. and Contr. Syst. – 1997. – **3**, N 4. – C. 531–564

[137] Sachkov Yu.L. *On Invariant Orthants of Bilinear Systems* // J. of Dynam. and Contr. Syst. – 1998. – **4**, N 1. – C. 137–147

[138] Sachkov Yu.L. *Survey on Controllability of Invariant Systems on Solvable Lie Groups* // Proc. of the AMS Summer Research Inst. on Different. Geom. and Contr. Boulder, USA, July 1997. – C. 297–317

[139] Sachkov Yu.L. *Classification of Controllability in Small-Dimensional Solvable Lie Algebras* // в работе

[140] Sallet G. *Une Condition Suffisante de Complète Contrôlabilité dans le Groupe des déplacements de* $\mathbb{R}^n$ // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. – 1976. – **282**. – C. 41–44 (РЖМат, 1976, 6Б587)

[141] Sallet G. *Complete Controllabilite sur les Groupes Lineaires* // Qutils et model. math. autom. // Anal. syst. et trait signal., Paris. – 1981. **1**. – C. 215–227 (РЖМат, 1982, 3Б640)

[142] Sallet G. *Extension Techniques* // Syst. and Contr. Encyclopedia. II. – 1987. – C. 1581–1583

[143] Sallet G. *Lie Groups: Controllability* // Syst. and Contr. Encyclopedia. II. – 1987. – C. 2756–2759

[144] Samelson H. *Topology of Lie Groups* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1952. – **58**. – C. 2–37

[145] San Martin L. A. B. *Invariant Control Sets on Flag Manifolds* // Math. Contr. Signals Syst. – 1993. – **6**. – C. 41–61

[146] San Martin L. A. B., Tonelli P. A. *Semigroup Actions on Homogeneous Spaces* // Semigroup Forum – 1994. – **14**. – C. 1–30

[147] Sarti A., Walsh G., Sastry S. *Steering Left-Invariant Control Systems on Matrix Lie Groups* // Proc. 32nd IEEE Conf. on Decis. and Contr., San Antonio, Texas, Dec. 1993. – C. 3117–3121

[148] Stefani G. *On the Local Controllability of a Scalar-Input System* // Theory and Appl. of Nonlinear Contr. Syst., C. I. Byrnes and A. Lindquist (Eds.), Elsevier Science Publ., 1986. – C. 167–179 (РЖМат, 1988, 7Б666)

[149] Sussmann H. J. *The "Bang-Bang" Problem for Certain Control Systems on* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ // SIAM J. Contr. – 1972. – **10**. – C. 470–476 (РЖМат, 1973, 3Б563)

[150] Sussmann H. J., Jurdjevic V. *Controllability of Non-Linear Systems* // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, N 1. – C. 95–116 (РЖМат, 1973, 3Б304)

[151] Sussmann H. J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **180**. – C. 171–188

[152] Sussmann H. J. *Lie Brackets, Real Analyticity and Geometric Control* // Different. Geom. Contr. Theory, R. W Brockett, R. S. Millmann, H. J. Sussmann (Eds.), Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1983. – C. 1–116

[153] Sussmann H. J. *A General Theorem on Local Controllability* // SIAM J. Contr. Optimiz. – 1987. – **25**, N 1. – C. 158–194 (РЖМат, 1987, 11А302)

[154] Varadarajan V. S. *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, Spinger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984. – 430 c. (РЖМат, 1985, 1А606К)

[155] Walsh G., Montgomery R., Sastry S. *Optimal Path Planning on Matrix Lie Groups* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Contr., Lake Buena Vista, FLa, Dec. 1994. – C. 1312–1318

[156] Zelikin M.I. *Totally Extremal Manifolds for Optimal Control Problems* // Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis, Eds.: Hoffmann, Lawson, Vinberg. Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York. 1995. – C. 339–354